



Co-funded by
the European Union



Handbok för lärare Screening i matematik 8+

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Innehåll

I. Introduktion.....	2
II. "Key skills" – nödvändiga för fortsatt lärande	3
III. Struktur i testen för årskurs 6+ and 8+	4
IV. Genomförande av testen	5
V. Presentation av uppgifterna	6
Uppgift 1.1: Omkretsen av en rektangel	6
Uppgift 1.2: Översätta text till uttryck med symboler	8
Uppgift 1.3: Översätta beskrivning i flera steg till ett uttryck med variabel.....	9
Uppgift 1.4: Översätta beskrivning av en vardagsnära problemsituation till ett uttryck med variabel.....	11
Uppgift 1.5: Översätta en matematisk beskrivning i flera steg till ett uttryck med variabel....	13
Task 1.6: Bestämma värdet av ett uttryck med variabel	15
Uppgift 1.7: Identifiera lösningen till en linjär ekvation.....	17
Uppgift 2.1: Proportionellt resonemang i en vardagsnära problemsituation.....	19
Uppgift 2.2: Problemlösning med invers proportionalitet	21
Uppgift 2.3: Identifiera proportionella samband i tabeller	23
Uppgift 2.4: Tolka linjärt samband i en graf	25
Uppgift 2.5: Lösa ett divisionsproblem i en verklighetsnära problemsituation	27
Uppgift 2.6: Kombinera fast och rörlig kostnad i en vardagsnära problemsituation	29
Uppgift 3.1: Omvandla ett bråk till procent.....	31
Uppgift 3.2: Beräkna nytt pris efter procentuell ökning.....	33
Uppgift 3.3: Tolka andel av figur som procent	35
Uppgift 3.4: Beräkningar med negativa tal.....	37
Uppgift 3.5: Identifiera decimaltal på en tallinje.....	38
VI. Vetenskaplig utvärdering	40
VII. Utvärdering av testresultat	42
VIII. Resultatblankett: Sammanställning av testresultat.....	43
Referenser	44

I. Introduktion

Att lära matematik är kumulativt: ny kunskap bygger på tidigare inhämtade förkunskaper. Om eleven inte kan använda grundläggande idéer och begrepp blir det svårt för eleven att komma vidare och lära sig nytt matematiskt innehåll. Resultat från internationella och nationella studier visar att alltför många elever inte har de färdigheter som behövs för att komma vidare i sina matematikstudier. Undervisningen i matematik behöver anpassas med tidiga insatser för dessa elever, med fokus på att utveckla deras praktiska färdigheter. Det är här som det EU-finansierade projektet "Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)" kommer in. I samarbete mellan lärarutbildare i Italien, Frankrike, Sverige, Kroatien, Grekland, Spanien och Tyskland, har utvecklats fem screening-test för fem olika årskurser och övergångar mellan årskurser. Dessa test är avsedda att ge lärare en överblick över elevernas matematiska färdigheter, med fokus på färdigheter som är nödvändiga för fortsatt lärande i matematik. Testerna passar att genomföra vid följande tillfällen:

1. Slutet av förskoleklass / början av årskurs 1
2. Slutet av årskurs 2 / början av årskurs 3
3. Slutet av årskurs 4 / början av årskurs 5
4. Slutet av årskurs 6 / början av årskurs 7
5. Slutet av årskurs 8 / början av årskurs 9

Vad är en screening?

En screening är en utvärdering som kan genomföras i helklass under en lektion. Screeningen resulterar i en första strukturerad översikt av vad eleverna redan klarar av och vad individuella elever behöver arbeta vidare med. Notera att screeningen inte ersätter en individuell process-orienterad kvalitativ bedömning av elevens samlade kunskaper i matematik. Screeningen utgör en utgångspunkt för att identifiera och följa upp elever som är i behov av extra stöd.

Vad får läraren ut av en screening?

- Snabb överblick: Vilka grundläggande färdigheter har eleverna och vilka färdigheter behöver individuella elever arbeta vidare med.
- Erbjudna anpassat stöd: Tidigt identifiera och stödja de elever som ännu inte har uppnått grundläggande kunskaper och färdigheter i matematik.
- Underlag för beslut om fördjupad diagnostisering: Resultaten från screening ger en första tydlig indikation om vilka elever som behöver följas upp med fortsatt diagnostisering, t.ex. genom detaljerade analyser av elevens kunskaper och färdigheter inom vissa områden eller uppföljande intervjuer.
- Stödja övergångar mellan årskurser: Uppmärksamma elevernas förkunskaper före och/eller efter övergång mellan årskurser.

Testerna är enkla att genomföra i ett vanligt klassrum, det finns tydliga instruktioner för hur de ska genomföras och de går snabbt att rätta. Läraren erbjuds både en sammanfattning av elevernas resultat på klassnivå och besked om vilka elever som behöver följas upp avseende specifikt innehåll. Med utgångspunkt i denna information kan läraren planera klassrumsundervisning med repetition, differentierad undervisning eller överbryggande uppgifter.

Denna handbok beskriver hur testen kan genomföras, vad de går ut på, hur testen är utformade, uppgiftstyper och utvalda områden för bedömning, hur resultaten kan tolkas. Dessutom redovisas hur undervisning och anpassat stöd kan utformas.

Testerna utgör verktyg för screening som är enkla att använda och har tydlig vetenskaplig grund. Resultaten ger lärare en snabb överblick över elevernas kunskapsläge och stödjer insatser för deras fortsatta lärande.

II. “Key skills” – nödvändiga för fortsatt lärande

Vi har i DiToM-projektet valt att rikta fokus mot färdigheter som är nödvändiga för fortsatt lärande i matematik. Denna ansats kräver att vi tar hänsyn till både matematikinnehållets hierarkiska struktur och dess konsekvenser för lärande i matematik. Vi följer Gagné & Briggs, som betonar att lärande av specifikt innehåll i matematik bygger på ett minimum av nödvändiga förkunskaper. Varje sådan förkunskap benämner vi ”key skill” med betoning på ”key skill for...” för att förtydliga att färdigheten är nödvändig för lärande av centralt matematiskt innehåll som eleven kommer att möta senare i skolan. Till exempel att kunna hantera prioriteringsregler i aritmetiken som nödvändig förkunskap för att förstå och hantera algebraiska uttryck. Ett exempel: att kunna beräkna $14 + 2 \cdot 3$ enligt $14 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$ utgör en key skill för att korrekt kunna tolka $14 + 2 \cdot x$.

Vi utvecklar nedan vår syn på färdigheter i relation till andra former av kunskap.

Inom projektet skiljer vi till att börja med mellan *kompetenser och färdigheter*, som dock är nära sammanflätade begrepp. Kompetenser kan tolkas som beredskap att agera på ett produktivt sätt i en matematisk situation. Att upparbeta en sådan beredskap kräver förståelse för matematiska begrepp och relationer mellan begrepp. Kompetenser aktiveras i problemsituationer genom användning av färdigheter, t.ex. genom att eleven utför en procedur eller hanterar ett delproblem. Färdigheter behövs för att aktivera kompetenser och färdigheterna behöver kopplas till kompetenser för att eleven ska uppfatta dem som meningsfulla.

Färdighet och förståelse är två av många begrepp som också relaterar till kunskap. De två begreppen hänger nära samman med varandra, till exempel behöver man ”förstå” (känna till) att 7 kan delas upp som $5 + 2$ innan man kan utföra beräkningen av $25 + 7$ enligt $25 + 5 + 2 = 30 + 2 = 32$. Att kunna utföra själva beräkningen kan tolkas som en färdighet, men den bygger alltså på förståelse för uppdelning av tal. Just denna färdighet, att skriva ett tal som en summa, krävs för att effektivt kunna generalisera sättet att beräkna och kan därför betraktas som en *key skill*. Att vi i projektet riktar fokus mot färdigheter inkluderar på detta sätt förståelse. Förståelsen skapar mening och när färdigheterna aktiveras utifrån förståelsen uppstår en meningsbärande aktivitet.

Key skills förekommer även på ett övergripande plan i matematiken, till exempel vid utvidgning av talområden. Exempelvis behöver eleverna i tidiga skolår arbeta med naturliga tal och de fyra räknesätten på ett varierat sätt, så att de vänjer sig vid uppdelning av tal, inversa operationer, positionssystemet, tallinjen, vilka utgör nödvändiga förkunskaper för att förstå och kunna utföra beräkningar med bråk och decimaltal. Med vetenskaplig terminologi kallas detta att ”överbrygga epistemologiska hinder” vid lärande av nya matematiska begrepp (Brousseau, 1997).

Begreppet key skill har använts vid utveckling av screening-testen för att

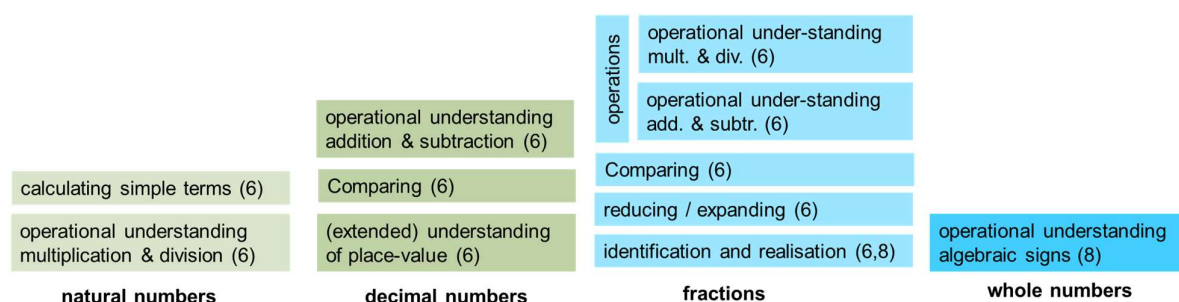
- representera nödvändiga förkunskaper för fortsatt lärande
- stödja uppgiftskonstruktion (key skills är specifikt innehållsrelaterade och synliggörs i specifika uppgifter)
- erbjuda lärare ett sätt att tänka och orientera sig om enskilda elevers lärande i matematik, för att kunna anpassa åtgärder och stöd för elevens fortsatta lärande.

Inom projektet har vi betraktat key skills som ett användbart begrepp, alltså inte enbart något som vi har lagt till för att uppnå teoretisk förankring. Begreppet är emellertid komplicerat inte minst på grund av att varje område inom matematiken har sina key skills som kanske bara framstår som kritiska i en viss fas av elevens lärande. Att en viss key skill saknas kanske inte upptäcks förrän i ett alltför sent skede. Vår ambition har varit att utforma uppgifter för att så tidigt som möjligt kunna identifiera elever som saknar vissa key skills och ge stöd till lärare att erbjuda anpassad undervisning till dessa elever.

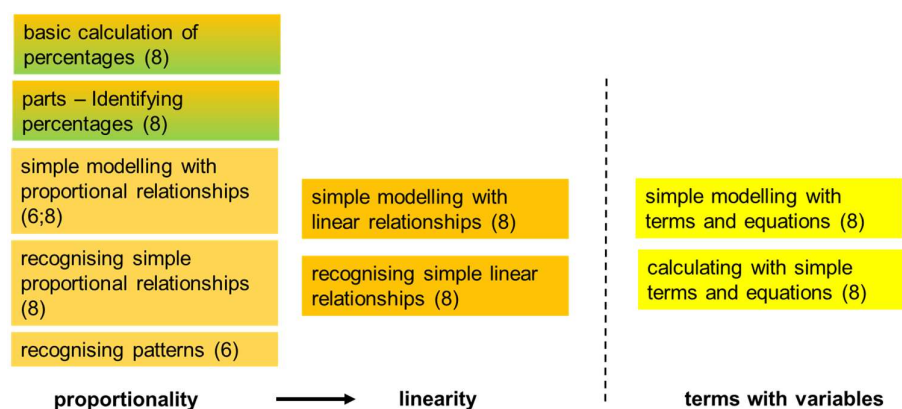
III. Struktur i testen för årskurs 6+ and 8+

Testen i DiToM är baserade på matematiskt innehåll inom aritmetik och algebra, inklusive prealgebra. Inom projektet har tagits hänsyn till den hierarkiska strukturen inom dessa områden.

Konstruktionen av uppgifter har utgått ifrån tre delområden: Tekniska beräkningar, Proportionalitet och linearitet, Algebra och prealgebra. Inom tekniska beräkningar har särskilt beaktats olika talområden (naturliga tal, bråk, decimaltal, negativa tal) och prealgebran har betraktats som en brygga mellan aritmetik och algebra på så sätt att aritmetiska färdigheter har kunnat användas för att lösa uppgifter med algebraisk karaktär. I diagrammet nedan visas hur innehållet i aritmetik i testen för årskurserna 6+ och 8+ har strukturerats. Testet för årskurs 6+ har konstruerats med utgångspunkt i testet för årskurs 4+, som till stor del handlar om naturliga tal. Om elever har stora svårigheter med aritmetiken i testet för 6+ rekommenderas att de använder testet för 4+.



Innehåll inom områdena proportionalitet, linearitet och prealgebra är både centrala innehåll i sig men utgör också en viktig grund för formell algebra (med användning av symboler). Diagrammet nedan visar hur dessa innehåll har strukturerats inom projektet.



IV. Genomförande av testen

Som stöd till lärare att genomföra testen finns både instruktioner för genomförande och förklaring av vad testen går ut på.

Förklara syftet med testet till elever och förtydliga hur testresultaten kommer att användas

- Resultat på testet hjälper läraren och eleverna att få koll på vad eleverna kan och inte kan, så att både lärare och elever vet vad de behöver arbeta vidare med. Därför är det viktigt att eleverna arbetar på egen hand, utan hjälp.
- Resultatet på testet går inte på betyget.
- Betona vikten av att försöka lösa uppgifterna. Ju mer utförligt eleverna redovisar, desto enklare blir det att identifiera vad de kan – vilka färdigheter och svårigheter de har – och att hjälpa dem ta itu med svårigheterna.

Testets struktur

- Testet är uppdelat i tre delar, med flera uppgifter i varje del.
- Uppgifterna är oberoende av varandra.

Tidsåtgång

- Test 6+, rekommenderas 45 minuter: 15 för del 1, 10 för del 2, 20 för del 3.
- Test 8+, rekommenderas 40 minuter: 15 för del 1, 10 för del 2, 15 för del 3.
- Läraren avgör hur mycket tid som ska avsättas, ovanstående är bara en rekommendation.
- Informera innan testet börjar hur mycket tid som avsätts till de olika delarna.
- Informera om att läraren kommer att avbryta när tiden har gått ut.

Typer av uppgifter

- Uppgifter där eleven skriver ett svar och har utrymme att skriva sin lösning. Endast svaret bedöms vid rättning, men lösningen kan användas vid uppföljning av elevens arbete med uppgiften.
- Flervalsuppgifter: eleven väljer ett (eller flera) svar bland givna svarsalternativ. Informera eleverna att om de vill ändra sitt svar så kan de skriva "Nej" vid det svar de vill ta bort och "Ja" vid det nya svaret.

Genomförande av testet

- Miniräknare är inte tillåtna.
- Eleven kan använda ledigt utrymme på uppgiftsbladen till att anteckna och skriva lösningar.
- Eleverna kan arbeta igenom varje del av testet i sin egen takt. Om en elev har avslutat en av delarna ska eleven vänta på lärarens instruktioner innan eleven fortsätter med nästa del.

Lärarens roll under testet

- Läraren kan svara på praktiska frågor om testet och dess genomförande men ska inte ge tips eller hjälpa eleverna att lösa uppgifterna. I annat fall uppnås inte syftet med testet.

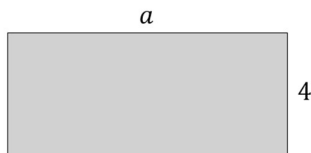
V. Presentation av uppgifterna

Uppgift 1.1: Omkretsen av en rektangel

Uppgift 1.1

Omkretsen av en månghörning är summan av sidornas längder.

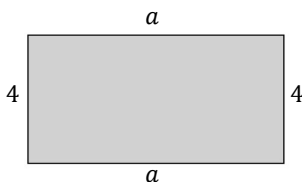
Bestäm en formel för omkretsen av rektangeln.



Omkretsen = 2a + 8

Lösning

Längderna av alla fyra sidorna måste adderas.



Det finns flera möjliga (ekvivalenta) svar. Till exempel:

$$a + 4 + a + 4 \quad (\text{eller } a + a + 4 + 4 \text{ eller termerna i godtycklig ordning})$$

$$2a + 8 \quad (\text{eller } 2(a + 4) \text{ eller } (a + 4) \cdot 2 \text{ eller } 2 \cdot a + 2 \cdot 4)$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att konstruera ett symboliskt uttryck för omkretsen av en rektangel vars sidor är givna i algebraisk form.

Att konstruera en algebraisk formel utifrån en (för årskursen) enkelt formulerad problemsituation betraktas inom DiToM som en *key skill* för fortsatt arbete med algebraiska uttryck.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Uppgiften stödjer utveckling av algebraiskt tänkande genom att utmana elever att representera geometriska kvantiteter med variabler, vilket är en *key skill* för att förstå funktionssamband och kunna lösa ekvationer. Uppgiften stärker elevers förståelse av variabler som generaliserade tal.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

En vanlig missuppfattning är att elever försöker beräkna värdet av den okända sidan. De vill svara med ett tal och har ännu inte vant sig vid att svara med ett algebraiskt uttryck dvs de försöker beräkna omkretsen snarare än att

representera omkretsen algebraiskt. Detta kan leda till att eleven visuellt uppskattar variabelns värde och sedan räknar ut omkretsen och svarar med ett tal. Tillkommer att det finns elever som förväxlar omkrets med area och felaktigt svarar $4 \cdot a$ eller $a \cdot 4$. Sådana svar kan bero på att eleven är osäker på vad omkrets betyder men kan också bero på att eleven inte har läst den givna informationen tillräckligt noggrant.

Sammantaget tyder dessa missuppfattningar och felaktiga svar på svagheter avseende att:

- Förstå variablers olika roller i matematiken
- Skilja mellan olika geometriska begrepp
- Noggrant tolka matematiska instruktioner

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever bör arbeta strukturerat med både uppgifter där de ska ta fram formler med en variabel och uppgifter där de ska beräkna värdet av ett uttryck med en variabel, inte minst för att betona att det handlar om olika typer av uppgifter som kräver olika typer av svar.

Begreppet omkrets kan visualiseras med urklippta månghörningar med angivna sidlängder, så att eleven kan bestämma eller beräkna omkretsen genom att "gå" runt figuren och addera alla sidlängderna. Detta hjälper också eleven inse att beräkning av omkretsen av en rektangel kräver att en sidlängd ska adderas två gånger och nästa sidas längd också ska adderas två gånger. Den elev som har insett detta bör uppmuntras att förklara för läraren och andra elever.

Det kan också vara gynnsamt att arbeta med uppgifter i flera steg, där algebraiska uttryck kopplas samman med beräkningar. Exempelvis 1) bestäm omkretsen av rektangeln i figuren; 2) beräkna omkretsen då $a = 5$ cm. Svar $2a + 8$ respektive 18 cm. På detta sätt tränas eleven att läsa uppgiftens instruktioner och kan se att ytterligare information behövs för att kunna beräkna omkretsen. Utan denna information är det algebraiska uttrycket bästa möjliga svar.

Uppgift 1.2: Översätta text till uttryck med symboler

Uppgift 1.2

Skriv varje mening som ett uttryck.

a) Summan av 3 och x Svar: $3 + x$

b) 3 mindre än x Svar: $x - 3$

c) Dubbelt så mycket som a Svar: $2 \cdot a$

Lösning

a) Summan av 3 och x kan skrivas antingen $3 + x$ eller $x + 3$.

b) 3 mindre än x kan skrivas $x - 3$ (eller $x + (-3)$ eller $-3 + x$).

c) Dubbelt så mycket som a kan skrivas $2 \cdot a$ eller $2a$ eller $a + a$.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att tolka och beskriva skriftlig information med algebraisk notation. Varje deluppgift beskriver ett matematiskt uttryck som eleven ska omvandla till algebraisk form. Denna typ av *key skill* behövs när eleven ska hantera och lösa problemsituationer beskrivna i text.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Förmågan att omvandla textbeskrivningar till algebraiska representation är nödvändig för utveckling av matematisk litteracitet, särskilt avseende problemlösning. Förmågan att växla mellan olika representationsformer är en *key skill* för att eleven ska kunna uppnå en sammanhangsbunden matematisk förståelse. Den är också en *key skill* för problemlösning och modellering.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande misstag är att felaktigt tolka "3 mindre än x " som "3 minus x ", vilket leder till det felaktiga svaret skriva $3 - x$. I detta fall har eleven prioriterat ordföljden framför det matematiska innehållet.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårt att tolka "3 mindre än x " kan få i uppgift att tolka motsvarande med tal, till exempel "3 mindre än 8". Eleven kan först lista ut svaret 5 och sedan utmanas att skriva lösningen med symboler som $8 - 3 = 5$. Om eleven fortfarande har svårt att tolka den symboliska strukturen kan eleven få fler uppgifter av samma typ: "3 mindre än 17", "3 mindre än 29", tills eleven inser att svaret uppnås om man tar det andra talet minus 3.

Motsvarande gäller de andra deluppgifterna. Alla elever klarar av "dubbelt så mycket som 5" men kan ha svårare att formulera "dubbelt så mycket som a ". Lärarens fråga "hur räknar du ut dubbelt så mycket som 5?" kan leda till att eleven svarar " $5 + 5 = 10$ " och då är steget kortare till att kunna uttrycka svaret på frågan hur räknar du ut dubbelt så mycket som x ?" på formen " $x + x$ " eller " $2 \cdot x$ ".

Uppgift 1.3: Översätta beskrivning i flera steg till ett uttryck med variabel

Uppgift 1.3

Laura har 10 stycken fler böcker än Jenny.
Kevin har dubbelt så många böcker som Laura.

Hur många böcker har Kevin om Jenny har n stycken böcker? Sätt kryss vid rätt svar.

- ☐ $10 + n$
- ☐ $10 + n + 2$
- ☒ $2 \cdot (n + 10)$
- ☐ $2 \cdot n + 10$

Några lösningar

En första lösning, för en elev som är van vid att arbeta med variabler:

Steg 1 Jenny har n böcker

Steg 2 Laura har 10 fler böcker än Jenny, så Laura har $n + 10$ böcker

Steg 3 Kevin har dubbelt så många böcker som Laura, så Kevin har $2 \cdot (n + 10)$ böcker.

En andra lösning, baserad på informell notation:

Laura = Jenny + 10

Kevin = $2 \cdot$ Laura = $2 \cdot (\text{Jenny} + 10) = 2 \cdot (n + 10)$

En tredje lösning, baserad på att testa med tal och sedan generalisera.

Anta att Jenny har 17 böcker. Då har Laura $17 + 10 = 27$ böcker och Kevin har $2 \cdot 27 = 54$ böcker.

Vi ska nu försöka byta ut 17 mot n . Talet 17 göms i 27 och uttrycket $2 \cdot 27 = 2 \cdot (17 + 10)$.

Generalisera genom att byta ut 17 mot n , vilket ger svaret $2 \cdot (n + 10)$.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att tolka skriftlig information given i två steg och omvandla denna information till ett algebraiskt uttryck. Denna förmåga är en *key skill* för problemlösning och modellering. Att hantera information i flera steg utmanar också elevens förmåga att sortera informationen och strukturera sin lösning i en tydlig ordning som svarar mot strukturen i det algebraiska uttrycket.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Denna uppgift utmanar eleven att identifiera två relationella samband och representera (sammanfatta) deras resultat (effekt) med ett algebraiskt uttryck. Förmågan att konstruera algebraiska uttryck utifrån givna relationella samband är en *key skill* inom området algebra, speciellt inom problemlösning och modellering.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

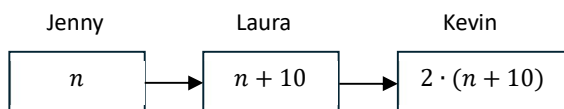
Ett vanligt förekommande felaktigt svar är $2n + 10$. Detta svar kan bero på att eleven har hanterat informationen på ett alltför ytligt sätt, genom att enbart notera "10 fler" och "dubbelt så många" utan att ta hänsyn till ordningen mellan operationerna. Det felaktiga svaret $2n + 10$ kan också bero på att eleven är ovan vid att använda parenteser. Det kan vara värt att be eleven motivera sitt svar för att se vilken typ av fel det handlar om.

Informationen "dubbelt så många" kan tolkas "två gånger fler" (vilket är korrekt) och sedan mer kortfattat "två fler", vilket kan leda till tankar om addition och det felaktiga svaret $10 + n + 2$.

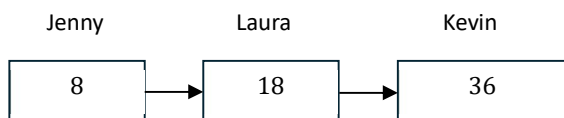
Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårt att strukturera sina lösningar när de ska tolka information i flera steg kan börja med frågor där de bara behöver tolka information i ett steg. I detta fall: "Hur många böcker har Laura om Jenny har n böcker?" och "Hur många böcker har Kevin om Laura har m stycken böcker?". Om eleven inte förstår frågan eller inte kan eller vill svara av annat skäl kan variabeln i frågan bytas ut mot ett tal, exempelvis 7. Då går det också att rita bilder som beskriver problemsituationen.

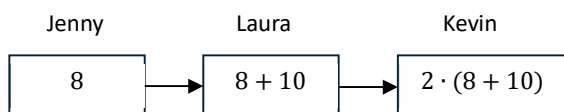
Den givna informationen kan också visualiseras i ett relations-/funktionsdiagram:



Ett sådant diagram kan även användas för att testa med tal:



Läraren kan stimulera elevens algebraiska (strukturella) tänkande genom att fråga "Hur gjorde du när du räknade ut 18?" När eleven svarar "Jag adderade bara 10" kan läraren fortsätta "Bra. Kan du skriva bara det, utan att räkna ut svaret?". När eleven har skrivit enligt nedan är steget inte långt till det algebraiska uttrycket.



Uppgift 1.4: Översätta beskrivning av en vardagsnära problemsituation till ett uttryck med variabel

Uppgift 1.4

13 elever går på bio.

Varje elev köper en biljett för x euro och popcorn för 3,20 euro.

Hur mycket måste de betala tillsammans?

☐ $13 + (x + 3,20)$

☐ $x \cdot (13 + 3,20)$

☐ $13 \cdot x + 3,20$

☒ $13 \cdot (x + 3,20)$

Några lösningar

En första lösning: Varje elev betalar $x + 3,20$. 13 elever betalar 13 gånger så mycket som en elev betalar.

Svaret är därmed $13 \cdot (x + 3,20)$.

En andra lösning, baserad på att testa med ett tal och generalisera:

Anta att en biljett kostar **5** euro.

Varje elev betalar en biljett för **5** euro och popcorn för 3,20 euro, så varje elev betalar 8,20 euro.

13 elever betalar 13 gånger vad en elev betalar. Tillsammans betalar de $13 \cdot 8,20$ euro. Den produkten behöver inte beräknas, det räcker att analysera vad som händer med det valda talet **5**:

$$13 \cdot 8,20 = 13 \cdot (5 + 3,20) = 13 \cdot (x + 3,20)$$

Lösningen kan utföras parallellt med tal och variabel. Då blir det enklare att jämföra och imitera ("följ talet"):

Med tal

$$5 + 3,20$$

$$13 \cdot (5 + 3,20)$$

Med variabel

$$x + 3,20$$

$$13 \cdot (x + 3,20)$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att översätta en skriftlig beskrivning av en vardagsnära problemsituation till ett strukturerat algebraiskt uttryck, vilket är en *key skill* i problemlösning med algebraiska metoder. Eleven kan komma fram till antingen $13 \cdot (x + 3,20)$ eller $13 \cdot x + 13 \cdot 3,20$, som båda är korrekta svar. Det sistnämnda svaret finns inte bland svarsalternativen, så eleven behöver kunna konstatera att det svaret är ekvivalent med det förstnämnda svaret. Båda svaren bygger på konstaterandet att 13 elever betalar 13 gånger så mycket som en elev. Redan i det läget kan eleven se att två av svarsalternativen (det första och det andra) inte kan komma i fråga. Enligt det tredje svarsalternativet betalas endast för en popcorn, så det kan heller inte vara korrekt. Återstår då endast det fjärde svarsalternativet, där var och en av de 13 eleverna får en biljett och en popcorn.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att representera skriftligt beskrivna problemsituationer med algebraiska uttryck är en *key skill* i problemlösning och modellering. Om eleven väljer att testa svarsalternativen med uteslutningsmetoden så visar eleven förmåga att tolka betydelsen av ett givet algebraiskt uttryck i en problemsituation, vilket även det är en *key skill* i problemlösning (testa att ett redan konstruerat uttryck är korrekt). I båda fallen bidrar uppgiften till att stärka elevens algebraiska tänkande och strukturella medvetenhet om funktionssamband.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande felaktigt svar är $13 \cdot x + 3,20$. Detta kan bero på att eleven inte är medveten om behovet av att även multiplicera 3,20 med 13, men det kan också bero på att eleven inte skriver ut parenteserna eftersom eleven "ändå vet hur jag räknar ut det". I det senare fallet är det enklare att motivera eleven att parenteser behöver användas, för att förtydliga uttryckets algebraiska struktur.

Ett mer allvarligt fel är om eleven väljer det svarsalternativ som ser enklast ut, alltså enbart utifrån utseende utan att ta hänsyn till den matematiska strukturen i problemsituationen.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårt för att hantera variabler kan uppmuntras att ersätta variabeln med ett tal, som i det andra lösningsförslaget. Elever som inte kan skilja på additiva och multiplikativa strukturer kan träna på uppgifter där de bara behöver hantera en av dessa i taget, exempelvis "om du köper två saker, en som kostar x och en som kostar y , hur mycket kostar de två sakerna tillsammans?" respektive "om tre elever vill köpa glassar som kostar x kr per styck, hur mycket måste de betala tillsammans?". Visualiseringar rekommenderas, både bilder och diagram, för att förtydliga problemsituationer och de olika typer som leder till addition respektive multiplikation.

Uppgift 1.5: Översätta en matematisk beskrivning i flera steg till ett uttryck med variabel

Uppgift 1.5

En beräkning genomförs i flera steg:

- Välj ett tal x
- Addera 4 till x
- Multiplicera resultatet med 8

Vilken formel beskriver resultatet av beräkningen?

- ☐ $8 \cdot x + 4$
- ☐ $x + 4 \cdot 8$
- ☒ $(x + 4) \cdot 8$
- ☐ $(8 \cdot 4) + x$

Några lösningar

En första lösning, i två steg:

Steg 1 "Addera 4 till x " ger resultatet $x + 4$

Steg 2 "Multiplicera resultatet med 8" ger svaret $8 \cdot (x + 4) = (x + 4) \cdot 8$.

En andra lösning, baserad på att testa med ett tal och generalisera: Anta att $x = 17$.

Steg 1 Addera 4 till 17 ger resultatet $17 + 4 = 21$

Steg 2 Multiplicera resultatet 21 med 8 ger svaret $21 \cdot 8 = 168$.

Steg 3 Analysera vad som händer med talet 17:

$$21 \cdot 8 = (17 + 4) \cdot 8 = (x + 4) \cdot 8$$

Alternativt kan vi parallellt ta fram den aritmetiska och den algebraiska lösningen, genom att följa vad som händer med talet 17 när vi löser uppgiften:

Med tal	Med variabel
17	x
$17 + 4$	$x + 4$
$8 \cdot (17 + 4)$	$8 \cdot (x + 4)$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att symboliskt representera en beräkning som beskrivs i flera steg. Att översätta skriftlig information till en formel är en *key skill* i problemlösning och för att förstå algebraiska uttryck.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att förstå och kunna representera den hierarkiska strukturen i matematiska operationer är en *key skill* inom algebra. I denna uppgift testas specifikt prioriteringsregeln "multiplikation prioriteras före addition" vilket innebär att parentes måste användas för att representera resultatet. Enligt DiToM-ramverket är detta en *key skill* för matematisk modellering och problemlösning, särskilt den del av modellering och problemlösning som kräver att eleven formulerar och hanterar algebraiska uttryck. I sådant matematiskt arbete måste eleven ha god kännedom om och med säkerhet kunna använda algebrans räkneregler.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande fel är att utelämna parentesen och svara antingen $8 \cdot x + 4$ eller $x + 4 \cdot 8$. Det senare felaktiga svaret $x + 4 \cdot 8$ kan bero på linjärt läsande och att eleven ännu inte har uppfattat skillnader i språkliga och matematiska strukturer.

De felaktiga svaren $8 \cdot x + 4$ och $x + 4 \cdot 8$ behöver dock inte bero på felaktig tolkning av uttryckets matematiska struktur. Det kan i stället bero på att eleven ännu inte har uppfattat att det ibland är nödvändigt att använda parenteser. Detta kan läraren enkelt diagnostisera genom att be eleven beräkna värdet av $8 \cdot x + 4$ för något konkret x -värde, exempelvis 5. Om eleven svarar 72 kan det räcka att läraren ber eleven skriva en parentes kring $x + 4$ för att på så sätt redovisa hur eleven har tänkt. Om eleven däremot svarar 44 kan läraren be eleven att jämföra med de givna instruktionerna, där 4 adderas till 5 vilket ger resultatet 9 som sedan multipliceras med 8. Därmed inser eleven att något inte stämmer och kan tillsammans med läraren resonera fram hur uppgiften ska kunna lösas.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever behöver arbeta med uppgifter där liknande uttryck behandlas med och utan parenteser. Först inom aritmetiken, exempelvis a) Beräkna $8 \cdot 5 + 4$ och b) Beräkna $8 \cdot (5 + 4)$. Eleverna ser då att parentesen har betydelse, eftersom de får två olika svar (om de har uppfattat prioriteringsregeln att uttrycket i parentesen ska beräknas först). Nästa par av uppgifter c) Beräkna $5 + 4 \cdot 8$ och d) Beräkna $(5 + 4) \cdot 8$ kan för eleven leda till samma svar (72, vilket är korrekt för d men inte för c) så att eleven drar den felaktiga slutsatsen att parentesen inte behövdes. Om detta händer behöver läraren (i årskurs 8) påminna om de prioriteringsregler eleven har arbetat med i tidigare skolår, specifikt att multiplikation ska beräknas före addition (om det inte finns parentes i uttrycket, då ska den beräknas allra först). (Att kunna skilja på uppgifterna c och d kan betraktas som en *key skill* redan i årskurs 6.)

Först när eleven har befäst prioriteringsreglerna inom aritmetiken bör eleven träna på motsvarande inom algebra. Särskilt rekommenderas den sista lösningen på föregående sida, där aritmetisk lösning och algebraisk lösning tas fram sida vid sida, vilket stärker förståelsen för uttryckets symboliska struktur.

När elever känner sig redo att enbart konstruera algebraiska uttryck bör de uppmanas att kontrollera sina svar genom insättning av något värde (eller några värden) i det egna uttrycket och jämföra med vilket värde de får när de följer informationen i uppgiften.

Task 1.6: Bestämna värdet av ett uttryck med variabel

Uppgift 1.6

Vad är värdet av $1 + 3x$ för $x = 8$?

- ☒ 25
- ☐ 32
- ☐ 39
- ☐ 48

Lösning

Till att börja med konstateras att värdet av $3x = 3 \cdot x$ måste beräknas innan talet 1 adderas.

Lösning i ett steg: Sätt $x = 8$ och beräkna

$$1 + 3x = 1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$$

Lösning i två steg: Sätt $x = 8$. Beräkna först $3x = 3 \cdot 8 = 24$. Beräkna sedan $1 + 24 = 25$.

För att få en bättre överblick över beräkningen i två steg kan vi redovisa den på olika rader:

$$x = 8$$

$$3x = 3 \cdot x = 3 \cdot 8 = 24$$

$$1 + 3x = 1 + 24 = 25$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att beräkna värdet av ett algebraiskt uttryck genom att ersätta variabeln med ett tal och utföra beräkningar enligt prioriteringsreglerna (multiplikation före addition). Att kunna hantera prioriteringsreglerna vid beräkningar är en *key skill* för att förstå och kunna hantera algebraiska uttryck som innehåller flera operationer.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att kunna beräkna värden av algebraiska uttryck genom att ersätta variabler med tal är en grundläggande procedur som används för att analysera funktioner, hantera tabeller och för att förstå algebraiska uttryck. Denna typ av beräkning är en *key skill* som används vid undersökande matematiskt arbete och problemlösning.

Inom DiToM-ramverket betonas färdighetens betydelse för att utveckla procedurell säkerhet, förståelse för variabler och säkerhet att hantera variabler. Genom beräkning av algebraiska uttrycks värden utvecklar eleven en sammanhangsbunden förståelse för matematiska strukturer, speciellt sambandet mellan symboler och operationer och deras betydelse både inom matematiken och i vardagsnära situationer.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande fel är att inte ta hänsyn till prioriteringsregeln att multiplikation ska beräknas före addition, utan tolka beräkningen linjärt genom att allra först beräkna $1 + 3 = 4$ vilket kan leda till de felaktiga

svaren 32 eller 48 (som finns bland svarsalternativen). Även om eleven hanterar prioriteringsregeln korrekt kan insättning av $x = 8$ i $3x$ kan leda till felaktiga tolkningar $3 + 8$ eller 38.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Till att börja med bör förtydligas att $3x$ betyder $3 \cdot x$, så att insättning av $x = 8$ i $3x$ ger svaret $3 \cdot 8 = 24$ (inte $3 + 8 = 11$, inte heller 38). Multiplikationen bör även uttryckas verbalt som "tre gånger x " eller "tre multiplicerat med x ", inte enbart "tre x ". Det sist nämnda "tre x " har ingen tydlig matematisk innebörd, det är främst en språklig beskrivning som inte ger eleven tillräcklig information om vad som avses.

Alla elever behöver träna på att beräkna värden av uttryck med endast en operation, i detta fall addition eller multiplikation, innan de börjar arbeta med uppgifter där de måste beräkna värden av uttryck som innehåller flera operationer och där det behöver tas hänsyn till prioriteringsregler. Exempelvis uttryck som $3x$, $8x$ och $x + 5$, $7 + x$. Uttrycken $3x$ och $8x$ kan gärna skrivas $3 \cdot x$ och $8 \cdot x$, för att förtydliga operationen multiplikation.

Vid övergång till uttryck med flera operationer kan de gärna förtydligas med parenteser, exempelvis $1 + 3x = 1 + (3 \cdot x)$, för att synliggöra uttryckets matematiska struktur. ("Parenteser först" brukar vara enklare för elever att acceptera än "multiplikation före addition".)

En annan typ av uppgifter är att jämföra värden av snarlika uttryck, exempelvis $1 + 3x$ och $(1 + 3)x$ som kan förtydligas $1 + (3 \cdot x)$ och $(1 + 3) \cdot x$. Eleven kanske invänder mot att behöva skriva $3x + 1 = (3 \cdot x) + 1$. En sådan invändning kan – i bästa fall – vara ett tecken på att eleven börjar förstå att parenteser inte alltid behöver användas. Läraren bör dock, för säkerhets skull, testa eleven även med $1 + 3x$ så att eleven i det fallet inte tolkar uttrycket som $(1 + 3) \cdot x$. Eleven behöver lära sig när parenteser behöver användas.

Vidare ska inte elevernas metakognitiva förmågor underskattas. Många elever behöver få veta att prioriteringsreglerna är konventioner, det vill säga sådant som matematiker (över hela världen) har kommit överens om. Som en grund för all matematik (åtminstone aritmetik och algebra). Prioriteringsreglerna går därför inte att "förstå" på liknande sätt som man kan förstå att $1 + 1 = 2$ (exempelvis, genom att räkna antal) utan prioriteringsreglerna är något man måste vänja sig vid för att kunna räkna på samma sätt som andra gör och så att olika personer kan förstå varandra när de skriver matematiska uttryck.

Uppgift 1.7: Identifiera lösningen till en linjär ekvation

Uppgift 1.7

Likheten $7x + 3 = 80$ stämmer för

- ☐ $x = 7$
- ☐ $x = 8$
- ☐ $x = 10$
- ☒ $x = 11$

Några lösningar

En första lösning: Prova alla fyra talen i ekvationen, genom att sätta in i vänster led $7x + 3$.

x	7	8	10	11
$7x + 3$	$49 + 3 = 52$	$56 + 3 = 59$	$70 + 3 = 73$	$77 + 3 = 80$

Stämmer med talet 80 i höger led

En andra lösning: Prova med något av de fyra talen, exempelvis $x = 10$.

$$7x + 3 = 7 \cdot 10 + 3 = 70 + 3 = 73 \text{ (stämmer inte med 80 i höger led)}$$

Svaret 73 är mindre än 80 så vi behöver ett tal större än 10. Det enda talet (av de fyra givna talen) som är större än 10 är $x = 11$. Insättning i vänster led ger

$$7x + 3 = 7 \cdot 11 + 3 = 77 + 3 = 80 \text{ (stämmer med 80 i höger led)}$$

Därmed kan vi dra slutsatsen att lösningen är $x = 11$.

En tredje lösning: Med algebraiska metoder (kort version).

$$7x + 3 = 80 \quad (\text{subtrahera med 3})$$

$$7x = 77 \quad (\text{dividera med 7})$$

$$x = \frac{77}{7} = 11$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar om eleven förstår begreppet linjär ekvation som en ekivalens mellan vänster led och höger led, samt om eleven kan pröva om ett föreslaget värde är lösning till en linjär ekvation genom insättning av värdet.

Att förstå att en föreslagen lösning till en ekvation kan provas genom insättning är en *key skill* inom algebra och problemlösning. För att lösa uppgiften räcker det inte enbart att kunna beräkna värdet av ett uttryck, eleven behöver också kunna dra slutsatser utifrån det beräknade värdet.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att förstå begreppet ekvation som ekivalens (mellan vänster led och höger led) och att kunna verifiera lösningar genom insättning är en *key skill* inom området ekvationer, som har en central roll inom området algebra. Inom DiToM-ramverket kopplas denna *key skill* till symbolisk tolkning och algebraiska resonemang. Den specifika

färdigheten att pröva föreslagna lösningar genom insättning stödjer utveckling av algebraiskt tänkande, talförståelse och förståelse för inversa operationer.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever kan ha problem med insättning av värden i uttrycket $7x + 3$. Det finns även risk för att korrekt uppställda uttryck beräknas på felaktigt sätt. Eleverna kan även ha svårt att dra slutsatser om de sätter in värden i hela ekvationen, exempelvis $x = 7$ som insatt i $7x + 3 = 80$ ger den falska ekvationen $52 = 80$.

Ett annat vanligt förekommande fel är att välja det tal som ger en enkel beräkning och dessutom resulterar i ett svar som är någorlunda nära talet 80. I detta fall är $x = 10$ ett sådant "naturligt" val, som leder till den enkla beräkningen $7 \cdot 10 + 3 = 73$ vilket eleven kan tycka är tillräckligt nära 80.

Elevers felaktiga svar kan bero på att de inte ännu har vant sig vid att tolka ekvation som ekivalens, att de inte kan hantera prövning av föreslagna lösningar genom insättning eller att de inte har uppfattat kravet på exakt likhet mellan värdena i vänster och höger led för en lösning till en ekvation.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever behöver i tidiga skolår möta problemsituationer som har algebraisk struktur, exempelvis "Kalle köper 7 glassar och en chokladbit. Chokladbiten kostar 3 kr. Allt tillsammans kostar 80 kr. Hur mycket kostar en glass?" En sådan problemsituation, som kan användas även i årskurs 8, kan representeras (visualiseras) med laborativt material som stödjer elevens tänkande. Läraren kan föreslå eleven att pröva olika priser. Prövningen kan redovisas i en tabell. Konkretiseringen med priser bidrar till att skapa mening i algebraiskt formulerade ekvationer. När eleven har löst problemet med aritmetiska metoder kan läraren teckna den ekvation $7x + 3 = 80$ som eleven har löst och säga "Nu har du löst den här ekvationen", samt följa upp med en ny uppgift "Kan du lösa ekvationen $9x + 5 = 50$ på liknande sätt?"

Uppgift 2.1: Proportionellt resonemang i en vardagsnära problemsituation

Uppgift 2.1

2 kg potatis kostar 2,40 euro. Hur mycket kostar 5 kg potatis?

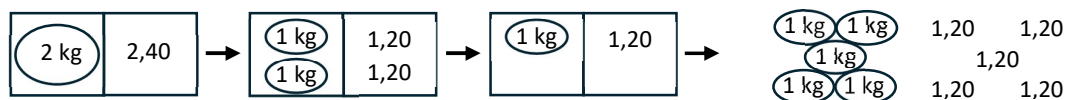
Svar: 6 euro

Lösning

En lösning, med kreativt resonemang: 2 kg kostar 2,40 euro, så 4 kg kostar 4,80 euro. Ytterligare 1 kg kostar 1,20 euro, så 5 kg kostar $4,80 + 1,20 = 6$ euro.

En andra lösning, genom att räkna ner till enheten 1 kg: 2 kg kostar 2,40 euro, så 1 kg kostar 1,20 euro. 5 kg kostar 5 gånger så mycket: $5 \cdot 1,20 = 6$ euro.

Båda lösningarna kan visualiseras med bilder. Den andra lösningen:



Med semi-formell symbolisk notation:

2 kg : 2,40 euro	(dividera med 2)
1 kg : 1,20 euro	(multiplicera med 5)
5 kg : 6 euro	

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att tillämpa proportionella resonemang genom att samtidigt multiplicera eller dividera två givna storheter med samma tal. Detta handlar inte enbart om att kunna multiplicera och dividera utan kräver att eleven begreppsligt kan förstå och hantera storheter som förändras i proportion till varandra.

Varför är den här färdigheten en key skill?

Proportionella resonemang är jämsides med aritmetiska färdigheter det viktigaste området inom skolans matematik. Anledningen till detta är att proportionella resonemang är en *key skill* för bland annat problemlösning, modellering, geometri (särskilt skala), procenträkning, funktioner (särskilt linjära funktioner). Samt som i denna uppgift en förutsättning för att förstå och kunna hantera samband mellan storheter, som ofta är proportionella. Detta gäller särskilt vardagsnära situationer, alltså sådant som många elever kommer i kontakt med i vardagslivet.

Proportionella resonemang stärker också elevens taluppfattning och förmåga att flexibelt resonera om storheter som är proportionella mot varandra.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande fel är att tillämpa additiva resonemang med sammanblandning av storheter, exempelvis "2 kg $\rightarrow$ 2,40 euro, så 5 kg $\rightarrow$ 2,40 euro + 5 euro" vilket indikerar att eleven inte har lyckats tolka uppgiftens begreppsliga struktur. Eleven kanske delvis klarar av detta, exempelvis "2 kg $\rightarrow$ 2,40 euro, så 4 kg $\rightarrow$ 4,80 euro" men klarar inte av att hantera nästa steg det vill säga skalningen till 5 kg. I ett sådant läge kanske eleven

gissar exempelvis 5,50 euro eftersom 5,50 är större än 4,80. Detta tyder ändå på att eleven ändå har viss men inte tillräcklig (ur ett matematiskt perspektiv) känsla för proportionella samband.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Proportionella samband kan modelleras med laborativa material. Ett nästa steg mot en formell matematisk behandling kan vara att rita bilder och tabeller som visualiserar och rimliggör samband mellan storheterna.

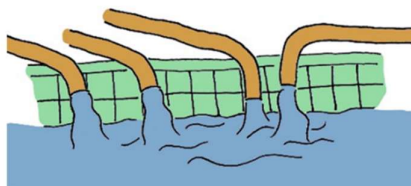
Läraren kan leda elevens tänkande i riktning mot proportionella resonemang genom att fråga "Hur mycket kostar 1 kg?" eller "Vad händer om du köper dubbelt så mycket?".

Genom att uppmuntra eleven att använda olika strategier stärks elevens förmåga att flexibelt lösa problem. Exempelvis att lösa flera uppgifter med två metoder, som i lösningsförslagen, för att inse att den ena metoden passar bäst för en viss typ av uppgifter och den andra metoden passar bättre för andra typer. Samt att metoden att skala ner till enheten alltid fungerar, om man inte lyckas hitta en genväg genom kreativ skalning.

Uppgift 2.2: Problemlösning med invers proportionalitet

Uppgift 2.2

Om en pool fylls på 6 timmar med fyra likadana kranar, hur många kranar med samma kapacitet krävs det för att fylla poolen på 2 timmar?



Svar: 12 kranar

Några lösningar

En lösning, genom upprepade proportionella resonemang:

Vi utgår ifrån att 4 kranar fyller 1 pool på 6 timmar.

Dividera med 4. Slutsats: 1 kran fyller $\frac{1}{4}$ pool på 6 timmar.

Dividera med 3. Slutsats: 1 kran fyller $\frac{1}{12}$ pool på 2 timmar.

Multiplitera med 12. Slutsats: 12 kranar för att fylla 1 pool på 2 timmar.

Resonemanget kan även redovisas på följande sätt:

4 kranar fyller 1 pool på 6 timmar

1 kran fyller $\frac{1}{4}$ pool på 6 timmar

1 kran fyller $\frac{1}{12}$ pool på 2 timmar

12 kranar fyller 1 pool på 2 timmar

En liknande lösning, baserad på en formel: Den påfyllda volymen vatten är proportionell mot produkten (antal kranar) $\cdot$ (tid). Om vi bortser från enheterna kan vi skriva

$$(4 \text{ kranar}) \cdot (6 \text{ timmar}) = 1 \text{ pool}$$

$$(1 \text{ kran}) \cdot (6 \text{ timmar}) = \frac{1}{4} \text{ pool}$$

$$(1 \text{ kran}) \cdot (2 \text{ timmar}) = \frac{1}{12} \text{ pool}$$

$$(12 \text{ kranar}) \cdot (2 \text{ timmar}) = 1 \text{ pool}$$

Det kan räcka med en enklare redovisning (kombinerat med eftertanke) för att upptäcka sambandet mellan variablerna:

Antal kranar	Tid (timmar)
4	6
?	2

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar om eleven kan identifiera invers proportionalitet mellan variabler, alltså att om den ena variabeln ökar med en faktor så minskar den andra variabeln med samma faktor. Eftersom många samband mellan variabler (i skolan och i läromedel) handlar om direkt proportionalitet krävs att eleven är uppmärksam på relationen mellan variablerna och noggrant analyserar vad som händer med den andra variabeln när den ena ändrar värde.

Förmågan att identifiera och analysera samband mellan två variabler är en *key skill* för att utveckla relationellt tänkande. Just denna uppgift kräver varken formler eller algebraiska metoder utan kan hanteras med aritmetiska resonemang och kan därför betraktas som prealgebra.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Förmågan att förstå och hantera relationer mellan variabler är en *key skill* för att utveckla flexibelt multiplikativt tänkande vilket behövs i problemlösning samt inom algebra och funktioner. Till skillnad mot direkta proportioner kräver inversa proportioner en högre grad av strukturell medvetenhet. Att hantera och kunna skilja mellan dessa olika typer av proportionalitet utvecklar elevens kvantitativa resonemang och färdigheter i att modellera vardagsnära problemsituationer med matematiska verktyg.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Samband mellan variabler tolkas alltför ofta med direkt proportionalitet. I detta fall kan "6 timmar, 4 kranar" leda till den felaktiga slutsatsen "2 timmar, 4/3 kranar". Om eleven relaterar till problemsituationen kan den slutsatsen förkastas eftersom färre kranar medför längre tid (att fylla poolen). Att det felaktiga svaret 4/3 är ett bråk kan eleven förklara med att "2 kranar gör att poolen fylls på kortare tid än 2 timmar".

Det finns risk för att eleven inte förstår eller inte alls ägnar tid åt att försöka förstå problemsituationen, utan lyfter ut talen 2, 4, 6 och försöker ta fram ett fjärde tal som passar in. Exempelvis 8, som ger följden 2, 4, 6, 8.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Undervisning om samband mellan variabler bör utgå ifrån användning av laborativt material, så att eleverna kan bekräfta (eller förkasta) hypoteser om typ av samband genom att pröva sig fram. Även bilder och diagram kan hjälpa eleven komma igång med relationellt tänkande. Exempelvis "En rektangel har arean 24 kvadratcentimeter. Vilka möjliga sidlängder kan rektangeln? Vilket samband finns mellan sidlängderna? Vad händer om den ena sidans längd ökar och arean är densamma?". Genom att anteckna möjliga värden i en tabell kan eleven analysera sambandet mellan variablerna som ett samband mellan värden. Om eleven formulerar en hypotes "Den andra sidan måste minska lika mycket som den andra ökar" inses snabbt att "minska lika mycket" inte kan vara en additiv regel utan måste vara multiplikativ dvs den andra sidan måste "minska med samma faktor som den andra ökar".

Det är utmanande för alla elever att omväxlande arbeta med direkt och invers proportionalitet. Jämte den uppgift som beskrivs i stycket ovan kan eleven få en liknande uppgift, där det råder direkt proportionalitet: "En sida i en rektangel är 5 cm lång. Längden av den andra sidan varierar. Vilket samband gäller mellan den varierande sidlängden och rektangelns area?" Läraren bör naturligtvis uppmuntra eleven att beskriva sitt tänkande om uppgiften och erbjudas tips om det behövs, exempelvis "gör en tabell över möjliga värden" följt av "förklara vilka samband du ser i tabellen."

Uppgift 2.3: Identifiera proportionella samband i tabeller

Uppgift 2.3

Markera med kryss om priset är direkt proportionellt mot antalet kakor.

a) Tabell 1

Antal kakor	1	2	5
Pris (kr)	5	10	50

☐

b) Tabell 2

Antal kakor	1	2	5
Pris (kr)	11	12	15

☐

c) Tabell 3

Antal kakor	1	2	5
Pris (kr)	3	6	15

☒

Några lösningar

Två användbara strategier för att identifiera proportionellt samband mellan två variabler:

1) När två proportioner jämförs (exempelvis 1:5 och 2:10 i Tabell 1) ska variablerna ändras med samma faktor (i exemplet 2). Men när 1:5 jämförs med 5:50 (fortfarande Tabell 1) så ökar variablerna med olika faktorer (5 och 10). Därför är priset i Tabell 1 inte direkt proportionellt mot antalet kakor.

2) I varje proportion ska kvoten av variablerna ha samma värde (exempelvis $\frac{5}{1} = \frac{10}{2}$). Motsvarande kvot för den tredje proportionen 5:50 är 10. Därför är variablerna inte proportionella.

2b) Kvoten $\frac{\text{pris}}{\text{antal kakor}}$ tolkas som pris per kaka. I Tabell 1 är priset per kaka

$5/1 = 5$, $10/2 = 5$, $50/5 = 10$, beroende på hur många kakor vi köper.

Eftersom priset per kaka beror på hur många kakor vi köper så är priset inte proportionellt mot antalet kakor.

Strategi 1 redovisad i tabell

Faktor		2		2,5	
Kakor	1		2		5
Pris	5		10		50
Faktor		2		5	

Inte OK

Strategi 2 redovisad i tabell

Pris	5	10	50
Kakor	1	2	5
Pris/kaka	5	5	10

Olika: Inte OK

I tabell 2 kan vi snabbt se att proportionerna 11:1 and 12:2 inte är lika. Därmed kan vi direkt dra slutsatsen att variablerna inte är proportionella.

I tabell 3 ser vi att priset per kaka är 3 kr oavsett hur många kakor vi köper. Variablerna är därmed proportionella.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att analysera aritmetiska data presenterade i tabell och avgöra om det råder direkt proportion mellan variablerna (i detta fall mellan pris i kronor och antalet kakor). Problemsituationen är vardagsnära vilket underlättar för eleverna att resonera i förhållande till situationen för att kontrollera rimlighet, testa möjliga samband och hitta en strategi för att lösa problemet.

Förmågan att analysera och hitta multiplikativa samband mellan numeriska data är en *key skill* för att tolka problemsituationer, utveckla strukturellt tänkande och beskriva samband med algebraiska metoder.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att förstå och kunna hantera proportionella samband är en *key skill* för att utveckla algebraiskt och relationellt tänkande. Inom DiToM-ramverket lyfts särskilt fram vikten av att kunna hitta strukturer i datamängder. Att förstå och kunna identifiera direkt proportionalitet i en datamängd med två variabler lägger grund för fortsatt lärande av linjära funktioner, skala, procenträkning, samt hur dessa innehåll kan representeras grafiskt. Att flexibelt kunna växla mellan tabeller, grafer, beskrivningar och ekvationer stärker elevens sammanhangsbundna förståelse för matematikens strukturer.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Det finns elever som nöjer sig med att konstatera "båda talen blir större", i detta fall "fler kakor kostar mer". Detta är i och för sig sant i samtliga tre tabeller men i endast ett fall (Tabell 3) handlar det om direkt proportionalitet.

Ett annat vanligt misstag är att tro att det blir direkt proportionalitet om värdena ökar lika mycket och felaktigt drar slutsatsen att 1:11 och 2:12 är samma proportion eftersom både 2 och 12 är 1 mer än 1 och 11. Risk finns att eleven felaktigt kopplar ihop direkt proportionalitet med additiv förändring i stället för multiplikativ förändring.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever kan stimuleras att analysera problemsituationer om läraren ställer oväntade frågor, exempelvis "spelar det någon roll hur många kakor man köper?"

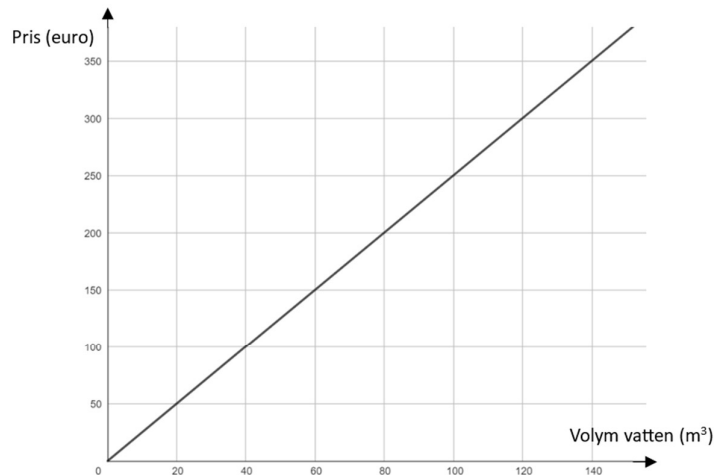
Alla elever bör tidigt träna på att beskriva proportionella samband i tabellform. "Pris per styck" är en bra utgångspunkt som alla elever kan relatera till. Att själv konstruera och se proportionella samband i numerisk form bidrar till att stärka elevers förståelse för multiplikativa samband, exempelvis att "7 glassar kostar 7 gånger så mycket som en glass" samt att koppla detta till uttalanden om proportioner "14:2 och 21:3 är samma proportion".

Att koppla det matematiska språket till vardagssituationer kan stärka elevers förståelse av de matematiska begreppen. Exempelvis "om det i receptet står 3 dl mjölk och 2 dl mjöl och man vill baka med 3 dl mjöl, så måste man ta ... hur många dl mjölk?". En sådan uppgift kan alla elever lösa genom att rita bilder, sedan måste de utmanas att också beskriva sambandet mellan mängden mjölk och mängden mjöl med en proportion som kan förändras genom multiplikation av båda storheterna med samma tal (i exemplet faktorn 1,5).

Uppgift 2.4: Tolka linjärt samband i en graf

Uppgift 2.4

Grafen visar hur priset för vatten beror av hur många kubikmeter vatten som förbrukas.



a) Beräkna hur många m^3 vatten du får för 200 euro.

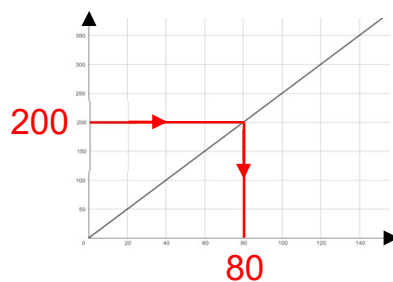
Svar: 80 m^3

b) Beräkna priset för 300 m^3 vatten.

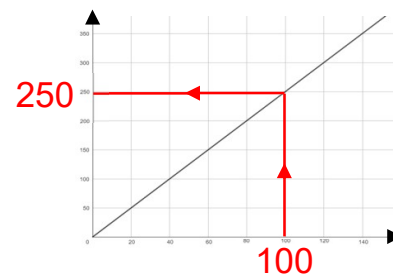
Svar: 750 euro

Lösning

a)



b) Läs av värden i grafen och multiplicera med 3



I del a) utgår vi ifrån 200 på pris-axeln och avläser svaret 80 på volym-axeln.

I del b) börjar vi med att läsa av att 100 m^3 kostar 250 euro. Eftersom variablerna pris och volym är proportionella kan vi (genom att multiplicera med 3) dra slutsatsen att 300 m^3 vatten kostar

$$3 \cdot 250 = 750 \text{ euro}$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att avläsa och använda information om en direkt proportionalitet som är representerad i en graf. I del a) kan det sökta värdet avläsas i det synliga koordinatsystemet, genom att utgå ifrån 200 på stående axeln och avläsa 80 på liggande axeln. I del b) är det möjligt att utgå ifrån vilket värde som helst på liggande axeln, exempelvis 100, och läsa av motsvarande värde på stående axeln, i exemplet 250. Proportionen 100:250 behöver sedan skalas upp till 300:750 för att komma fram till svaret 750.

Att kunna avläsa värden i ett koordinatsystem och i fallet med direkt proportionalitet kunna extrapolera till fler värden är en *key skill* för att förstå och kunna hantera funktioner.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att kunna tolka grafiskt representerad information är en *key skill* för att förstå funktioner och samband mellan variabler. Uppgiften kopplar samman visuellt presenterad information med funktionstänkande. Enligt DiToM-ramverket utvecklar uppgiften förmåga att förstå riktningskoefficient som ett förhållande mellan värden, att använda grafer för att fatta beslut, samt att översätta mellan grafisk, numerisk och språklig representation. Att inledningsvis arbeta med linjära funktioner (som i uppgiften) gör att eleven kan använda proportionella resonemang och räkna exakt, utan att behöva göra egna uppskattningar.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Det finns risk att eleven gör felaktiga avläsningar på axlarna, särskilt då axlarna inte har standardiserade markeringar (10, 20, 30 osv). En elev som är van vid att enbart avläsa från liggande till stående axel kan komma fram till det felaktiga svaret 500 på den första deluppgiften (avläser 100 till 250 och dubblar). I den andra deluppgiften finns risk att eleven uppskattar (på ett ungefär) hur grafen fortsätter efter 140 m³ och inte använder proportionellt resonemang. Rena gissningar är också möjlig orsak till felaktiga svar.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårt att läsa av värden i koordinatsystem kan arbeta med strukturerade uppgifter, med utgångspunkt i utförligt lösta exempel eller uppgifter som är uppdelade i flera steg. Exempelvis "1) Var i koordinatsystemet finns 200 euro? 2) Markera den punkt på grafen som motsvarar värdet 200 euro, 3) Bestäm den volym som motsvarar punkten på grafen". Kopplingen mellan punkt på grafen och värden på axlarna kan förstärkas med ritade sträckor (som i lösningsförslaget).

Elever kan uppmuntras att försöka förklara "vad grafen säger", alltså hur de tolkar den information som representeras i koordinatsystemet utan att nödvändigtvis rikta fokus mot specifika värden.

Elever kan också få i uppgift att konstruera tabeller med grafer som utgångspunkt (naturligtvis kombinerat med den vanliga – omvända – uppgiften att rita graf med utgångspunkt i tabell) för att förstärka kopplingen mellan olika representationsformer och för att beskriva funktionssambandet med konkreta värden, som kan vara enklare att tolka än den givna grafen.

Uppgift 2.5: Lösa ett divisionsproblem i en verklighetsnära problemsituation

Uppgift 2.5

Det finns 810 liter vatten i en vattentank.

Varje dag hämtas 30 liter vatten från tanken.

Hur många dagar tar det innan tanken är tom?

Svar: 27 dagar

Lösning

En första lösning, baserad på division: Antalet dagar kan beräknas enligt

$$\frac{810}{30} = \frac{81}{3} = 27$$

En andra lösning, baserad på multiplikation: Vi beräknar hur många liter som hämtas under 10, 20 och 7 dagar. Sedan adderar vi volymerna för 20 och 7 dagar och ser att summan blir 810. Svaret är därmed 27 dagar.

Antal dagar	1	10	20	7	27
Volym	30	300	600	210	810

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att tolka en verklighetsnära problemsituation och hantera den med räknesättet division, alternativt upprepad multiplikation (och/eller addition, subtraktion) tills det givna värdet uppnås.

Denna förmåga är en *key skill* för att kunna identifiera och använda matematiska begrepp och procedurer för att hantera verklighetsnära problemsituationer. Typen av uppgift behöver eleverna arbeta med under hela sin skoltid, med ökande svårighetsgrad, parallellt med att de lär sig den grundläggande matematik som behövs för att lösa uppgifterna.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Inom DiToM-ramverket är den aktuella förmågan en *key skill* för att utveckla multiplikativa resonemang, proportionella resonemang och förståelse för algebraiska strukturer. Eleverna måste identifiera regeln "30 liter per dag" och tolka dess konsekvenser över flera dagar, vilket är en enkel form av modellering som förbereder eleven för senare undervisning exempelvis om linjära funktioner och riktningskoefficienter samt förändring med ändringsfaktor.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Många elever fastnar redan i steget att tolka problemsituationen och identifiera en lämplig procedur.

De elever som klarar av att identifiera en lämplig procedur kanske av olika skäl inte klarar av att genomföra den. Några kanske ger upp eftersom de anser att talen 810 och 30 är alltför stora, vilket delvis är sant om eleven har bestämt sig för att utföra kort division utan förenklingar. (Att utföra kort division med tvåsiffrig nämnare är inte helt enkelt.) De elever som kommer på att båda talen kan förkortas med 10 får en betydligt enklare division $81/3$.

Om eleven i stället väljer att utföra beräkningen med upprepad multiplikation, addition och/eller subtraktion finns risk för aritmetisk felräkning i något steg.

Det finns också elever som nöjer sig med mer eller mindre väl motiverade uppskattningar, exempelvis vet att $30 \cdot 30 = 900$ och konstaterar att 900 är något större än 810 och därför svarar 25. Ett sådant resonemang indikerar god taluppfattning men också att eleven inte har uppfattat att ett exakt svar förväntas.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårt att tolka den matematiska informationen i uppgiften bör uppmuntras att beräkna hur många liter som har hämtats ur tanken efter 1, 2, 3, 4, 5 dagar, vilket enkelt kan göras med upprepad addition (eller multiplikation, men det kan vara svårare att komma på). Eleven kanske klagar på att det är för jobbigt och att det krävs många beräkningar innan svaret blir 810 liter. Läraren kan då föreslå eleven att testa med 10 dagar och förklara för eleven att beräkningarna inte behöver göras för en dag i taget. I det läget finns goda förutsättningar för eleven att komma in på multiplikation ($10 \cdot 30 = 300$) utifrån egna behov av att förenkla beräkningarna. När de jämför proportionerna 1: 30 och 10: 300 får de också goda förutsättningar att uppfatta det proportionella sambandet mellan volym och tid.

Att tolka information med matematiska symboler och att översätta mellan olika representationsformer och operationer är ofta nödvändigt vid problemlösning. Elever behöver träna detta under hela sin skolgång och lärare behöver vara beredda att ta fram enklare uppgifter till elever som inte klarar av att lösa denna uppgift. Exempelvis skulle volymen kunna ändras till 150 liter, för att stimulera eleverna avseende både motivation och kognition så att de tar sig an att tolka uppgiften samt identifiera strategier och procedurer som de kan tänka sig att genomföra.

Uppgift 2.6: Kombinera fast och rörlig kostnad i en vardagsnära problemsituation

Uppgift 2.6

Sven har bjudit in 15 vänner till en fest för att fira hans födelsedag.

Han måste betala 50 euro för att hyra lokalen.

Det tillkommer en kostnad på 10 euro för varje inbjuden vän.

Hur mycket behöver Sven betala för festen?

Svar: 200 euro

Lösning

Sven betalar 50 euro för lokalen, som en startkostnad.

Dessutom måste Sven betala 10 euro vardera för hans 15 vänner. Extra kostnad: $15 \cdot 10 = 150$ euro.

Totalkostnaden är $50 + 150 = 200$ euro.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att tolka en vardagsnära problembeskrivning med fast och rörlig kostnad, översätta till ett aritmetiskt uttryck och beräkna uttryckets värde.

Varför är den här färdigheten en key skill?

Förmågan att översätta en problembeskrivning till ett linjärt aritmetiskt uttryck är en *key skill* för att utveckla förståelse för linjära modeller och algebraiska strukturer. Inom DiToM-ramverket bidrar denna typ av uppgift till att stärka elevens förmåga att modellera vardagsnära problemsituationer och utifrån den matematiska modellen utföra (aritmetiska eller algebraiska) operationer för att lösa uppgiften.

Vidare stärker uppgiften elevens förmåga att strukturera lösningar i flera steg, vilket är särskilt viktigt i samband med vardagsnära och verklighetsnära problemlösning där lösningen bygger på information som ska tolkas matematiskt utifrån en problemsituation.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande misstag, särskilt för elever som enbart är vana vid att lösa problem med en enda beräkning, är att enbart beräkna den rörliga kostnaden. Ett annat misstag är att subtrahera i stället för att addera den fasta kostnaden, vilket indikerar att eleven inte har ägnat tillräcklig uppmärksamhet åt att tolka uppgiften utan nöjer sig med att "göra något med talen". Det finns också risk att eleven genomför några godtyckligt valda beräkningar med de givna talen 15, 50 och 10, till exempel $15 \cdot 50/10 = 75$. En sådan felaktig lösning är mer allvarlig i och med att den indikerar att eleven helt bortser från att försöka tolka problemsituationen.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Läraren kan stödja elever att tolka problemsituationen genom konkretisering, exempelvis att representera Sven och hans vänner med legobitar eller annat material. Eller rita en bild. Samt en lokalansvarig som ska ta emot betalningen. Då blir det tydligare att Sven först ska betala 50 euro, vilket kan skrivas in i bilden. Vad mer ska han betala? Eleven bör uppmanas att noggrant läsa uppgiften, där det står "10 euro för varje inbjuden vän" och att han har bjudit in "15 vänner". Läraren kan be eleven skriva in kostnaden för varje vän, vilket leder till beräkningen $10 + 10 + \dots + 10 = 15 \cdot 10 = 150$. I bilden syns nu att Sven ska betala både 50 och 150, alltså totalt 200.

Tabeller är också ett bra sätt att representera förändring och särskilt linjär förändring. Naturligtvis måste läraren undervisa om detta så att eleven får en tydlig struktur att förhålla sig till. Gärna utförliga tabeller med egna kolumner för fast kostnad, rörlig kostnad och total kostnad, så att eleven ser hur värdena skapas och vilken algebraisk struktur de har. (De flesta elever vill skriva kortfattat, men då riskerar de att missa just strukturen i de uttryck vars värden beräknas.)

Läraren måste också uppmärksamma eleverna på att kontrollera sina svar, när det är möjligt. I denna uppgift är det inte helt enkelt att göra detta men eleven kan ändå uppmanas att kontrollera rimligheten i det egna svaret. Att reflektera kring svar på uppgifter är en god vana som bör uppmuntras av läraren. I detta fall kan läraren fråga eleven "Tror du att den som hyr ut lokalen är nöjd med betalningen?" Alltså byta roller mellan kund (Sven) och uthyrare. När eleven ska granska betalningen utifrån rollen som uthyrare blir det naturligt för eleven att förhålla sig mer kritiskt granskande till den ersättning som erbjuds. Exempelvis att 150 kronor innebär att Sven inte har betalt den fasta kostnaden.

Uppgift 3.1: Omvandla ett bråk till procent

Uppgift 3.1

Skriv bråket $\frac{3}{5}$ som procent.

☐ 0.6%

☐ 6%

☐ 35%

☒ 60%

Några lösningar

En första lösning: Skalning av talfakta, enligt

$$\frac{1}{5} = 0,20 = 20\%, \text{ så } \frac{3}{5} = 3 \cdot 20\% = 60\%$$

En andra lösning: Skala bråket till nämnare 100.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

En tredje lösning, genom division:

$$\frac{3}{5} = \frac{3,0}{5} = 0,6 = 0,60 = 60\%$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att tolka ett känt bråk (tre femtedelar) som procent. Indirekt testas därmed elevens sammanhangsbundna förståelse av tal, särskilt bråk, decimaltal och procent. Denna förståelse och färdighet att kunna hantera tal i olika former är en *key skill* både inom aritmetik och algebra.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att översätta mellan olika representationer av tal är en *key skill* inom många områden i matematik, exempelvis vid tolkning av statistik, jämförelser av tal och hantering av proportioner. Inom DiToM-ramverket kopplas denna förmåga närmast till förståelse av rationella tal, flexibel hantering av tal och förståelse av symboliska uttryck. Förmågan att kunna hantera tal är också en *key skill* för att förstå och kunna använda algebraiska uttryck vid problemlösning och tolkning av funktioner.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever kan missförstå bråket och tolka det (felaktigt) som ett decimaltal $0,35 = 35\%$. Det finns också risk för att eleven felaktigt tolkar decimaltalet 0,6 som 0,6%, utan att ta hänsyn till att procent är hundradelar. Detta gäller särskilt elever som är nöjda och stannar när de har gjort något, i detta fall korrekt omvandlat $3/5 = 0,6$ och stannat där. Eller felaktigt tolkat 0,6 som 6%. Dessa exempel på fel indikerar svag taluppfattning och att eleven ännu inte kan hantera procentberäkningar med tillräcklig säkerhet.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårt att hantera bråk och procent kan erbjudas att arbeta med så kallade hundrarutor (10x10) där både bråk och procent kan visualiseras. Tre femtedelar kan visualiseras som sex rader av tio i hundrarutan, vilket utgör 60 rutor av 100 och därmed 60%. Just att visualisera ger eleven en mer konkret ingång till tal och tals storlek än formella beräkningar, som riskerar att utföras instrumentellt med begränsad förståelse vilket medför ökad risk att göra fel.

Den elev som vet att en femtedel är lika med 20% kan enkelt skala upp det sambandet med en faktor 3 och dra slutsatsen att tre femtedelar är lika med 60%. För att en sådan procedur ska vara möjlig att genomföra behöver eleven känna till grundläggande talfakta, exempelvis $1/5 = 0,2$ eller $1/5 = 20\%$, samt motsvarande när nämnaren är 2, 4, 5 eller 10. Därför är det viktigt att eleven får träna på att översätta bråk med dessa nämnare till både decimaltal och procent.

De flesta elever tycker att det är enklare att arbeta med decimaltal än bråk. Dessa elever kan inledningsvis lösa många uppgifter genom att först omvandla ett givet bråk till decimaltal och sedan till procent, i stället för att förlänga det givna bråket (vilket de kan lära sig senare, när de är säkra på den första varianten). Det är olyckligt om eleven inte alls lär sig att förlänga bråk eftersom den proceduren stärker elevens proportionella tänkande.

Att uttrycka frågor muntligt kan hjälpa elever att (i dialog med läraren och med andra elever) komma in på effektiva resonemang, exempelvis "3 av 5 är lika med hur många av 100?". Om eleven inte förstår frågan kan läraren förtydliga med bild eller laborativt material.

Uppgift 3.2: Beräkna nytt pris efter procentuell ökning

Uppgift 3.2

Om 30 ökar med 50% så blir resultatet:

- ☐ 80
- ☒ 45
- ☐ 35
- ☐ 15

Några lösningar

En första lösning, baserad på att tolka 50% som "hälften":

Ökningen är hälften av 30 dvs 15. Resultatet efter ökning med 15 är $30 + 15 = 45$.

Mer formellt, med division:

$$50\% \text{ av } 30 = \frac{30}{2} = 15 \quad \text{Efter ökningen: } 30 + 15 = 45.$$

En andra lösning, där den 50%-iga ökningen beräknas med multiplikation: Ökningen är

$$50\% \text{ of } 30 = 0,50 \cdot 30 = 5 \cdot 3 = 15 \quad \text{Efter ökningen: } 30 + 15 = 45.$$

En tredje lösning, där resultatet tolkas som 150% av 30:

$$150\% \text{ of } 30 = 1,50 \cdot 30 = 15 \cdot 3 = 45$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar om eleven kan beräkna en procentuell förändring av ett givet värde och sedan beräkna det nya värdet, vilket innebär en beräkning i två steg. (Att utföra hela beräkningen i ett steg förväntas inte av elever i årskurs 8.) Att tolka given information med talsymboler och utföra beräkningar i två steg är en *key skill* för problemlösning.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Förmågan att tolka och beräkna nytt värde efter procentuell förändring är en *key skill* både för vardagsnära och matematisk problemlösning. Förmågan behövs för att förstå förändringar av priser, exempelvis vad det innebär när "priset sänks med 40%", men också vid andra procentuella förändringar exempelvis befolkningstillväxt, kapital med ränta och statistiska jämförelser. Inom DiToM-ramverket betraktas procentuella resonemang som en form av proportionella resonemang samt relateras till funktionsbegreppet och förståelse för multiplikativa samband.

Uppgiften stärker elevens förmåga att växla mellan multiplikation och addition vid procentberäkningar och bidrar till att utveckla elevens förmåga att generalisera över olika sammanhang.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande fel är att eleven blandar ihop procent och storheter, så att resultatet av ökningen av 30 med 50% felaktigt tolkas som $30 + 50 = 80$. En sådan sammanblandning indikerar att eleven inte har uppfattat att procent är ett relativt mått, inte en storhet.

Ett annat vanligt förekommande fel är att eleven nöjer sig med att beräkna 50% av 30 och svarar 15, alltså att eleven beräknar ökningen men inte det nya värdet $30 + 15 = 45$.

Om eleven enbart tittar på siffrorna i de givna talen 30 och 50 kan det leda till det felaktiga svaret 35, som indikerar att eleven inte har förstått vad problemet handlar om.

Svaren ovan kan bero på svårighet att tolka uppgiften, svårighet att översätta informationen till matematiska uttryck eller underskattning av hur mycket som behöver göras för att komma fram till rätt svar.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Just 50% kan tolkas som "hälften". Att omformulera "30 ökar med 50%" till "30 ökar med hälften" kan ge eleven en enklare (men ändå inte helt enkel) ingång till att tolka uppgiften. En bild kan hjälpa eleven att tolka informationen i uppgiften, till att börja med "Rita först något som är 30. Vad är hälften av 30?". Att strukturera uppgiften i flera mindre steg kan både hjälpa eleven att tolka uppgiften, utföra beräkningarna och – på ett mer generellt plan – lära eleven att själv strukturera uppgifter och lösningar i flera mindre steg.

Vardagsnära problemsituationer kan underlätta tolkning av procentuella förändringar, exempelvis "Du får 30 centiliter cola och din kamrat får 50% mer än du. Hur mycket får kamraten? Andra tacksamma situationer, som kan väcka många elevers intresse, kan handla om vad något kostar, hur mycket godis eller hur många kakor någon får. Läraren kan behöva hitta rätt i förhållande till enskilda elevers intressen.

Som redan nämnts kan bilder, bråkremsor, tallinjer, hundrarutor och proportionella resonemang användas för att stimulera elevers egna resonemang. Läraren kan fråga "Hur mycket är en procent av 30?", sedan "Hur mycket är 10% av 30?" och "Hur mycket är 50% av 30?" för att stimulera elevens proportionella resonemang. Alternativt att eleven avbryter och säger att läraren krånglar till det och svarar "50% av 30 är 15, det är ju hälften". Bra. Lärarens resonemang behövdes inte just här, men kan användas i nästa uppgift (kanske "Hur mycket är 40% av 30?").

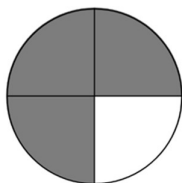
Att på olika sätt visualisera hur en ökning med 50% påverkar värdet av en storhet är av stor betydelse för att stärka elevens uppfattning av procentuell ökning.

Uppgift 3.3: Tolka andel av figur som procent

Uppgift 3.3

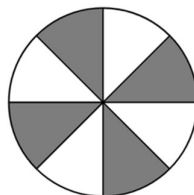
Hur många procent av cirkeln är skuggad?

a)



Skuggat: 75 %

b)

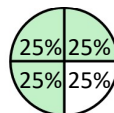


Skuggat: 50 %

Lösning

a) Var och en av de fyra delarna är 25% av cirkeln.

Tre delar är $3 \cdot 25\% = 75\%$ av cirkeln.



b) Var och en av de åtta delarna är 12,5% av cirkeln (hälften av 25%).

Fyra delar är $4 \cdot 12,5\% = 50\%$ av cirkeln.

Ett annat sätt att lösa problemet är att tolka den skuggade delen som 4 delar av 8, som är hälften av hela cirkeln. Svaret är alltså 50%.

Resonemanget kan stödjas av beräkning och/eller bild, enligt nedan.

$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} = 50\%, \quad (\text{eller } \frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 50\%)$$



Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att tolka del i förhållande till helhet i en visuell representation (cirkel) och att uttrycka detta förhållande i procent av hela cirkeln.

Uppgiften kan lösas på flera sätt, med kreativt resonemang (eleven "ser") eller formellt resonemang med bråk.

I båda fallen måste eleven beskriva förhållandet mellan två storheter (areor) med symboliska uttryck.

Varför är den här färdigheten en key skill?

Att översätta mellan visuellt presenterade modeller, bråk och procent är en *key skill* för problemlösning, proportionella resonemang och för att kunna göra uppskattningar av uttrycks värden. Inom DiToM-ramverket kopplas detta till begreppslig flexibilitet och förmågan att koppla samman olika representationer, som en form av matematisk litteracitet. Denna förmåga kan användas i vardagslivets problemsituationer där diagram, statistik och presenterade data ofta beskriver del i förhållande till helhet.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever som har svårt att tolka uppgiften kan nöja sig med att (felaktigt) svara 3 respektive 4, eftersom det är så många delar som är skuggade i figurerna. Eller svarar 30 respektive 40 så att svaren ska bli mer rimliga.

Att varannan del är skuggad i del b) försvårar tolkningen av andelen skuggade delar som hälften. Elever som inte inser att 4 delar av 8 kan tolkas som hälften kan ha svårt att omvandla $\frac{4}{8}$ till procent.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Uppgiften är av en grundläggande typ som alla elever i årskurs 8 har mött vid många tillfällen. De elever som ännu inte har lärt sig att tolka del-till-helhet som procent i olika sorters figurer bör fortsätta träna på just detta. Inte enbart med cirklar utan också rektanglar hundrurutor och tallinjer.

Uppgiften inleds med "Hur många procent..." i stället för "Hur stor andel..." eftersom många elever som förstår vad som avses med procent har svårare att förstå ordet andel. Avsikten är att testa begreppsförståelse snarare än ordförståelse. Om eleven ändå har svårt att tolka uppgiften kan läraren omformulera den, inledningsvis lite otydligt informellt "Hur mycket är skuggat?". Om eleven svarar "3 bitar" kan läraren ställa en ledande följdfråga "Av hur många?". När eleven svarar "4" kan läraren fråga "Vad blir det i procent?". Om eleven fortfarande inte förstår lärarens fråga kan läraren precisera "3 av 4 bitar, vad blir det i procent?". Vid behov: "Om vi bara tar en av 4 bitar, vad blir det i procent?" eller "Om vi tar 2 av 4 bitar, vad blir det i procent?". S att eleven kanske kopplar till hälften och 50% och därefter kan skala ner proportionen 2: 50% till 1:25% och upp till 3:75% (naturligtvis utan att använda dessa beteckningar). Ledande frågor av denna typ kan ibland behövas för att lotsa eleven genom uppgiftens struktur.

Uppgift 3.4: Beräkningar med negativa tal

Uppgift 3.4

Bestäm det tal som saknas.

a) $12 - (-5) = \underline{17}$

b) $11 \cdot \underline{(-4)} = -44$

Lösning

Del a) kan lösas utifrån minnesregeln "minus minus blir plus" (mer exakt: att subtrahera ett negativt tal ger samma resultat som att addera motsvarande positiva tal). Utifrån denna regel kan svaret beräknas enligt

$$12 - (-5) = 12 + 5 = 17$$

Del b) kan lösas i två steg: Notera att produkten är ett negativt tal. Därmed måste en av de två faktorerna vara ett negativt tal. Eftersom den givna faktorn 11 är ett positivt tal måste svaret (den andra faktorn) vara ett negativt tal. Motsvarande positiva tal kompletterar multiplikationen $11 \cdot \underline{\quad} = 44$. Eftersom det talet är 4, så är lösningen till b) lika med -4 .

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevers förmåga att resonera om effekterna av och kunna hantera räknesätten subtraktion och multiplikation (indirekt även addition och division) i uttryck som innehåller negativa tal.

Varför är den här färdigheten en key skill?

Att förstå hur negativa tal påverkar resultatet av enkla beräkningar behövs för att utveckla algebraiskt tänkande. Eleverna behöver känna till teckenregler och kunna hantera uttryck med tecken baserat på strukturell förståelse, inte enbart procedurer. Inom DiToM-ramverket är detta en *key skill* för att utveckla förståelse för symboler, strukturell flexibilitet och begreppsliga resonemang om operationer och numeriska uttrycks värden, vilket behövs i samband med problemlösning och för att förstå funktioners egenskaper och struktur i algebraiska uttryck.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande fel i uppgift a) är att bortse ifrån minustecknet i -5 , vilket leder till det felaktiga svaret $12 - 5 = 7$. På motsvarande sätt kan eleven i uppgift b) felaktigt svara 4, utan att ta hänsyn till minustecken.

Elever som tror att resultatet alltid blir mindre vid subtraktion kan ha svårt att acceptera att 12 minus någonting kan vara lika med 17.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

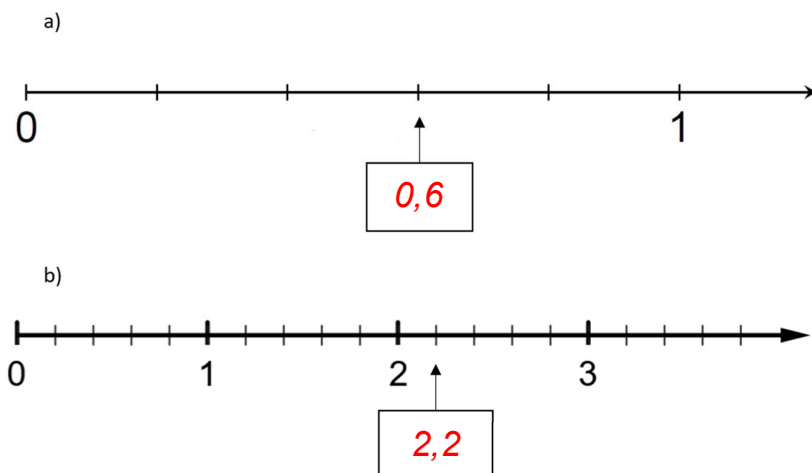
Elever behöver befästa hur olika teckenkombinationer (e.g., $(+)(+)$, $(+)(-)$, $(-)(+)$, $(-)(-)$) påverkar resultatet av olika aritmetiska operationer, speciellt de fyra räknesätten. Detta kan förstärkas med visuella modeller, speciellt tallinjer där operationerna kan visualiseras. Läraren kan språkligt uttrycka hur operationerna fungerar, exempelvis "minus minus blir plus" naturligtvis kombinerat med exempel som $12 - (-5) = 12 + 5 = 17$ för att förtydliga innebörden av det som sägs.

Det kan också vara ett bra stöd för teckenreglerna att betona sambandet mellan addition och subtraktion samt mellan multiplikation och division, som inversa räknesätt.

Uppgift 3.5: Identifiera decimaltal på en tallinje

Uppgift 3.5

Skriv in det tal i rutan som pilen pekar på.

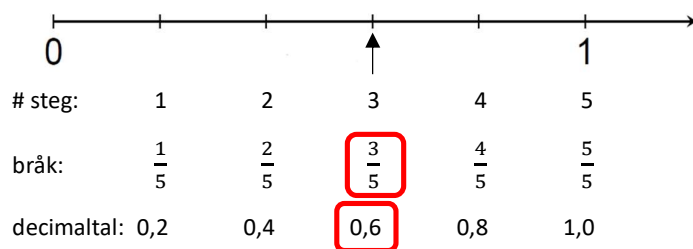


Några lösningar

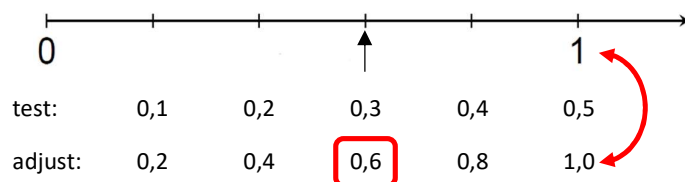
Två möjliga strategier:

- 1) Räkna antalet steg (eller delintervall) från 0 till 1;
- 2) Prova följder av decimaltal (eller bråk) från 0 till 1.

En lösning till a): Vi ser att det är 5 steg (5 delintervall) från 0 till 1.



En andra lösning till a): Prova 0,1 för den första positionen efter 0. Efter fem steg hamnar vi på 0,5 som inte stämmer med den givna positionen 1. Vi måste dubbla 0,1 för att hamna på 1 efter 5 steg, alltså byta från 0,1 till 0,2. Efter 3 steg hamnar vi på 0,6 vilket alltså är rätt svar.



Del b) kan lösas på liknade sätt som a) eller genom att använda resultatet från a) att ett steg åt höger motsvarar 0,2 så att markeringen motsvaras av talet $2 + 0,2 = 2,2$.

Uppgiften kan även lösas genom att dubblera antalet markeringar så att varje markering motsvarar $1/10 = 0,1$.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att representera givna positioner på en tallinje med decimaltal eller bråk. Detta görs med stöd av markeringar som är jämnt fördelade mellan heltalen. Att förstå olika sorters tal med stöd av en tallinje är en *key skill* för att förstå och kunna hantera tal skrivna på olika sätt.

Uppgiften utmanar elever att kombinera förståelse för tallinje, decimaltal och proportionella resonemang.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Tallinjer erbjuder en kraftfull visuell representation av flera sorters tal, inklusive decimaltal och bråk. Tallinjerna hjälper elever förstå tals storlek och kan användas för att jämföra tal. Att kunna tolka decimaltal och bråk på en tallinje är en *key skill* för att förstå ekvivalens och operationer med rationella tal. Tallinjen stödjer elevers utveckling av kognitiva modeller för rationella tal och gör det möjligt för eleverna att samtidigt resonera om flera tal (Treppo & van den Heuvel-Panhuizen 2014). Att kunna visualisera tals storlek och kunna resonera om tal behövs både inom aritmetiken, mätning, tolkning av data och modellering av problemsituationer.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande misstag är att anta att det alltid gäller att ett steg åt höger på tallinjen innebär ökning med 1 eller 0,1 (eller motsvarande, exempelvis 10, 100 etc). Detta antagande leder till de felaktiga svaren 0,3 respektive 2,1.

Elever kan ha svårt att bestämma längden av ett delintervall, även om det finns markeringar på tallinjen.

Elever som ännu inte klarar av att använda proportionella resonemang kan nöja sig med att visuellt uppskatta ett ungefärligt värde för de givna positionerna, exempelvis 0,5 respektive 2,25. Om eleven gör en sådan visuell fast felaktig uppskattning kan det ändå tyda på att eleven är på väg mot att utveckla proportionella resonemang.

De två sista exemplen tyder på att eleven ännu inte har vant sig vid att genomföra proportionella resonemang på en tallinje.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever kan få i uppgift att själva gradera tallinjer, inledningsvis med enbart heltal 0, 1, 2, 3 etc så att de får befästa grundläggande principer exempelvis att det ska vara lika långt mellan varje par av intilliggande heltal. Läraren kan markera 0 och 10 och be eleven att markera positioner för de mellanliggande heltalen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, så att eleven slipper oroa sig för att också hantera decimaltal. När eleven har mätt avståndet mellan 0 och 10 med en linjal och kommit på att det är lämpligt att dividera med 10 för att komma vidare har eleven identifierat ytterligare principer som kan användas även för gradering med decimaltal. Om eleven inte kommer igång eller bara gissar kan läraren kan stimulera elevens tänkande genom att fråga "Hur långt är det mellan 0 och 10?" följt av "Hur långt är det då mellan 0 och 1?".

Resonemang om antal steg eller antal delintervall bör eleven kunna koppla först till bråk: 5 steg från 0 till ett betyder att ett steg är $\frac{1}{5}$, och sedan till decimaltal:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Aritmetiska färdigheter av den typen underlättar när eleven ska hantera decimaltal på en tallinje, samt hjälper eleven att befästa faktakunskaper som $\frac{1}{5} = 0,2$ och $\frac{1}{4} = 0,25$ som ytterligare underlättar omvandling mellan olika representationsformer och tolkning av tal på tallinjer.

VI. Vetenskaplig utvärdering

DiToM-testet Screening 8+ har utvecklats med utgångspunkt i teori och beprövad erfarenhet som del av en icke-representativ valideringsstudie. Att studien bör betraktas som icke-representativ beror på att flera av skolorna valdes ut på grund av att de hade svaga resultat i matematik. Syftet var att hjälpa lärare att identifiera elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter under sin fortsatta skolgång. Genom att använda testet i slutet av årskurs 8 eller början av årskurs 9 kan lärare få stöd att göra en empiriskt grundad bedömning av elevernas prestationer och identifiera de elever som kan vara i behov av särskilt stöd inom vissa områden i matematiken.

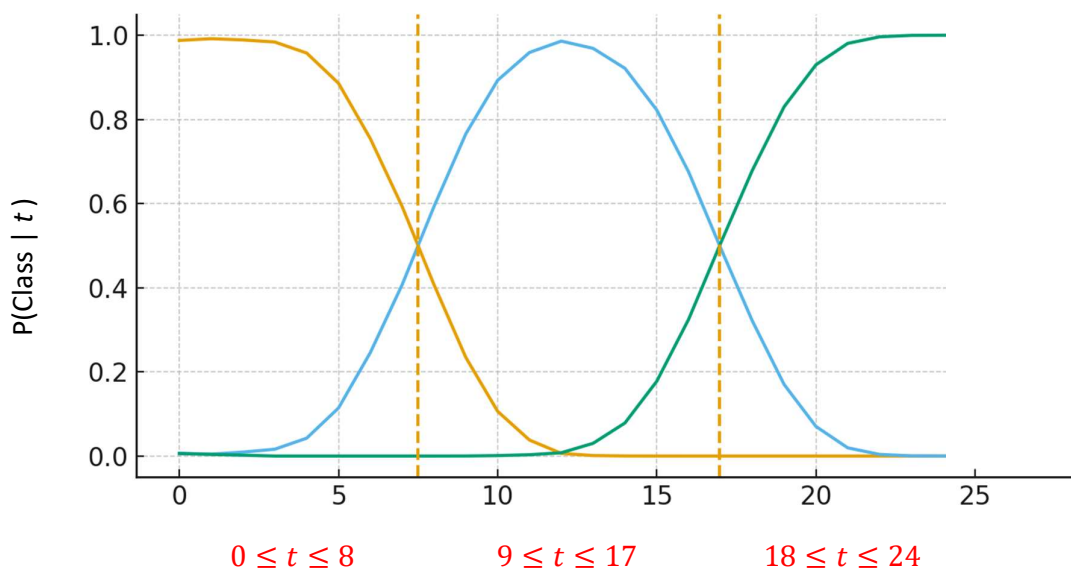
Beskrivning av urval och resultat

Testet genomfördes juni till juli 2025 under de tre sista veckorna av skolarbetet 2024/2025 med 1238 elever från skolor i Grekland, Tyskland, Frankrike, Spanien, Italien, Kroatien och Sverige.

Testet består av tre delar med totalt 26 uppgifter inom områdena aritmetik, prealgebra och algebra. Uppgifterna valdes ut med stöd av ett ramverk utvecklat inom projektet och genom förhandlingar mellan projektdeltagarna. Rätt svar gav 1 poäng, fel svar 0 poäng. Ofullständigt eller inget svar gav också 0 poäng. Testet genomfördes enligt givna instruktioner (se IV. Genomförande av testen Screening 6+ och 8+) och resultaten utvärderades. Eftersom testet utformades för screening med syfte att identifiera elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter var det önskvärt att uppnå en tydlig (så tydlig som möjligt) avgränsning mellan olika grupper av elever, beroende på om de bedömdes riskera eller bedömdes inte riskera att hamna i matematiksvårigheter.

Inom projektet togs fram två *cutoff values* (tröskelvärden) för att skilja mellan olika grupper av elever: De som bedöms riskera att hamna i matematiksvårigheter och därför behöver särskilda insatser, sedan en "mellan-grupp" som behöver uppmärksammas av läraren och slutligen de som bedöms inte riskera att hamna i matematiksvårigheter.

Bestämningen av tröskelvärdena var datadriven genom *latent class analysis*. Därigenom identifierades de tre grupperna utifrån uppnådda poäng på testet. Vi redogör inte här för detaljerna utan de klargörs i en kommande doktorsavhandling vid universitetet i Bielefeld, Tyskland. Diagrammet nedan baseras på urval från Tyskland, där lärarna gjorde en skattning av elevernas grupptillhörighet (orange, blå, grön färg i diagrammet) innan de skrev testet. Här kan vi exempelvis se att det är ca 20% risk att en elev som skrivit 6 poäng tillhör mellangruppen (enligt lärares bedömning) men genom testet klassificeras i riskgruppen. Denna osäkerhet i klassificering kan anses godtagbar, då ett mindre omfattande test som vårt inte kan ge något definitivt besked utan endast indikationer på riskerna. De tre grupperna definierades utifrån testresultaten: $0 \leq t \leq 8$, $9 \leq t \leq 17$, $18 \leq t \leq 24$.



Analysen bygger på tyska lärares bedömningar av elevernas grupptillhörighet. Lärarna har gjort individuella bedömningar utifrån egen erfarenhet och kännedom om eleverna, vilket tillför en extra osäkerhet i analysen. Vi menar att elevernas resultat på testet ger varje lärare ett extra underlag och stöd för sin egen bedömning av varje elevs risk att hamna i matematiksvårigheter, samtidigt som DiToM-analysen kan uppfattas som mer stabil än en enskild lärares bedömning då den grundas på samtliga deltagande lärares bedömningar.

Rekommendationer för lärares arbete med utgångspunkt i testresultat

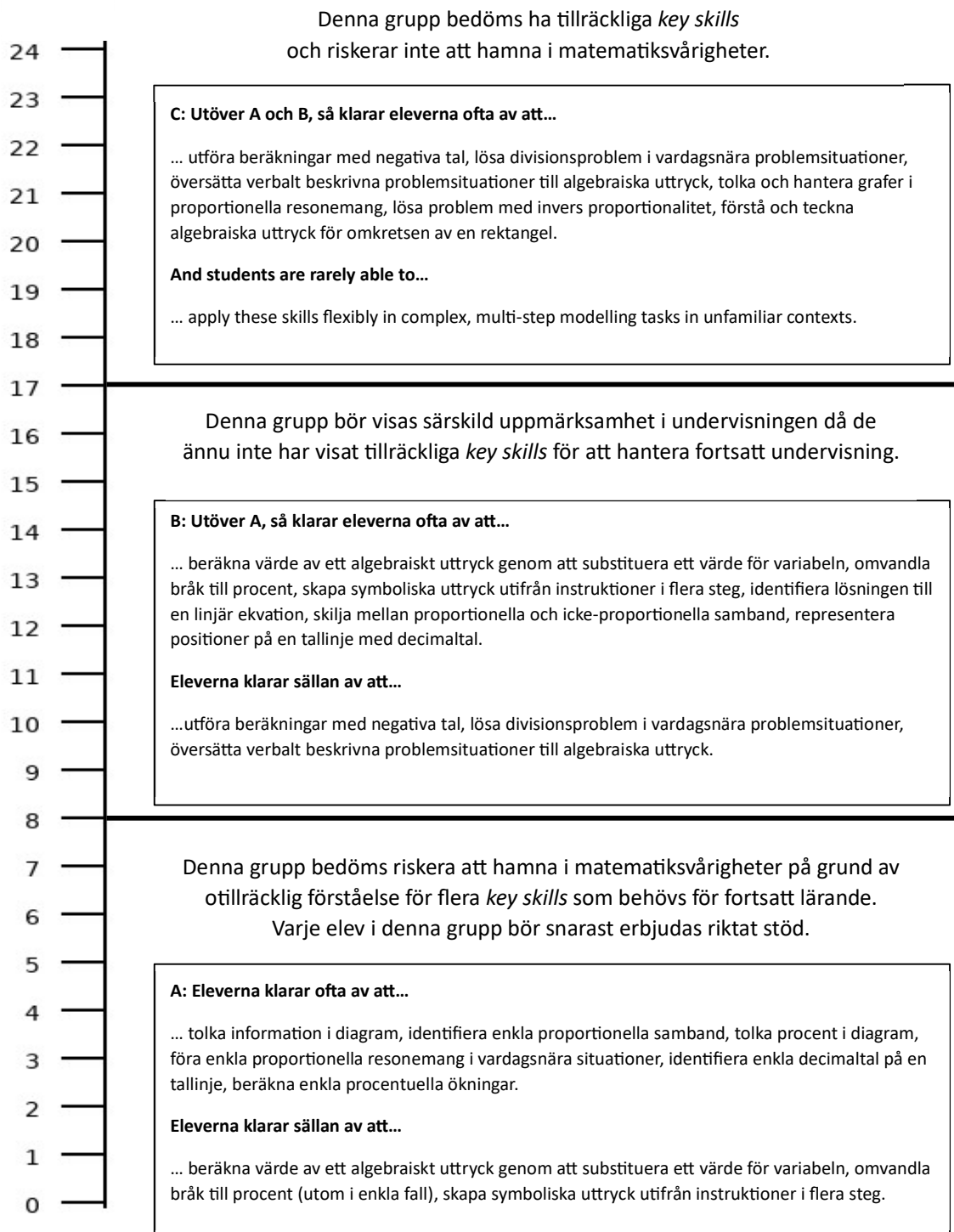
Till att börja med finns det elever som inte gör sitt bästa och inte försöker lösa åtminstone vissa uppgifter eller vissa typer av uppgifter när de inte känner för det och särskilt när de vet att testresultatet inte kommer att påverka deras betyg. För en sådan elev fungerar inte DiToM-testet. Läraren, som bäst känner sina elever, får försöka bedöma om ett svagt testresultat är missvisande för några av eleverna.

I en klass med många svagt presterande elever kan det hända att en stor andel av eleverna klassificeras i riskgruppen $0 \leq t \leq 8$. Läraren måste då avgöra vilka elever i riskgruppen som är i störst behov av extra stöd och som läraren kan klara av att hantera på egen hand, samtidigt som läraren rekommenderas att tydligt signalera till skolledningen att det finns fler elever som behöver extra stöd. Tröskelvärdet 8 är inte hugget i sten utan kan justeras antingen nedåt eller uppåt av läraren. En typ av risk som är förknippad med en sådan justering kan avläsas i diagrammet på föregående sida, där det exempelvis framgår att 9 av 10 elever som har testresultatet 10 inte tillhör den primära riskgruppen (utan tillhör "mellangruppen").

En självklar slutsats av ovanstående resonemang är att DiToM-testet inte ersätter lärarens bedömningar och lärarens arbete. DiToM-testet är ett stöd som ger en första indikation på vilka elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter på grund av otillräckliga *key skills*.

VII. Utvärdering av testresultat

Följande skala visar hur elevers testresultat (preliminärt!) kan kopplas till deras förmåga att hantera key skills.



VIII. Resultatblankett: Sammanställning av testresultat

På projektsidan finns en Excel-fil där läraren kan skriva in samtliga elevers resultat, uppgift för uppgift. Varje uppgift rättas med 1 för korrekt svar och 0 för felaktigt svar (eller inget svar). På arbetsbladet anges ett möjligt korrekt svar, till exempel $2a$ om frågan är att skriva ett uttryck för "dubbelt så mycket som a ". Naturligtvis ska även $2 \cdot a$, $2 \times a$ och $a + a$ accepteras som korrekta svar. Att visa de korrekta svaren (läs: ett korrekt svar) direkt i arbetsbladet fungerar som ett facit och är tänkt att underlätta lärarens rättning.

Om läraren vill anteckna elevens svar finns det fritextutrymme direkt till höger om fältet där resultatet 0 eller 1 skrivs in. Detta är inte nödvändigt att göra men kan underlätta lärarens uppföljande arbete med eleverna, så att läraren enkelt kan se elevens svar (vilket ofta speglar hur eleven har tänkt) utan att behöva gå tillbaka till de skrivna testen (vilket dock kan ge extra information, särskilt om en elev har skrivit mycket mer än bara svar).

Naturligtvis beräknas varje elevs testresultat (antalet korrekta svar) automatiskt i arbetsbladet.

Även om tröskelvärdena ger ett stöd för läraren att identifiera elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter så bör hänsyn tas till elevernas faktiska testresultat för att avgöra vilka elever som är i störst behov av stöd. En elev som har 5 poäng på testet är troligtvis i större behov av stöd än en elev som har 8 poäng.

Sammanställningen visar vilka uppgifter eller typ av uppgifter som eleven inte har klarat av, så att läraren kan ge riktat stöd inom de områden som eleven har särskilt svårt för. Läraren bör inte anta att alla elever som har uppnått liknande testresultat har exakt samma behov av stöd, de kan ju ha svårt att lösa olika typer av uppgifter. Utgångspunkten bör vara att varje elev i riskgruppen behöver ges stöd utifrån sina specifika behov.

Sammanställningen ger också en överblick på gruppnivå över vilka uppgifter som hela klassen behöver arbeta vidare med.

Referenser

Brings, L., & Kleine, M. (2025). *Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education*. In Proceedings of EDULEARN25 Conference. Palma, Spain.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York: Macmillan.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Arithmetik: Grundschule* (8. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fraction development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and Instruction*, 14(5), 469–484. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012>