



Co-funded by
the European Union



Handbok för lärare Screening i matematik 6+

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Innehåll

I. Introduktion.....	2
II. "Key skills" – nödvändiga för fortsatt lärande	3
III. Struktur i testen för årskurs 6+ and 8+	4
IV. Genomförande av testen	5
V. Presentation av uppgifterna	6
Uppgift 1.1: Multiplikation and division	6
Uppgift 1.2: Talmönster och regler för beräkning	8
Uppgift 1.3: Använda prioriteringsregler	10
Uppgift 1.4: Beskrivande text till matematiskt uttryck.....	12
Uppgift 1.5: Bestämma okänd kvantitet i en problemsituation presenterad i text och bild ...	14
Uppgift 2.1: Representera och tolka lika stora bråk	16
Uppgift 2.2: Skugga given andel av en rektangel	18
Uppgift 2.3: Proportionella resonemang med kvantiteter och priser.....	20
Uppgift 3.1: Symboliskt representera tal på en tallinje	22
Uppgift 3.2: Identifiera andel av en delvis skuggad cirkel	24
Uppgift 3.3: Jämföra ett bråk med naturliga tal	26
Uppgift 3.4: Avläsa decimaltal på en termometer	28
Uppgift 3.5: Jämföra decimaltal	30
Uppgift 3.6: Bestämma term i en ekvation med decimaltal	32
Uppgift 3.7: Subtraktion och multiplikation med decimaltal	34
Uppgift 3.8 och 3.9: Bestämma största värde av ett bråk genom att välja täljare eller nämnare	36
VI. Vetenskaplig utvärdering	38
VII. Utvärdering av testresultat	40
VIII. Resultatblankett: Sammanställning av testresultat.....	41
Referenser	42

I. Introduktion

Att lära matematik är kumulativt: ny kunskap bygger på tidigare inhämtade förkunskaper. Om eleven inte kan använda grundläggande idéer och begrepp blir det svårt för eleven att komma vidare och lära sig nytt matematiskt innehåll. Resultat från internationella och nationella studier visar att alltför många elever inte har de färdigheter som behövs för att komma vidare i sina matematikstudier. Undervisningen i matematik behöver anpassas med tidiga insatser för dessa elever, med fokus på att utveckla deras praktiska färdigheter. Det är här som det EU-finansierade projektet "Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)" kommer in. I samarbete mellan lärarutbildare i Italien, Frankrike, Sverige, Kroatien, Grekland, Spanien och Tyskland, har utvecklats fem screening-test för fem olika årskurser och övergångar mellan årskurser. Dessa test är avsedda att ge lärare en överblick över elevernas matematiska färdigheter, med fokus på färdigheter som är nödvändiga för fortsatt lärande i matematik. Testerna passar att genomföra vid följande tillfällen:

1. Slutet av förskoleklass / början av årskurs 1
2. Slutet av årskurs 2 / början av årskurs 3
3. Slutet av årskurs 4 / början av årskurs 5
4. Slutet av årskurs 6 / början av årskurs 7
5. Slutet av årskurs 8 / början av årskurs 9

Vad är en screening?

En screening är en utvärdering som kan genomföras i helklass under en lektion. Screeningen resulterar i en första strukturerad översikt av vad eleverna redan klarar av och vad individuella elever behöver arbeta vidare med. Notera att screeningen inte ersätter en individuell process-orienterad kvalitativ bedömning av elevens samlade kunskaper i matematik. Screeningen utgör en utgångspunkt för att identifiera och följa upp elever som är i behov av extra stöd.

Vad får läraren ut av en screening?

- Snabb överblick: Vilka grundläggande färdigheter har eleverna och vilka färdigheter behöver individuella elever arbeta vidare med.
- Erbjuder anpassat stöd: Tidigt identifiera och stödja de elever som ännu inte har uppnått grundläggande kunskaper och färdigheter i matematik.
- Underlag för beslut om fördjupad diagnostisering: Resultaten från screening ger en första tydlig indikation om vilka elever som behöver följas upp med fortsatt diagnostisering, t.ex. genom detaljerade analyser av elevens kunskaper och färdigheter inom vissa områden eller uppföljande intervjuer.
- Stödja övergångar mellan årskurser: Uppmärksamma elevernas förkunskaper före och/eller efter övergång mellan årskurser.

Testerna är enkla att genomföra i ett vanligt klassrum, det finns tydliga instruktioner för hur de ska genomföras och de går snabbt att rätta. Läraren erbjuds både en sammanfattning av elevernas resultat på klassnivå och besked om vilka elever som behöver följas upp avseende specifikt innehåll. Med utgångspunkt i denna information kan läraren planera klassrumsundervisning med repetition, differentierad undervisning eller överbryggande uppgifter.

Denna handbok beskriver hur testen kan genomföras, vad de går ut på, hur testen är utformade, uppgiftstyper och utvalda områden för bedömning, hur resultaten kan tolkas. Dessutom redovisas hur undervisning och anpassat stöd kan utformas.

Testerna utgör verktyg för screening som är enkla att använda och har tydlig vetenskaplig grund. Resultaten ger lärare en snabb överblick över elevernas kunskapsläge och stödjer insatser för deras fortsatta lärande.

II. “Key skills” – nödvändiga för fortsatt lärande

Vi har i DiToM-projektet valt att rikta fokus mot färdigheter som är nödvändiga för fortsatt lärande i matematik. Denna ansats kräver att vi tar hänsyn till både matematikinnehålllets hierarkiska struktur och dess konsekvenser för lärande i matematik. Vi följer Gagné & Briggs, som betonar att lärande av specifikt innehåll i matematik bygger på ett minimum av nödvändiga förkunskaper. Varje sådan förkunskap benämner vi “key skill” med betoning på “key skill for...” för att förtydliga att färdigheten är nödvändig för lärande av centralt matematiskt innehåll som eleven kommer att möta senare i skolan. Till exempel att kunna hantera prioriteringsregler i aritmetiken som nödvändig förkunskap för att förstå och hantera algebraiska uttryck. Ett exempel: att kunna beräkna $14 + 2 \cdot 3$ enligt $14 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$ utgör en key skill för att korrekt kunna tolka $14 + 2 \cdot x$.

Vi utvecklar nedan vår syn på färdigheter i relation till andra former av kunskap.

Inom projektet skiljer vi till att börja med mellan *kompetenser och färdigheter*, som dock är nära sammanflätade begrepp. Kompetenser kan tolkas som beredskap att agera på ett produktivt sätt i en matematisk situation. Att upparbeta en sådan beredskap kräver förståelse för matematiska begrepp och relationer mellan begrepp. Kompetenser aktiveras i problemsituationer genom användning av färdigheter, t.ex. genom att eleven utför en procedur eller hanterar ett delproblem. Färdigheter behövs för att aktivera kompetenser och färdigheterna behöver kopplas till kompetenser för att eleven ska uppfatta dem som meningsfulla.

Färdighet och förståelse är två av många begrepp som också relaterar till kunskap. De två begreppen hänger nära samman med varandra, till exempel behöver man “förstå” (känna till) att 7 kan delas upp som $5 + 2$ innan man kan utföra beräkningen av $25 + 7$ enligt $25 + 5 + 2 = 30 + 2 = 32$. Att kunna utföra själva beräkningen kan tolkas som en färdighet, men den bygger alltså på förståelse för uppdelning av tal. Just denna färdighet, att skriva ett tal som en summa, krävs för att effektivt kunna generalisera sättet att beräkna och kan därför betraktas som en *key skill*. Att vi i projektet riktar fokus mot färdigheter inkluderar på detta sätt förståelse. Förståelsen skapar mening och när färdigheterna aktiveras utifrån förståelsen uppstår en meningsbärande aktivitet.

Key skills förekommer även på ett övergripande plan i matematiken, till exempel vid utvidgning av talområden. Exempelvis behöver eleverna i tidiga skolår arbeta med naturliga tal och de fyra räknesätten på ett varierat sätt, så att de vänjer sig vid uppdelning av tal, inversa operationer, positionssystemet, tallinjen, vilka utgör nödvändiga förkunskaper för att förstå och kunna utföra beräkningar med bråk och decimaltal. Med vetenskaplig terminologi kallas detta att “överbrygga epistemologiska hinder” vid lärande av nya matematiska begrepp (Brousseau, 1997).

Begreppet key skill har använts vid utveckling av screening-testen för att

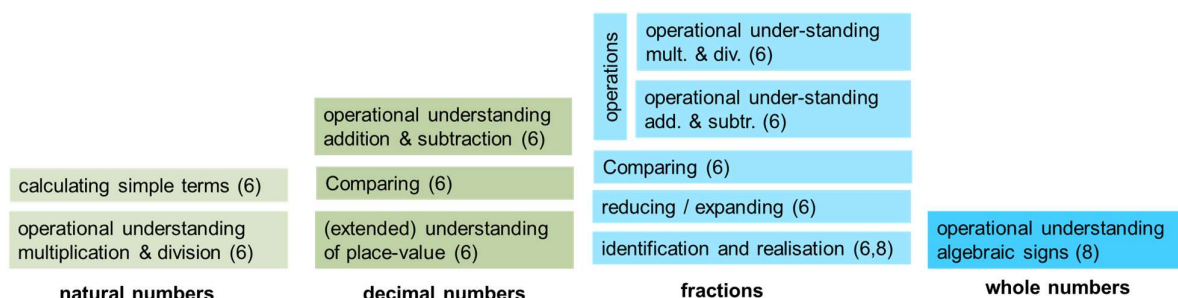
- representera nödvändiga förkunskaper för fortsatt lärande
- stödja uppgiftskonstruktion (key skills är specifikt innehållsrelaterade och synliggörs i specifika uppgifter)
- erbjuda lärare ett sätt att tänka och orientera sig om enskilda elevers lärande i matematik, för att kunna anpassa åtgärder och stöd för elevens fortsatta lärande.

Inom projektet har vi betraktat key skills som ett användbart begrepp, alltså inte enbart något som vi har lagt till för att uppnå teoretisk förankring. Begreppet är emellertid komplicerat inte minst på grund av att varje område inom matematiken har sina key skills som kanske bara framstår som kritiska i en viss fas av elevens lärande. Att en viss key skill saknas kanske inte upptäcks förrän i ett alltför sent skede. Vår ambition har varit att utforma uppgifter för att så tidigt som möjligt kunna identifiera elever som saknar vissa key skills och ge stöd till lärare att erbjuda anpassad undervisning till dessa elever.

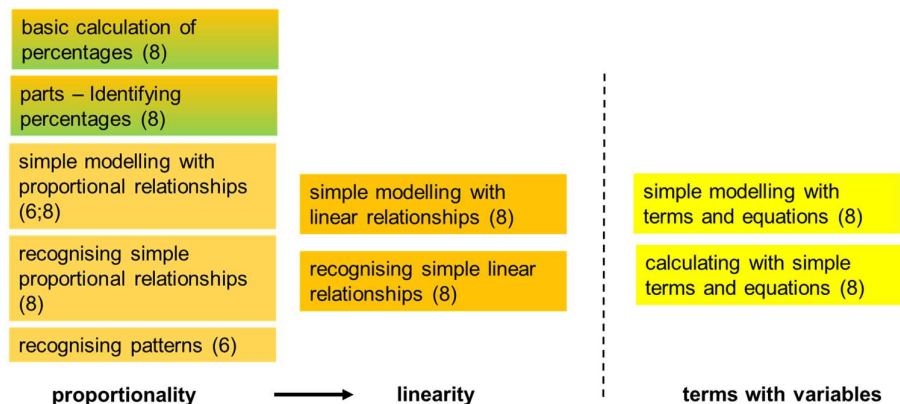
III. Struktur i testen för årskurs 6+ and 8+

Testen i DiToM är baserade på matematiskt innehåll inom aritmetik och algebra, inklusive prealgebra. Inom projektet har tagits hänsyn till den hierarkiska strukturen inom dessa områden.

Konstruktionen av uppgifter har utgått ifrån tre delområden: Tekniska beräkningar, Proportionalitet och linearitet, Algebra och prealgebra. Inom tekniska beräkningar har särskilt beaktats olika talområden (naturliga tal, bråk, decimaltal, negativa tal) och prealgebran har betraktats som en brygga mellan aritmetik och algebra på så sätt att aritmetiska färdigheter har kunnat användas för att lösa uppgifter med algebraisk karaktär. I diagrammet nedan visas hur innehållet i aritmetik i testen för årskurserna 6+ och 8+ har strukturerats. Testet för årskurs 6+ har konstruerats med utgångspunkt i testet för årskurs 4+, som till stor del handlar om naturliga tal. Om elever har stora svårigheter med aritmetiken i testet för 6+ rekommenderas att de använder testet för 4+.



Innehåll inom områdena proportionalitet, linearitet och prealgebra är både centrala innehåll i sig men utgör också en viktig grund för formell algebra (med användning av symboler). Diagrammet nedan visar hur dessa innehåll har strukturerats inom projektet.



IV. Genomförande av testen

Som stöd till lärare att genomföra testen finns både instruktioner för genomförande och förklaring av vad testen går ut på.

Förklara syftet med testet till elever och förtydliga hur testet kommer att användas

- Resultat på testet hjälper läraren och eleverna att få koll på vad eleverna kan och inte kan, så att både lärare och elever vet vad de behöver arbeta vidare med. Därför är det viktigt att eleverna arbetar på egen hand, utan hjälp.
- Resultatet på testet går inte på betyget.
- Betona vikten av att försöka lösa uppgifterna. Ju mer utförligt eleverna redovisar, desto enklare blir det att identifiera vad de kan – vilka färdigheter och svårigheter de har – och att hjälpa dem ta itu med svårigheterna.

Testets struktur

- Testet är uppdelat i tre delar, med flera uppgifter i varje del.
- Uppgifterna är oberoende av varandra.

Tidsåtgång

- Test 6+, rekommenderas 45 minuter: 15 för del 1, 10 för del 2, 20 för del 3.
- Test 8+, rekommenderas 40 minuter: 15 för del 1, 10 för del 2, 15 för del 3.
- Läraren avgör hur mycket tid som ska avsättas, ovanstående är bara en rekommendation.
- Informera innan testet börjar hur mycket tid som avsätts till de olika delarna.
- Informera om att läraren kommer att avbryta när tiden har gått ut.

Typer av uppgifter

- Uppgifter där eleven skriver ett svar och har utrymme att skriva sin lösning. Endast svaret bedöms vid rättning, men lösningen kan användas vid uppföljning av elevens arbete med uppgiften.
- Flervalsuppgifter: eleven väljer ett (eller flera) svar bland givna svarsalternativ. Informera eleverna att om de vill ändra sitt svar så kan de skriva "Nej" vid det svar de vill ta bort och "Ja" vid det nya svaret.

Genomförande av testet

- Miniräknare är inte tillåtna.
- Eleven kan använda ledigt utrymme på uppgiftsbladen till att anteckna och skriva lösningar.
- Eleverna kan arbeta igenom varje del av testet i sin egen takt. Om en elev har avslutat en av delarna ska eleven vänta på lärarens instruktioner innan eleven fortsätter med nästa del.

Lärares roll under testet

- Läraren kan svara på praktiska frågor om testet och dess genomförande men ska inte ge tips eller hjälpa eleverna att lösa uppgifterna. I annat fall uppnås inte syftet med testet.

V. Presentation av uppgifterna

Uppgift 1.1: Multiplikation and division

Uppgift 1.1

Skriv det tal som saknas.

a) $3 \cdot \underline{42} = 126$

c) $\frac{54}{\boxed{9}} = 6$

b) $172 = 4 \cdot \underline{43}$

d) $\frac{\boxed{81}}{3} = 27$

Några lösningar

- a) Det tal som saknas kan tolkas som 126 dividerat med 3. Beräkning av kvoten $126/3$ ger svaret 42.

Eller: Notera att $3 \cdot 40 = 120$ och $126 = 120 + 6$. Saknas $6 = 3 \cdot 2$.

Produkten 126 uppnås med faktorn $40 + 2 = 42$.

- b) Det tal som saknas kan tolkas som 172 dividerat med 4. Beräkning av kvoten $172/4$ ger svaret 43.

Eller: Notera att $160 = 4 \cdot 40$ och $172 = 160 + 12$. Saknas $12 = 4 \cdot 3$.

Resultatet 172 uppnås med faktorn $40 + 3 = 43$.

- c) Det tal som saknas kan tolkas antingen som resultatet av 54 dividerat med 6, eller som det tal som uppfyller likheten $6 \cdot \underline{\quad} = 54$. Talfakta $6 \cdot 9 = 54$ ger svaret 9.

- d) Det tal som saknas är 3 gånger större än 27. Svaret är alltså $3 \cdot 27 = 81$.

Eller: Prövning med 90 ger kvoten 30, som är 3 enheter större än 27. Kvoten 3 uppnås med 9 i täljaren. Kvoten 27 uppnås med $90 - 9 = 81$.

Key skill som testas i uppgiften

Denna uppgift riktar fokus mot elevernas förståelse av det strukturella sambandet mellan multiplikation och division. Varje deluppgift handlar om att bestämma ett okänt tal som kompletterar en multiplikation eller division, där två tal är givna. Exempelvis $3 \cdot \underline{\quad} = 126$. För att korrekt lösa en sådan uppgift, måste eleven identifiera vilka roller de tre talen har i den presenterade likheten och kunna växla mellan operationerna.

Eleverna behöver kunna tolka likhetstecknet inte enbart som en uppmaning att beräkna värdet av ett uttryck. De behöver också kunna tolka varje ekvationen som ett samband mellan tre tal och speciellt ett samband som kan formuleras om, från multiplikation till division eller tvärtom. Sådan operationell flexibilitet utgör en väsentlig del av fördjupad aritmetisk förståelse som behövs för att hantera mer avancerat matematiskt innehåll, exempelvis inom algebran när eleven ska lösa ekvationen $3 \cdot x = 126$.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att känna till och kunna hantera det inversa sambandet mellan multiplikation och division är en *key skill* för att kunna lösa ekvationer. Denna typ av förståelse och färdigheter behövs också för att kunna föra resonemang om proportioner, algebraiska uttryck och funktionssamband. Enligt DiToM:s ramverk betraktas sådana färdigheter som *key skills* eftersom avsaknad av dessa färdigheter kan försvåra eller till och med hindra fortsatt lärande inom centrala områden av matematiken. Elever som kan hantera en ekvation strukturellt, exempelvis förstå att uppgiften $3 \cdot __ = 126$ kan lösas genom att utföra divisionen $126/3$, visar mer än procedurell förståelse i och med att de även kan föra matematiska resonemang med utgångspunkt i den givna ekvationen. Att tidigt utveckla denna färdighet ger eleverna goda förutsättningar att senare i skolan hantera symboliska representationer och kunna lösa problem i flera steg.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever som ännu inte har lärt sig hantera sambandet mellan multiplikation och division visar ofta samma typ av missuppfattningar. Ett vanligt fel är att tolka alla ekvationer som uppmaning att beräkna något, exempelvis att felaktigt tolka ekvationen $172 = 4 \cdot __$ som en uppmaning att beräkna produkten $172 \cdot 4$.

Ett annat vanligt fel är att utföra beräkningar enbart baserade på talfakta: Om eleven enbart lyfter ut talen 27 och 3 ur ekvationen i deluppgift d och konstaterar att uppgiften handlar om division, ligger det nära till hands att dra den felaktiga slutsatsen att svaret är $27/3 = 9$. Eleven har då inte tagit hänsyn till de roller som talen 27 och 3 har i den givna ekvationen, alltså kvot respektive nämnare, och visar då på en svag förståelse för strukturell tolkning av likhetstecknet.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Det är viktigt att tidigt uppmärksamma eleverna på relaterade numeriska uttryck, till exempel $6 \cdot 4 = 24$, $24/4 = 6$ och $24/6 = 4$, för att lyfta fram att samma matematiska samband mellan tal kan uttryckas på olika sätt.

Läraren kan också uppmuntra elever att muntligt beskriva sina resonemang, exempelvis genom att fråga "Vilket tal, multiplicerat med 4, ger produkten 172?"

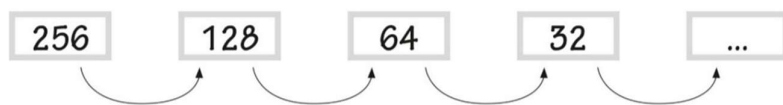
Ytterligare ett sätt att stärka den strukturella förståelsen är att variera positionen för det okända talet (första eller andra term i en multiplikation, täljare eller nämnare i den division). Samt att ibland byta ordning på vänster och höger led i ekvationen, så att multiplikationen eller divisionen ibland hamnar i vänster led och ibland i höger led.

Som ytterligare stöd kan läraren och eleven arbeta med visuella representationer som tallinjer, rutmönster och andra diagram där tal kan grupperas för att synliggöra en multiplikativ struktur (Polotskaia & Savard, 2021). Sådana modeller ger elever insyn i hur en kvantitet kan konstrueras av ett antal lika stora delar och hur den kan delas upp i ett antal lika stora delar, vilket illustrerar begreppen multiplikation och division.

Uppgift 1.2: Talmönster och regler för beräkning

Uppgift 1.2

Vilken regel kan användas för att fortsätta följden av tal?



- ☐ Subtrahera 32
- ☐ Subtrahera 128
- ☐ Dividera med 4
- ☒ Dividera med 2

Några lösningar

Eleven kan inleda med att testa vilka alternativ som möjligen är korrekta genom att utföra de föreslagna operationerna med vilket som helst av de första tre talen, exempelvis det första talet 256:

$$256 - 32 = 224 \text{ (inte lika med 128, så det första alternativet är inte korrekt)}$$

$$256 - 128 = 128 \text{ (stämmer med det givna talet i andra rutan)}$$

$$\frac{256}{4} = 64 \text{ (inte lika med 128, så detta alternativ är inte heller korrekt)}$$

$$\frac{256}{2} = 128 \text{ (stämmer med det givna talet i andra rutan)}$$

Nu vet vi att endast andra och fjärde alternativet ger en talföljd som börjar 256, 128, ... Vi testar dessa alternativ med utgångspunkt i talet 128, för att se vilket tredje tal de genererar:

$128 - 128 = 0$ och $\frac{128}{2} = 64$. Endast den sista beräkningen stämmer (med det tredje talet). Det enda återstående alternativet (division med 2) bekräftas med det tredje talet 64, som ger kvoten $\frac{64}{2} = 32$. Alltså är alternativ 4 (division med 2) det korrekta svaret.

Uppgiften kan också lösas genom att subtrahera och dividera intilliggande tal:

$$256 - 128 = 128, \quad 128 - 64 = 64, \quad 64 - 32 = 32$$

$$\frac{256}{128} = 2, \quad \frac{128}{64} = 2, \quad \frac{64}{32} = 2$$

Att kvoten mellan ett givet tal och nästa tal är lika med 2 betyder att det nästa talet är hälften av det givna talet. Alltså är alternativ 4 (division med 2) det korrekta svaret.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att identifiera och beskriva mönstret i en talföljd.

Det specifika exemplet (256, 128, 64, 32, ...) kräver att eleven identifierar en så kallad geometrisk talföljd (talföljd med multiplikativ struktur) där varje nytt tal kan tas fram genom att dividera föregående tal med 2. Eleven erbjuds att välja mellan fyra alternativ, som eleven kan testa genom att tillämpa de regler som beskrivs. Färdigheten som testas är elevens förmåga att identifiera en multiplikativ struktur. Alltså inte att enbart procedurellt utföra givna beräkningar. Eleven väljer själv vilka beräkningar som ska utföras (med stöd av alternativen) för att undersöka talföljdens matematiska struktur. Lösningen kräver att eleven klarar av att föra strukturella resonemang och kräver ett algebraiskt tänkande som behövs i grundskolans senare år.

Varför är den här färdigheten en key skill?

Förmågan att identifiera regelbundenhet i talmönster är en matematisk *key skill* eftersom den utgör en grund för att förstå och hantera matematiska begrepp som funktioner, algebra och proportionella resonemang. Elever som kan identifiera regler för talföljder har goda förutsättningar att senare klara av generaliseringar och symboliska resonemang. Enligt matematikdidaktisk forskning (t.ex. Kieran 2018, Radford 2013) så stöder mönstreigenkänning utveckling av relationell förståelse för tal och operationer. Inom DiToM-ramverket ser vi identifiering av numeriska strukturer som en viktig förutsättning för att hantera den ökade abstraktion som eleverna möter i grundskolans senare år och i gymnasieskolan. Elever som kan förstå och hantera geometriska talföljder är väl förberedda för innehåll som procentuell förändring och exponentiella samband.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

En vanlig missuppfattning är antagandet att alla talföljder har en additiv struktur. Eleven kan felaktigt anta att talen i talföljden minskar med samma värde och kan välja det felaktiga alternativet "subtrahera 32" baserat på (den enklaste) beräkningen $64 - 32 = 32$. Elevens alltför snabba slutsats, utan att kontrollera om alternativet också gäller för de andra talparen, tyder på att eleven ännu inte klarar av att generalisera mönster och att genomföra strukturerade resonemang i flera steg. Det kan handla om en så kallad *linear bias*, att eleven tolkar alla talmönster som linjära mönster, vilket kan orsaka problem när eleven möter talmönster som inte är linjära.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårt att identifiera talmönster kan erbjudas strukturerade uppgifter som specifikt kontrasterar additiva och multiplikativa strukturer. Visuella representationer, exempelvis att kontrastera kedjor av tal med trädstrukturer kan hjälpa eleverna att identifiera aritmetiska och geometriska strukturer där antalet objekt definierar respektive talföljd. Elever kan få i uppdrag att konstruera talföljder utifrån givna regler, med givna startvärden eller startvärden som de själva väljer. Exempelvis "skapa en talföljd där nästa tal är 3 enheter större än det föregående talet" jämfört med "skapa en talföljd där nästa tal är tre gånger större än det föregående talet". I nästa steg kan eleverna få i uppgift att formulera egna regler och undersöka vilka tal som genereras av regeln.

Lärare kan uppmuntra elever att resonera muntligt, så att både eleverna och läraren bättre kan förstå hur de tänker. Att explicit redogöra för eget tänkande stödjer metakognitiva processer där såväl korrekta som felaktiga strategier kan synliggöras och utvecklas.

Över tid kan talmönster kopplas till verkliga situationer (exempelvis pappersvikning och bakterietillväxt) för att ytterligare stärka elevens uppfattning om begreppet geometrisk talföljd och exponentiell utveckling.

Uppgift 1.3: Använda prioriteringsregler

Uppgift 1.3

Beräkna:

$$14 + 2 \cdot 3 = \underline{20}$$

Lösning

Notera att multiplikation har prioritet över addition.

Först ska beräknas produkten $2 \cdot 3 = 6$. Därefter beräknas additionen $14 + 6 = 20$.

Utfört i en enda beräkning:

$$14 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$$

Många elever klarar av att utföra denna beräkning som huvudräkning.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förståelse och färdigheter avseende matematiska konventioner om prioritering, speciellt att multiplikation har prioritet över addition. Eleverna måste tolka och hantera uttrycket " $14 + 2 \cdot 3$ " genom att först utföra multiplikationen $2 \cdot 3$ och sedan addera talet 14 till produkten. Detta förfarande kräver att eleven är insatt i och kan tillämpa aritmetikens prioriteringsregler dvs den hierarkiska strukturen i aritmetiska operationer, vilket behövs för att eleven ska förstå och kunna hantera algebraiska uttryck med liknande struktur exempelvis $14 + 2 \cdot x$. Att utföra beräkningen $14 + 2 \cdot 3$ förutsätter att eleven klarar av att tolka och dela upp ett matematiskt uttryck med flera operationer och kan strukturera beräkningar enligt denna uppdelning.

Varför är den här färdigheten en key skill?

Att känna till och kunna hantera matematikens prioriteringsregler i uttryck med endast två operationer är en viktig förkunskap för att kunna hantera komplexa uttryck med fler operationer. Denna förkunskap behövs även senare då eleven möter algebraiska uttryck och ekvationer. Inom DiToM-ramverket betraktas förmågan att hantera beräkningar i flera steg och i enlighet med prioriteringsregler som en key skill eftersom den utgör en nödvändig grund för algebraiska resonemang och problemlösning, där problemsituationer ska hanteras. Elever som känner till och kan hantera prioriteringsreglerna kan tolka och behandla uttryck så att de undviker misstag i samband med förenklingar och beräkningar. Denna förmåga behöver utvecklas inom aritmetiken för att kunna användas med säkerhet inom algebran i arbete med uttryck, formler och funktionsuttryck.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt fel är att utföra operationerna från vänster till höger dvs att först utföra additionen $14 + 2 = 16$ och därefter multiplicera med 3, vilket leder till det felaktiga svaret 48. Detta misstag avslöjar bristande kunskap om och/eller förmåga att hantera matematikens prioriteringsregler. En förklaring kan vara bristande uppmärksamhet, att eleven "gör det som står först" utan att tänka efter och ägna tid åt att tolka uttrycket och dess matematiska struktur.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som inte klarar av att hantera matematikens prioriteringsregler bör erbjudas att arbeta med uppgifter som synliggör dessa regler, exempelvis genom att använda färgkodning, parenteser eller visuella representationer som visar hur talen grupperas. Läraren kan hjälpa eleven att strukturera beräkningar i flera steg och be eleven att redogöra muntligt för sina resonemang. Exempelvis: "Jag beräknar först 2 gånger 3 eftersom multiplikation ska räknas före addition. Sedan adderar jag 14." Ett sådant resonemang kan med fördel redovisas i en bild som visar två grupper med tre objekt vardera och 14 objekt vid sidan av: "Hur många objekt är det i bilden och hur kan beräkningen utföras på ett effektivt sätt?" Resonemanget kan generaliseras till fler grupper och fler objekt, så att den effektiviteten (att först utföra multiplikationen) synliggörs. Strukturen $14 + 2 \cdot 3 = 14 + (2 \cdot 3) = 20$ kan gärna kontrasteras mot $(14 + 2) \cdot 3 = 48$, för att synliggöra att det är viktigt att ägna tid åt att tolka ett uttrycks struktur innan dess värde beräknas. Många elever jäktar för att hinna med så många uppgifter som möjligt men måste öva på att också ägna tid åt tolkning och strukturerad reflektion.

Uppgift 1.4: Beskrivande text till matematiskt uttryck

Uppgift 1.4

Tom följer instruktionerna:

Talet 4 adderas med talet 5.

Resultatet multipliceras med 8.

Vilken beräkning kan Tom använda för att ta fram svaret?

- ☐ $5 + 4 \cdot 8$
- ☒ $(5 + 4) \cdot 8$
- ☐ $5 + (4 \cdot 8)$
- ☐ $5 \cdot 8 + 4$

Lösning

Resultatet av den första instruktionen *Talet 4 adderas med talet 5* kan uttryckas som $5 + 4$.

Den andra instruktionen *Resultatet multipliceras med 8* kräver att hela uttrycket $5 + 4$ multipliceras med 8.

Pparenteser kring $5 + 4$ garanterar att hela uttrycket multipliceras med 8. Svaret är $(5 + 4) \cdot 8$.

Eftersom addition och multiplikation är kommutativa operationer, är även följande svar korrekta:

$$(4 + 5) \cdot 8, \quad 8 \cdot (5 + 4), \quad 8 \cdot (4 + 5)$$

Om eleven kommer fram till något av dessa svar måste eleven identifiera att det andra alternativet $(5 + 4) \cdot 8$ är ett ekvivalent svar.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att först tolka kortfattade instruktioner som beskriver två operationer som ska utföras efter varandra – först addition, sedan multiplikation – och sedan sammanfatta resultatet av dessa instruktioner med ett symboliskt uttryck. Eleverna ska inte beräkna resultatet utan förväntas identifiera en korrekt symbolisk representation av resultatet. En försvårande omständighet är att de skriftliga instruktionerna och den symboliska representationen inte är semantiskt kongruenta (Vergnaud 1983). Eleven måste identifiera ordningen av de matematiska operationerna utifrån de skriftliga instruktionerna och konstruera ett passande uttryck. Den *key skill* som testas kan beskrivas som översättning av skriftliga instruktioner till ett symboliskt uttryck, något som är vanligt förekommande vid problemlösning där problemsituationen beskrivs i text. Uppgiften testar också elevens förmåga att använda parenteser för att skapa uttryck som bevarar den matematiska struktur som beskrivs i instruktionerna.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Förmågan att symboliskt representera språklig eller kontextuell information behövs i samband med matematisk problemlösning och är en viktig del av matematisk litteracitet. Inom DiToM-ramverket betraktas motsvarande färdighet som en *key skill* eftersom den möjliggör för eleven att växla mellan olika representationsformer – språklig, symbolisk, ikonisk, diagrammatisk – för att kunna hantera problemsituationer och för att utveckla förståelse för matematiska strukturer (Kieran & Martínez-Hernández, 2022). Förmågan att växla mellan representationsformer behövs även inom algebran, där eleverna regelbundet möter problemsituationer som behöver representeras på ett specifikt sätt för att kunna hanteras. Eleven behöver tidigt arbeta med att växla

mellan olika representationsformer för att bygga upp problemlösningsförmåga och förmåga att arbeta med matematiska modeller.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Den andra instruktionen *Resultatet multipliceras med 8* kräver att hela uttrycket $5 + 4$ (eller $4 + 5$, vilket också är korrekt) multipliceras med 8. Det räcker inte att skriva $5 + 4 \cdot 8$, eftersom det leder till att endast 4 multipliceras med 8. Ett sådant misstag reflekterar svårigheten att tolka skriftliga instruktioner med matematiska uttryck. Eller så kan det bero på att eleven underskattar svårigheterna i uppgiften och inte ägnar tillräcklig uppmärksamhet åt att tolka informationen. Vidare finns det elever som inte skriver ut parenteser men tänker rätt när de beräknar värdet av uttrycket. I ett sådant fall har eleven gjort en korrekt tolkning men saknar förmåga att uttrycka denna tolkning med talsymboler. Dessutom finns det elever som har gjort en felaktig tolkning av uppgiften och tror att de förväntas beräkna uttryckets värde och skriver (eller tänker) $4 + 5 = 9$ följt av $9 \cdot 8 = 72$, utan att ta hänsyn till svarsalternativen. "Fel svar" kan alltså ha flera orsaker och därför kan elevers misstag behöva analyseras på individuell nivå.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Generellt behöver elever upparbeta förståelse för operationer som utförs efter varandra. Först, för att kunna beräkna värdet av sådana uttryck, som i uppgift 1.3. Om eleven inte klarar av sådana uppgifter bör läraren backa tillbaka dit (t.ex. beräkna $14 + 2 \cdot 3$) innan eleven börjar träna på att teckna egna uttryck som sammanfattar givna instruktioner. Inledningsvis kan läraren ge eleven instruktioner som inte kräver särskild hänsyn till prioriteringsregler och inte heller parenteser, till exempel "först multiplikation, sedan addition", för att vänja sig vid problemtypen. Samtidigt kan eleven träna på att utföra beräkningar med och utan parenteser (jämför stöd till uppgift 1.3) för att utveckla förståelse om parentesers betydelse i matematiska uttryck.

Läraren kan visa hur information om operationer kan tolkas med stöd av träd-diagram eller flödesscheman, som tydliggör ordningen mellan operationerna. Tillfällig "överanvändning" av parenteser – t.ex. skriva $14 + (2 \cdot 3)$ – kan passa i ett sådant sammanhang, särskilt om eleven ännu inte klarar av att hantera prioriteringsreglerna.

En annan klassisk didaktisk metod är att vända på uppgiften och be eleven beskriva givna symboliska uttryck med språkligt formulerade instruktioner, gärna uttryck som kräver instruktioner i två steg. Detta kan med fördel göras både skriftligt och muntligt eller inledningsvis bara på det ena sättet om eleven föredrar det. Det gäller ju att få eleven intresserad och att eleven blir bekräftad av att ha lyckats lösa några uppgifter innan eleven utmanas med andra typer av uppgifter.

Uppgift 1.5: Bestämma okänd kvantitet i en problemsituation presenterad i text och bild

Uppgift 1.5

Bilden visar kulor och lådor som ligger på två bord.

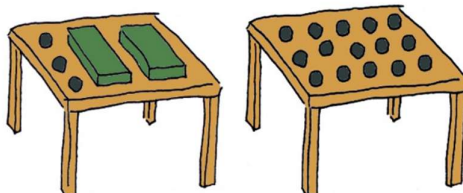
Varje låda innehåller lika många kulor.

Det är lika många kulor på båda borden.

Hur många kulor är det i varje låda?

Bord 1

Bord 2

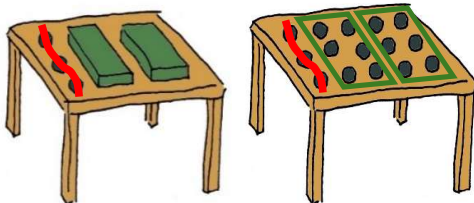


Svar: 6

Några lösningar

Uppgiften kan lösas med formella eller informella metoder.

Ett exempel på informell metod är att lösa uppgiften genom att rita direkt i bilden. Börja med att stryka ("ta bort") tre kulor och sedan gruppera ("ringa in") de återstående 12 kulorna på bord 2 i två grupper med 6 kulor vardera. Då ser vi med stöd av bilden att varje låda måste innehålla 6 kulor, vilket alltså är svaret.



Resonemanget kan också stödjas av beräkningarna $15 - 3 = 12$ och $12/2 = 6$.

Notera att åtgärderna med borttagning och gruppering kan genomföras antingen direkt i bilden, med huvudräkning, eller med stöd av beräkningar.

Alternativt kan uppgiften lösas genom att eleven prövar värden tills eleven hittar ett värde som stämmer. Sådan prövning kan göras med huvudräkning eller med stöd av beräkningar, som kan redovisas i en tabell:

Number of marbles in one box	3	4	5	6 ✓
Total on Table 1	9	11	13	15
Total on Table 2	15	15	15	15

En formell lösning med ekvationer kan rimligen inte förväntas av elever i årskurs 6+. Om x betecknar antalet kulor i en låda så kan problemsituationen hanteras med ekvationen $2x + 3 = 15$, som kan lösas med algebraiska metoder (först subtrahera 3 i båda leden, sedan dividera med 2 i båda leden).

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften är av en typ som kallas *prealgebra*. Med detta menas att den förbereder för den algebra som kommer senare i skolan. Den testar elevers förmåga att tolka och hantera en problemsituation som beskriver likhet mellan två storheter, där en av storheterna beskrivs i två delar. Eleverna ser bilder på två bord, på det ena bordet finns 15 lösa kulor och på det andra bordet finns 3 lösa kulor samt kulor dolda i två lådor (med lika många kulor i varje låda). Att kunna hantera en sådan problemsituation med informella metoder är en *key skill* för att senare kunna hantera ekvationer med algebraiska metoder. De informella metoderna (stryk 3, dela upp i 2 grupper) speglar de formella metoder som används för att lösa ekvationen $2x + 3 = 15$ (subtrahera 3, dividera med 2). Den här typen av uppgifter utvecklar strukturella resonemang, algebraiskt tänkande och förmåga att tolka ekvivalens i ett icke-symboliskt sammanhang.

Varför är den här färdigheten en key skill?

Att kunna tolka och hantera likhet och ekvivalens är en kritisk del av algebraiska resonemang. Inom DiToM-ramverket betraktas denna färdighet som en *key skill* eftersom den är avgörande för att eleven ska utveckla förståelse för ekvivalens och omskrivningar som är av central betydelse både i aritmetik och algebra. Genom att resonera om att två olika uppställningar måste innehålla samma antal, tränar eleverna relationellt tänkande på ett sätt som går utöver direkta beräkningar (Radford 2014). Denna *key skill* bidrar till att utveckla elevens problemlösningsförmåga och hjälper eleven genomföra balanserande förändringar och att arbeta med okända kvantiteter i symbolisk form.

Att arbeta med ekvationer utan att behöva införa symboler ger fler elever möjlighet att förstå det matematiska innehållet på ett begreppsligt tillgängligt sätt, som i denna uppgift med utgångspunkt i en problemsituation beskriven i ord och bild. Denna typ av prealgebra stödjer övergången från aritmetik till algebra genom att uppgifter av algebraisk karaktär kan lösas enbart med aritmetiska metoder.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever kan ha svårt att tolka uppgiften. I bilden visas $3 + 15 = 18$ kulor och 2 lådor, vilket kan leda till det felaktiga svaret 9. En sådan felaktig lösning kan bero på att eleven ännu inte har lärt sig hantera likhet och ekvivalens. Elever kan också dra alltför snabba slutsatser och gissa antalet kulor i en låda, t.ex. "lådor brukar innehålla 10", utan att kontrollera om gissningen stämmer med den givna informationen. Det finns också elever som nöjer sig med att beskriva vad de ser: "3 kulor och 2 lådor på ena bordet, 15 kulor på det andra bordet". Då har de ändå räknat något. I detta fall handlar det om bristande förmåga att tolka uppgiften, att det är en specifik kvantitet (antalet kulor i en låda) som ska bestämmas.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever kan behöva arbeta med laborativt konkretiserande material både för att utveckla förmåga att tolka problemsituationer och för att utveckla förståelse för likhet och ekvivalens. Lärare kan presentera problem situationer i form av muntliga berättelser, t.ex. "båda barnen har lika många kulor – hur många är det i en låda?" I exemplet presenteras uppgiften i en personlig kontext (plötsligt är "barnen" med i uppgiften), vilket kan vara mer tilltalande för eleverna och öka deras engagemang i att lösa uppgiften (de vill ju hjälpa barnen). Att använda informella ekvationer t.ex. $3 + \text{lådorna} = 15$, kan rikta fokus mot matematiken i uppgiften och nya frågor till eleverna: "hur mycket är det tillsammans i lådorna om $3 + \text{lådorna} = 15$?" med följdfrågan "nu när vi vet att lådorna = 12, hur mycket är det då i en låda?" Denna typ av frågor stimulerar eleverna att tänka aritmetiskt: $3 + ___ = 15$. Även att fylla i det tal som saknas är en form av prealgebra.

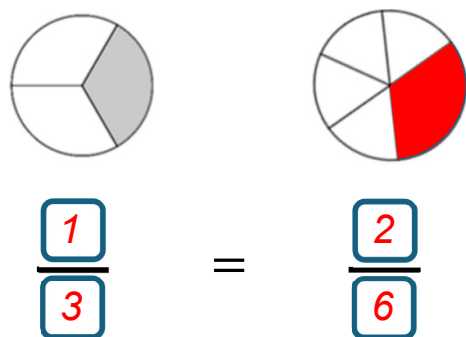
Elever som gissar utan att pröva bör uppmanas just att pröva sina gissningar: "kolla om det stämmer med 10, hur många kulor är det då på bord 1?". Att prövning inte är en generell metod för att lösa ekvationer ska inte hindra vare sig eleven eller läraren att uppmana till prövning, som är ett sätt att förstå likhet (och olikhet).

Uppgift 2.1: Representera och tolka lika stora bråk

Uppgift 2.1

Skugga lika stor andel av cirkeln till höger.

Skriv de skuggade andelarna som en likhet mellan bråk.



Lösning

Den skuggade delen i cirkeln till höger ska ha samma proportion del-till-helhet som i cirkeln till vänster.

Eftersom proportionen del-till-helhet i cirkeln till vänster är 1:3, så måste proportionen i cirkeln till höger vara 2:6. (Denna slutsats kan motiveras intuitivt: Om vi delar en rund tårta i sex bitar istället för tre bitar, så utgör 2 av 6 bitar lika mycket tårta som 1 av 3 bitar.)

Vi kan genomföra omskrivningen formellt genom att förlänga bråket $\frac{1}{3}$ med faktorn 2:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar förmågan att identifiera och konstruera lika stora bråk med utgångspunkt i två olika representationsformer: först i visuell/diagrammatisk form (skugga del av cirkel) och sedan i symbolisk form (teckna en likhet mellan bråk). Den *key skill* som adresseras i uppgiften handlar om att representera bråk på olika sätt och koordinera förståelse för del-helhet med lika stora symboliskt beskrivna bråk.

Uppgiften testar elevens förmåga att tolka proportioner del:helhet i en figur med symboliska representationer som bråk.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att förstå och kunna hantera ekvivalenta bråk är nödvändigt för att förstå rationella tal. Färdigheten är en *key skill* för att kunna utföra operationer med bråk, vilket i sin tur är en *key skill* för att kunna utföra operationer i algebraiska uttryck och speciellt rationella uttryck. Färdigheten används i proportionella resonemang, i samband med skala i geometri och vid problemlösning i både aritmetik och algebra, speciellt i problemsituationer där något ska fördelas rättvist (vilket nästan alltid innebär proportionellt). Inom DiToM-ramverket betraktas förmågan att tolka bråk som både tal och proportion som nödvändigt för att utveckla flexibilitet i aritmetiskt tänkande. Elever måste förstå att bråk inte enbart är tal utan också kan tolkas som ett förhållande mellan del och helhet, samt att

detta förhållande bevaras när täljare och nämnare skalas upp eller ner med samma faktor. Uppgifter som kombinerar visuella (diagrammatiska) och symboliska representationer stärker elevers problemlösningssförmåga och bidrar till att utveckla elevers förståelse för abstrakta resonemang.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt misstag är att skugga lika många delar i figuren till höger, alltså 1 del av 6, alltså att matcha antalet delar utan att ta hänsyn till den givna proportionen 1:3. Ett sådant misstag tyder på svaghet i relationellt tänkande, att eleven ser täljaren som något statiskt som inte kan ändras snarare än som del av en hel. Detta kan leda till en kognitiv konflikt när eleven ska teckna likhet mellan bråk, om eleven betraktar även nämnaren som statisk (eleven ser 6 delar men känner sig tvingad att skriva 3 i nämnaren). Eleven kan hantera denna konflikt genom att skugga en del av sex men skriva $1/3 = 1/3$ nedanför bilderna, alltså utan koppling mellan bild och likhet. Ett annat sätt att hantera konflikten mellan bild och likhet kan vara att skriva $1/3 \neq 1/6$ vilket i och för sig är sant men inte ett korrekt svar på uppgiften.

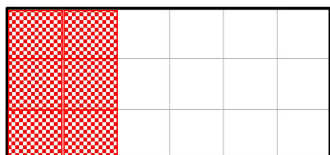
Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

För att utveckla god förståelse för ekvivalenta bråk behöver elever tidigt arbeta med laborativt material (t.ex. bråkremsor, bråkstavar, tallinjer graderade med bråk) och visuella diagram (t.ex. cirklar indelade i lika stora sektorer, rektanglar indelade i lika stora mindre rektanglar, rutmönster med lika stora rutor). Exempelvis kan lärare och elev med utgångspunkt i ett rutmönster med 5×6 rutor resonera sig fram till att $1/6 = 5/30$ och $1/5 = 6/30$ utifrån den grundläggande principen att det ska vara lika mycket på båda sidorna av likheten, utifrån en tolkning i rutmönstret. Vi återkommer till uppmaningen att be elever att muntligt beskriva och motivera sina svar, exempelvis "jag dubblade antalet delar i bråket och jag skuggade dubbelt så många (eftersom de var hälften så stora)". I ett sådant svar bör läraren ha överseende när eleven säger "antalet delar i bråket" eller komplettera med ett förtydligande "ja, jag ser att du dubblade både täljare och nämnare vilket är helt korrekt". Alla typer av aktiviteter som stärker kopplingen mellan visuell och algebraiska representation bidrar till att stärka elevens förmåga att hantera och växla mellan dessa representationer.

Uppgift 2.2: Skugga given andel av en rektangel

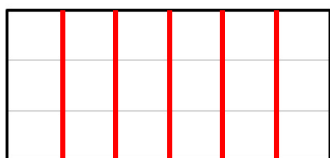
Uppgift 2.2

Skugga $\frac{2}{6}$ av rektangeln:

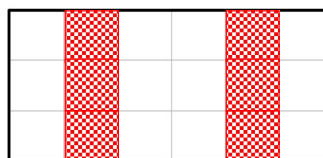


Lösning

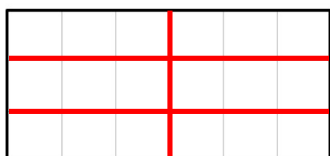
Den lösning som redovisas ovan baseras på att rektangeln delas in i sex lika stora delar (kolumner) och att två av dessa delar skuggas.



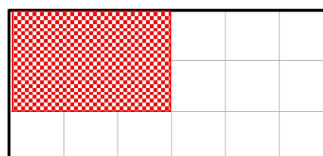
Också ett korrekt svar:



Eleven kan välja andra sätt att dela in rektangeln i sex lika stora delar, till exempel:

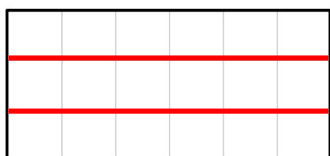


Också ett korrekt svar:

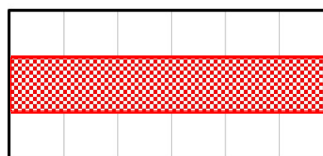


Varje svar som skuggar 6 av de 18 små rutorna är korrekt, eftersom $\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$.

Det är också korrekt att tolka $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ och skugga en del av tre.



Också ett korrekt svar:



Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att konstruera en visuell (diagrammatisk) representation av ett givet bråk genom att skugga en del av en rektangels yta. Det givna bråket tolkas som en proportion 2: 6 i handling när eleven skuggar en yta som utgör två delar av sex. Eleven måste uppfatta att täljaren 2 motsvarar antalet delar som ska skuggas och att nämnaren 6 motsvarar det totala antalet delar (som måste vara lika stora).

Att genomföra dessa tolkningar och omsätta dem i handling är en *key skill* för att utveckla förståelse och färdighet för att hantera bråk i olika typer av problemsituationer med linjära ekvationer, linjära funktioner (speciellt riktningskoefficient) och problemlösning (speciellt procent).

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att växla mellan olika representationer av bråk (proportioner, täljare/nämnare, visuellt i bilder) och förstå likhet mellan bråk bidrar till att stärka elevens uppfattning av begreppet bråk och gör att eleven kan använda bråk som ett kraftfullt flexibelt verktyg vid problemlösning och för att ta sig an andra områden inom matematiken.

Att visuellt kunna representera ett bråk är en *key skill* för att utveckla relationellt och proportionellt tänkande, samt för att koppla samman informell och formell kunskap. Inom DiToM-ramverket motiveras denna *key skill* som utgångspunkt för att utveckla fördjupad förståelse för ekvivalens och likhet, samt även som stöd för att förstå och kunna hantera operationer med bråk. I förlängningen också som en *key skill* för att utveckla algebraiskt tänkande.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Vanligt förekommande fel är att dela in i felaktigt antal delar eller delar som inte är lika stora, eller att skugga fel antal delar. Sådana fel kan antingen bero på slarv eller att eleven inte har uppfattat vilka krav som gäller för uppdelning av en helhet när ett bråk ska representeras: Delarna ska vara lika stora, antalet delar ska vara lika med bråkets nämnare, antalet skuggade delar ska vara lika med bråkets täljare. Inom rektangeln syns 18 små rutor och eleven kanske nöjer sig med att skugga 2 av dessa, vilket leder till ett felaktigt svar. Ett annat "fel" kan vara att eleven skuggar på känsla "ungefär två sjättedelar" utan att på ett tydligt sätt dela in rektangeln i delar. Ett sådant förfarande behöver inte bero på bristande förståelse utan kan också bero på att eleven inte har uppfattat lärarens förväntningar på hur noggrant uppgiften ska lösas.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som behöver utveckla relationellt tänkande inom området bråk kan erbjudas att arbeta med laborativt material, exempelvis bråkremsor, bråkstavar, tallinjer graderade med bråk och visuella diagram (t.ex. cirklar indelade i lika stora sektorer, rektanglar indelade i lika stora mindre rektanglar, rutmönster med lika stora rutor).

Läraren kan ge struktur för elevens arbete genom att dela upp uppgifter med laborativt material i steg, där det första steget handlar om att identifiera vilket bråk det handlar om (detta steg kan hoppas över, om inget speciellt bråk är givet i uppgiften). Viktigt att sedan bestämma vad som ska räknas som en helhet. Helheten delas sedan in i ett antal (lika stora!) delar, vilket bestäms av uppgiften, läraren eller eleven själv beroende på vilket bråk som ska representeras. Processen blir särskilt tydlig i arbete med bråkremsor, där eleven kanske väljer att representera helheten med en 24 cm lång remsa. Då blir det enkelt att representera både halvor (12 cm), tredjedelar (8 cm), fjärdedelar (6 cm) och sjättedelar (4 cm). Att engagera eleven i konstruerande aktiviteter av denna typ resulterar i så kallad kognitiv aktivering som är gynnsam för elevens lärande och fortsatta utveckling. Läraren kan naturligtvis ge stöd till eleven och utmana med förslag och ytterligare uppgifter men bör undvika att styra elevens arbete om det inte behövs. Eleven bör uppmuntras att dokumentera sina slutsatser med symbolisk notation, för att stärka kopplingen mellan aktivitet och formell matematik.

Uppgift 2.3: Proportionella resonemang med kvantiteter och priser

Uppgift 2.3

2 kg potatis kostar 5 euro. Bestäm priset för 6 kg potatis.

Svar: 15 euro

Lösning

Den elev som inser att 6 kg är 3 gånger så mycket som 2 kg kan direkt dra slutsatsen att 6 kg kostar 3 gånger så mycket som 2 kg. Priset för 6 kg är därmed $3 \cdot 5 = 15$ euro.

Ett sådant proportionellt resonemang kan stödjas av semi-formell notation, exempelvis

$$\begin{array}{l} 2 \text{ kg} \rightarrow 5 \text{ €} \\ 6 \text{ kg} \rightarrow ? \text{ €} \end{array} \quad \cdot 3 \quad \begin{array}{l} 2 \text{ kg} \rightarrow 5 \text{ €} \\ 6 \text{ kg} \rightarrow ? \text{ €} \end{array} \quad \cdot 3$$

Mer formellt:

$$\frac{5}{2} = \frac{?}{6} \quad \text{eller} \quad \frac{5}{2} = \frac{x}{6}$$

Uppgiften kan även lösas med stöd av en tabell, som kan konstrueras med utgångspunkt i proportionen 2:5.

Vikt (kg)	2	4	6
Pris (euro)	5	10	15

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att resonera proportionellt med multiplikation i en problemsituation som beskriver samband mellan kvantiteter (i detta fall vikter) och priser. Uppgiften kräver att eleven gör tolkningen att priset är proportionellt mot vikten, trots att det inte står i uppgiften. Eleven behöver kunna hantera proportionen vikt:pris = 2:5 (eller pris:vikt = 5:2) genom att antingen direkt skala upp proportionen till 6:15 eller genom att först skala ner till enheten 1:2,5 och sedan skala upp till 6:15. Att kunna skala en proportion är en *key skill* för problemlösning med proportionella samband, både i den aktuella årskursen och senare i skolan, exempelvis inom procenträkning.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Proportionella resonemang och proportionella samband förekommer i flera områden inom matematiken, inte enbart inom aritmetiken utan också inom algebra, funktioner, geometri samt inom naturvetenskap och teknik. Eleven grundlägger sin förståelse för proportioner och proportionella samband i aritmetiken genom att behandla en given proportion genom skalning (multiplikation eller division av båda storheterna med samma tal). I denna uppgift krävs just att eleven kan skala en proportion, vilket alltså är en *key skill* för att förstå och hantera proportionella samband. Elever som kan använda skalning av proportioner på ett flexibelt sätt (t.ex. dubbla, halvera, skala till enheten) har goda förutsättningar att lösa problem där det finns proportionella samband.

Arbete med proportioner utgör också en förskjutning från additiva till multiplikativa resonemang, vilket eleven behöver vänja sig vid för att komma vidare i sitt matematiska lärande inom flera områden utöver aritmetiken.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande fel är att anta ett additivt samband mellan storheterna: Om 2 kg kostar 5 euro, så kostar $2 + 4 = 6$ kg $5 + 4 = 9$ euro. Eleven använder sig av givna värden men kan inte hantera sambandet mellan värdena. Ett annat fel är att enbart utgå ifrån priset 5 euro och multiplicera med 6, vilket ger det felaktiga svaret $5 \cdot 6 = 30$ kg. Den strategin fungerar när kilopriset är givet, men inte i denna uppgift där priset 5 euro gäller för 2 kg. Eleven kanske gissar i stället för att räkna: "Det måste kosta mer än 5 euro, typ 10 euro?" Ett sådant svar är emellertid inte helt fel eftersom säljaren av potatis kanske tillämpar mängdrabatt. Eleven förväntas dock känna till vad som förväntas som lösning och svar i matematiklassrummet. Elever som inte kan redogöra för sina strategier eller förlitar sig på uppskattningar eller rena gissningar saknar ofta fungerande begreppsliga modeller för proportionalitet.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

När det gäller proportionella samband gynnas elevers lärande av uppgifter som kopplas till vardagliga situationer där sådana samband förekommer. Viss försiktighet och förtydliganden kan behövas, så att eleven övertygas om att det råder ett proportionellt samband. Informationen "2 kg kostar 5 euro" kan användas som en proportionalitet om man handlar i en matvarubutik – särskilt om det handlar om försäljning i lösvikt – men kanske inte vid torgförsäljning där försäljaren ger rabatt om man köper mycket.

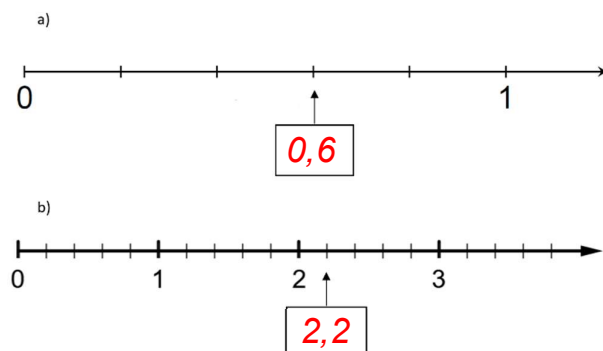
Problemsituationer kan klargöras med bilder, i detta fall med tre potatispåsar som märks "2 kg 5 euro". Även diagram kan stödja elevens tänkande kring uppgiften. Ett exempel är dubbla tallinjer eller tallinje med dubbla markeringar (vikt ovanför och pris under tallinjen) så att eleven tydligt ser hur det proportionella sambandet gestaltas när värdena ökar och minskar. Ett annat exempel är tabeller, som kan konstrueras med utgångspunkt i den givna proportionen.

Det är också viktigt att kontrastera additiva och multiplikativa samband och resonera om vad som avgör om ett samband är av den ena eller den andra typen (eller ingendera, som i fallet med sidan och arean av en kvadrat). Elever bör uppmuntras att förklara och motivera sina resonemang och valda strategier, både för att stärka sin egen medvetenhet om vad de gör och så att läraren får insyn i hur de tänker. Detta passar särskilt bra att göra i samband med proportionella resonemang, som kräver att eleverna tar egna initiativ och formulerar egna strategier.

Uppgift 3.1: Symboliskt representera tal på en tallinje

Uppgift 3.1

Skriv in det tal i rutan som pilen pekar på.

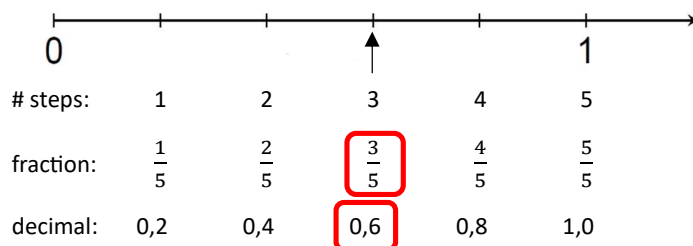


Några lösningar

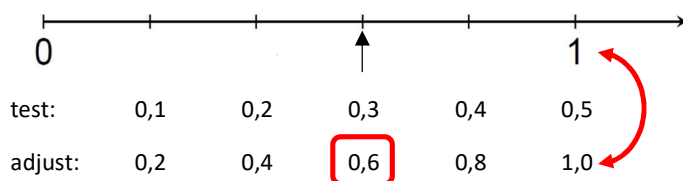
Två möjliga strategier:

- Räkna hur många steg (eller delintervall) det är från 0 till 1;
- Prova följder av decimaltal (eller bråk) från ett heltal till nästa.

En lösning till a): Vi följer den första strategin och räknar 5 steg från 0 till 1. Ett steg motsvarar då $\frac{1}{5} = 0,2$.



En annan lösning till a): Vi följer den andra strategin och testar 0,1 för den första positionen till höger om 0. Valet 0,1 gör att vi hamnar på 0,5 efter fem steg dvs när vi når 1 (se redovisningen nedan). Vi behöver dubbelt så mycket för att landa rätt och testar därför med 0,2. Efter fem steg hamnar vi på 1,0, vilket är korrekt.



Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att förstå och hantera en tallinje som är indelad i delintervall genom att identifiera värden för specifika positioner på tallinjen. Både decimaltal och bråk är tillåtna svar. För att göra detta måste eleverna analysera indelningen av tallinjen, bestämma en enhet för den första markeringen (efter nollan).

Därefter kan eleven bestämma det tal som efterfrågas, för en given markering på tallinjen. Detta kräver att eleven kan tolka tal som storheter, i relation till ett enhetsmått, vilket behövs för att kunna hantera tal i många andra sammanhang. Att kunna representera tal på en tallinje är en *key skill* för att kunna jämföra tal och förstå operationerna addition och subtraktion, särskilt i samband med negativa tal, så att dessa operationer inte enbart förstås symboliskt utan även kan representeras visuellt.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att kunna placera decimaltal och bråk på en tallinje är en matematiskt *key skill* eftersom förmågan speglar ett skifte i synsätt, från att förstå talen enbart som en andel (del i förhållande till helhet) till tal som kan representeras bland andra typer av tal. Denna visuella representation av decimaltal och bråk gör det möjligt att jämföra, ordna och utföra beräkningar med decimaltal och bråk. Inom DiToM-ramverket betraktas förmågan att representera decimaltal och bråk som position på tallinje som en stark indikator på begreppslig klarhet.

Forskning (t.ex. Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) visar att elever som förstår den metrisk strukturen på tallinjen har goda förutsättningar att lyckas inom aritmetik, algebra och geometri. Tallinjen erbjuder stöd att samtidigt hantera olika typer av tal: naturliga tal, bråk, decimaltal och negativa tal.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever förlitar sig ofta på att tallinjer är graderade med decimaler enligt bas 10. I denna uppgift är tallinjerna graderade med steg 0,2. Om eleven inte lägger märke till detta finns risk att de felaktigt svarar 0,3 och 2,1. Att 0,3 inte är korrekt bör vara uppenbart för den elev som reflekterar över svaret genom att titta ännu en gång på tallinjen: markeringen ligger närmre 1 än 0 och är därför större än 0,3 (och 0,5).

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever behöver utveckla förståelse för olika sorters tal och hur de kan placeras på tallinjen, samt hur givna positioner kan avläsas med heltal decimaltal.

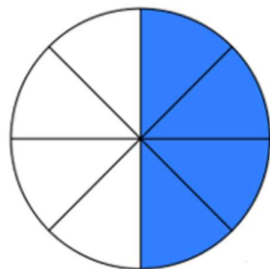
Svar med decimaltal dominerar bland elevernas svar. Bland hundratals elever är det bara någon enstaka elev som svarar med bråk, vilket kan bero på att de inte betraktar bråk som tal eller inte är vana vid att beteckna positioner på en tallinje med bråk. Läraren kan erbjuda elever att arbeta med just den typen av uppgifter, där eleven ibland ombeds att representera positioner med decimaltal och ibland med bråk.

Läraren bör också säkerställa att eleverna har uppfattat tals värde och tals storlek. På en tallinje kan tal uppfattas som mått – avstånd till nollan – alltså inte enbart som positioner. Laborativa material som talremsor, måttband och ograferade tallinjer kan användas för att stärka elevers förståelse av värde och storlek, samt att den symboliska beteckningen för en viss position beror av avståndet mellan två intilliggande heltal. Att argumentera för varför den valda beteckningen svarar mot den givna positionen stärker elevens medvetenhet om underliggande matematiska principer eller synliggör svagheter i elevens begreppsuppfattning som behöver åtgärdas.

Uppgift 3.2: Identifiera andel av en delvis skuggad cirkel

Uppgift 3.2

Hur stor andel av cirkeln är skuggad?



☒ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{1}{8}$

☐ $\frac{8}{4}$

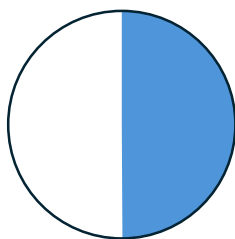
☐ $\frac{1}{4}$

Lösning

I bilden ser vi fyra skuggade delar av totalt 8 delar. Den andel som är skuggad är

$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} \quad (\text{eller} \quad \frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2})$$

Alternativt kan vi bortse ifrån linjerna och tolka den skuggade delen som *hälften* av hela cirkeln.



Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att identifiera ett bråk baserat på en visuell representation av del och helhet. Eleven måste symboliskt representera information som hämtas från bilden. Detta är en *key skill* för att förstå och hantera komplexa problemsituationer där nödvändig information behöver hämtas från en bild och/eller beskrivning och sedan representeras i symbolisk form innan en strategi kan identifieras och lösning genomföras.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

En grundläggande aspekt av att förstå och hantera rationella tal är att kunna tolka och representera en andel beskriven som förhållande mellan del och helhet i en visuell modell (bild eller diagram). Inom DiToM-ramverket är denna *key skill* kopplad till den begreppsliga tolkningen och användningen av rationella tal i problemlösning. Tolkningen av bråk som förhållande del-helhet bidrar också till att stärka elevens förståelse för aritmetiska operationer med bråk som i sin tur är en *key skill* för att förstå och hantera rationella uttryck inom algebran.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Eleven kan lockas att välja det felaktiga svarsalternativet $\frac{8}{4}$ baserat på att talen 8 och 4 är synliga i bilden. Svarsalternativet $\frac{8}{4}$ kan därför betraktas som en "distraktor", ett alternativ som eleven kan lockas att välja

baserat på endast en del av den tillgängliga informationen. Att välja just det alternativet tyder på att eleven saknar grundläggande förståelse för begreppet bråk och inte klarar av att bedöma storleken av ett bråk ($8/4$ är två cirklar medan $4/8$ är en halv cirkel). Även svarsalternativen $1/8$ och $1/4$ kan betraktas som distraktorer eftersom de innehåller talen 8 och 4, som är synliga i bilden. Om eleven väljer något av de tre felaktiga svarsalternativen tyder det på att eleven har alltför svag begreppsuppfattning om bråk som förhållande mellan del och helhet.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever som har svårigheter att tolka förhållande mellan del och helhet som bråk bör erbjudas praktiska övningar med bilder och laborativt material (t.ex. bråkremsor, Cuisenaire-stavar) där de får möjlighet att skapa och jämföra bråk. Vid sådana övningar bör alltid klargöras vad som menas med helheten, så att eleverna inte enbart arbetar med delarna. Eleverna bör också uppmärksammas på att "helheten" inte alltid är självklar utan att det kan definieras olika helheter som ger upphov till olika bråk trots att delarna är lika många.

Dessutom bör eleverna uppmuntras att verbalisera sina resonemang, både i dialog med läraren och tillsammans med andra elever. Exempelvis "cirkeln är indelad i åtta delar, fyra är skuggade så fyra åttondelar är skuggade, jag skriver... $4/8$ ". Detta kan göras antingen muntligt eller skriftligt, beroende på vad eleven föredrar. När eleven känner sig bekväm med det ena sättet att uttrycka sig språkligt kan läraren försöka utmana eleven att även försöka på det andra sättet. Lärare och elever kan också diskutera felaktiga svar för att upptäcka "fällor" i elevers resonemang, till exempel "Varför kan någon tro att $8/4$ är det rätta svaret? Hur tror ni att den eleven tänkte? Hur kan vi hjälpa den eleven att hitta rätt svar?"

Uppgift 3.3: Jämföra ett bråk med naturliga tal

Uppgift 3.3

Kryssa för **alla** tal som är större än $\frac{10}{3}$.

☐ 2

☐ 3

☒ 4

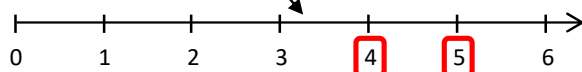
☒ 5

Några lösningar

En lösning: Börja med att beräkna $\frac{10}{3} = 3,33\dots$ eller dela upp $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Då ser vi att endast 4 och 5 (av talen 2, 3, 4, 5) är större än det givna talet ($\approx 3,33$).

En liknande lösning: Placera $\frac{10}{3}$ på en tallinje (som ett bråk, i blandad form $3\frac{1}{3}$, eller som ett decimaltal 3,33...) och jämför med 2, 3, 4, 5.



Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att jämföra ett bråk större än 1 med flera naturliga tal. Eleven behöver därmed kunna bestämma bråkets storlek dvs tolka bråket som ett tal och jämföra detta tal med andra tal. Att kunna skriva ett bråk på blandad form och som ett decimaltal är en *key skill* för att kunna arbeta med bråk i problemlösning och inom andra områden i matematik, exempelvis procenträkning, proportionalitet, algebra och funktioner.

Viktigt att båda talen 4 och 5 måste vara markerade för att elevens svar ska anses vara korrekt.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att kunna jämföra bråk med heltal är en matematisk *key skill* eftersom jämförelsen länkar samman rationella och hela tal och utvecklar en koherent förståelse för tal på tallinjen. Inom DiToM-ramverket kopplas denna jämförelse till förståelse av tals storlek, uppskattning av värde och växling mellan olika representationer av (reella) tal: bråkform, blandad form och decimalform. Förmågan att kunna avgöra om ett bråk är större eller mindre än ett annat tal är nödvändig för att utveckla flexibilitet i tolkning av numerisk information, exempelvis i samband med mätning, skalning, hantering av diagram och funktioner – områden där jämförelser mellan rationella tal och heltal ofta behöver göras.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever kan göra felaktiga eller alltför grova uppskattningar av $10/3$, exempelvis 2 eller 5, vilket kan leda till fel svar. En annan källa till fel svar kan vara att eleven endast använder sig av täljaren 10 eller nämnaren 3 och ersätter det andra talet med ett annat tal så att kvoten blir ett heltal, exempelvis $10/2 = 5$ eller $9/3 = 3$. Dessa typer av fel kan bero på att eleven ännu inte klarar av att omvandla ett bråk till annan form (blandad form eller decimalform).

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

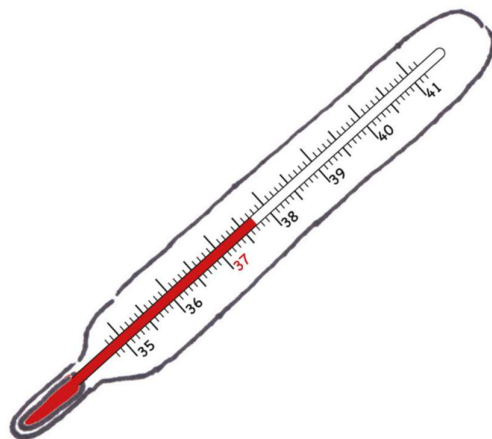
Omvandling mellan olika representationsformer måste tränas på ett strukturerat sätt, så att eleven lär sig effektiva sätt att växla mellan olika former. Omvandling kan tränas i båda riktningarna, exempelvis både $7/2 = 3 + 1/2 = 3,5$ och $3,5 = 35/10 = 7/2$, så att eleven uppbygger flexibilitet att hantera tal. Viktigt att kombinera träning av

algoritmträning med användning av laborativa material, exempelvis bråkremсор, bråkstavar och rutdiagram, för att upparbeta förståelse för symboliska operationer. Vi återkommer till rekommendationen att resonera med eleverna hur de tänker, hur de kan stärka sitt eget tänkande och utmana med fler sätt att tänka: "Hur tror du att den elev har tänkt som skrev $3,5 = 35/10 = 7/2$?" Kanske räcker det att skriva $3,5/1$ för att fler elever ska kunna koppla på sitt eget tänkande och kunna förklara den första likheten. Eller att resonera: "3,5 är ju 3 hela och 5 tiondelar. 3 hela är 30 tiondelar, så 3,5 är $30 + 5 = 35$ tiondelar". Aktiviteter som denna kan utformas så att de möter och utvecklar elevernas tänkande. Utförliga resonemang kan hjälpa många elever att följa tankegången även om de sedan inte skriver lika detaljerat när de räknar på egen hand och har automatiserat tänkandet.

Uppgift 3.4: Avläsa decimaltal på en termometer

Uppgift 3.4

Hur många °C visar termometern?



Svar: 37,7 °C

Lösning

Termometern är graderad i decimaler (med enheten grader Celsius). Graderingen kan jämföras med en tallinje.



Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att tolka och med decimaltal beskriva en given position på en graderad skala som visas på en termometer. Skalan kan tolkas som en tallinje, graderad med tiondelar. Den *key skill* som testas är förmågan att tolka och avläsa decimaltal på en given skala, i en situation som är verklighetsnära.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Inom DiToM-ramverket betraktas tolkning av mått på linjära skalor som en grundläggande matematisk *key skill* eftersom den behövs inom flera områden inom matematiken, exempelvis mätning, geometri, diagram och funktioner. Att avläsa mått i verklighetsnära situationer stärker elevens matematiska litteracitet, dvs att kunna tolka matematiska fakta och förhållanden i vardagliga situationer. Kopplingen mellan visuell information och numerisk representation stärker elevens förmåga att länka kontinuerliga kvantiteter med symbolisk precision.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Elever som kan hantera tallinjer graderade med heltal kan uppleva svårigheter att tolka tallinjer som är graderade med både heltal och tiondelar. Eleven kan nöja sig med att avrunda till närmaste heltal och svara 38. Detta felaktiga svar kan bero på felaktig tolkning av uppgiften (hur noga ska man svara?) men kan också bero på otillräcklig förmåga att tolka decimaler på en tallinje. Det räcker inte att visuellt kunna bedöma vilket heltal som ser ut att ligga närmast den givna markeringen. Rena räknefel kan också förekomma, särskilt om eleven räknar varje gradering från 37,0 till den givna markeringen (vid 37,7). Att räkna baklänges från 38,0 eller att räkna upp från markeringen vid 37,5 minskar risken för felaktig avläsning. Att uppfatta markeringen vid 37,5 som enbart 37 kan leda till det felaktiga svaret 37,2.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Elever behöver i matematikundervisningen både möta tallinjer och (analog) mätinstrument med liknande skalor, exempelvis termometrar, linjaler, måttband och graderade cylindrar. Eleverna kan få i uppdrag att gradera linjer med heltal och tiondelar på blankt papper och då inte enbart med centimeter och millimeter (vilket alltför enkelt kan göras med linjal) utan med avstånd mellan två heltal som kräver att eleven måste bestämma avståndet mellan intilliggande decimaltal. De kan också få i uppdrag att gradera volymen i en transparent (helst ganska smal) cylinder genom att på en tejpremsa markera höjder för 1 dl, 2 dl, 3 dl och så vidare. Därefter kan eleverna mäta sig till var centilitrarna ska markeras. Denna typ av konstruerande övningar i verklighetsnära sammanhang utvecklar elevernas kopplingar mellan verklighetsnära situationer och matematiska symboler, vilket stärker deras sammanhangsbundna förståelse av matematiska begrepp.

Det är också viktigt att grundlägga elevers förståelse för tals storlek i tidiga skolår. Vid arbete med flersiffriga heltal ska eleverna få i uppgift att räkna framåt och bakåt från givna heltal, exempelvis 370 371 372 373, ... Sådana övningar förbereder för att i senare skolår klara av motsvarande med decimaltal: 37,0 37,1 37,2 37,3, ... Sådana framåträkningar kan med fördel representeras på tallinjer. Som förberedelse för att gradera tallinjer med decimaltal kan eleverna få i uppdrag att gradera mellanliggande heltal på en tallinje där det endast finns markeringar för 370 och 380. Med sådana övningar stärks elevernas förståelse för kopplingen mellan visuella och symboliska representationer.

Att omsätta muntligt eller skriftligt förmedlad information till beräkningar är också ett sätt att stimulera elevernas tänkande. Exempelvis: "Vilket tal är 0,3 mindre än 38?"

Uppgift 3.5: Jämföra decimaltal

Uppgift 3.5

Kryssa för det tal som är störst.

☒ 3,33 ☐ 3,303 ☐ 3,03 ☐ 3,3

Lösning

De fyra talen kan skrivas som

$$3,33 = 3 + 0,3 + 0,03$$

$$3,303 = 3 + 0,3 + 0,003$$

$$3,03 = 3 + 0,03$$

$$3,3 = 3 + 0,3$$

Alla talen har 3 i heltalspositionen (som är mest "värd"). Endast tre av talen har 0,3 (tre tiondelar). Så 3,03 är det minsta talet. Av de tre återstående talen har 3,3 inget mer positivt att komma med. Återstår 3,33 och 3,303. Utöver 3,3 har 3,33 en term 0,03 medan 3,303 har 0,003. Eftersom 0,003 är mindre än 0,3 så måste 3,33 vara det största talet.

Alternativt kan de fyra talen betraktas i enheten tusendelar:

$$3,33 = 3,330 = 3330 \text{ tusendelar}$$

$$3,303 = 3,303 = 3303 \text{ tusendelar}$$

$$3,03 = 3,030 = 3030 \text{ tusendelar}$$

$$3,3 = 3,300 = 3300 \text{ tusendelar}$$

Elever som klarar av att jämföra (fysiffriga) heltal ser då att 3330 tusendelar är störst av de fyra talen.

(Fler möjliga lösningar redovisas under den sista rubriken "Vilket stöd kan erbjudas...")

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förståelse för decimaltal och speciellt decimalernas platsvärden, vilket är en *key skill* för att förstå tal och speciellt positionssystemet i bas 10. Genom att formulera svarsalternativ som utmanar vanligt förekommande missuppfattningar fångar vi genom felaktiga svar in de elever som inte ännu har uppnått tillräcklig förståelse för platsvärden och positionssystemet.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att kunna jämföra givna decimaltal är en *key skill* eftersom korrekt utförd jämförelse reflekterar förståelse för positionssystemet som går utöver heltalen. Inom DiToM-ramverket är förståelse för decimaltalen nödvändig i samband med uppskattning, mätning och räkning i verklighetsnära situationer (exempelvis priser, tolkning av data). Jämförelse och användning av decimaltal förekommer också inom områdena procent, algebra samt inom teknik och naturvetenskap.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt misstag är att betrakta decimaldelar enligt samma principer som heltal, vilket kan leda till den felaktiga slutsatsen att 3,303 är större än 3,33 med (den icke giltiga) motiveringen att 303 är större än 33. Ett annat misstag är att betrakta tal med fler decimaler som mindre än tal med färre decimaler, vilket kan leda till den felaktiga slutsatsen att 3,3 är större än 3,33 (med den icke giltiga motiveringen att 3,33 innehåller hundradelar, som är mindre än tiondelar). Eller tvärt om, att 3,33 är större än 3,3 eftersom 3,33 har fler decimaler (påståendet är korrekt men motiveringen är inte giltig).

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Alla människor (och djur) älskar att generalisera, eftersom det innebär att de inte behöver lära sig nya saker. Men det går tyvärr inte att generalisera allt som gäller för heltal till decimaltal. Eleverna måste därför lära sig att identifiera likheter och skillnader mellan decimaltal och heltal. Likheterna leder till generaliseringar (i resonemang och beräkningar) men skillnaderna måste vi hantera försiktigt.

Som stöd för att tolka decimaltalens värden kan talen skrivas under varandra och betraktas en siffra i taget. Detta kan förstärkas med övertäckning, vilket visas nedan. I den andra bilden ser vi att det tredje talet inte kan vara störst eftersom det talet har en nolla där de tre andra talen har 3. Vi hittar lösningen 3,33 i nästa steg.

3,33	3,3	3,33
3,303	3,3	3,30
3,03	3,0	3,03
3,3	3,3	3,3

Uppdelningen av tal i termer av olika storlek, till exempel $3,303 = 3 + 0,3 + 0,003$, kan visualiseras med laborativt material (eller ruttdiagram) där objekt läggs i tre av fyra lådor som i sig representerar olika platsvärden. Här gäller det att klargöra denna tolkning, att objekten har olika värde beroende på i vilken låda de ligger.



Positionernas olika värden kan förstärkas med material som visualiserar räkning i bas tio: när vi räknar heltal räknas en liten kub som 1, en stav med 10 kuber är 10, en platta med 10 stavar är 100, en kub med 10 plattor är 1000. När vi räknar ner till tusendelar kan en liten kub vara en tusendel, en stav en hundradel, en platta en tiondel och en stor kub en hel.

Viktigt också att betona värde framför utseende: "fler decimaler betyder inte större värde".

Jämförelser av storheter – särskilt längdmått – kan också vara ett bra stöd både för att väcka elevernas intresse och stärka deras förståelse för platsvärden. Exempelvis kan 3,303 meter uttryckas som 3 meter + 3 decimeter + 3 millimeter. När det måttet jämförs med $3,33 = 3 \text{ meter} + 3 \text{ decimeter} + 3 \text{ centimeter}$ inser fler elever att 3,33 är större än 3,303, eftersom centimeter är större än millimeter.

Uppgift 3.6: Bestämma term i en ekvation med decimaltal

Uppgift 3.6

Skriv det tal som saknas.

a) $1,8 + \underline{3,5} = 5,3$

b) $\underline{1,49} + 0,51 = 2$

Några lösningar

En lösning till a): Tolka det saknade talet med subtraktion.

$$\underline{\quad} = 5,3 - 1,8 = [\text{"välj en fungerande metod för subtraktion"}] = 3,5$$

En annan lösning till a): Tolka det saknade talet med utfyllnad.

Steg 1: $1,8 + 3 = 4,8$

Steg 2: $4,8 + 0,2 + 0,3 = 5,3$

Svar, baserat på steg 1 och steg 2: $3 + 0,2 + 0,3 = 3,5$.

(Denna lösning används vanligtvis i huvudräkning, mer sällan i skriftlig form.)

En lösning till b): Tolka det saknade talet med subtraktion.

$$\underline{\quad} = 2 - 0,51 = 1 + 1 - 0,51 = 1 + 0,49 = 1,49 \quad (\text{använd talfakta } 0,49 + 0,51 = 1,00)$$

En annan lösning till b), också baserad på subtraktion men utan talfakta $0,49 + 0,51 = 1,00$:

$$\underline{\quad} = 2 - 0,51 = 1 + 1 - 0,5 - 0,01 = 1 + 0,5 - 0,01 = 1 + 0,4 + 0,10 - 0,01 = 1,4 + 0,09 = 1,49$$

(Denna lösning kan genomföras med uppställning och "lån" i två omgångar.)

En tredje lösning till b): Stegvis utfyllnad.

Steg 1: $0,49 + 0,51 = 1,00$ (talfakta)

Steg 2: $1 + 1,00 = 2$

Svar, baserat på steg 1 och steg 2: $0,49 + 1 = 1,49$.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevens förmåga att med enbart aritmetiska metoder lösa ut ett okänt tal ur en ekvation. Denna typ av prealgebraiskt kunnande är en *key skill* för att senare i skolan utveckla förståelse och kunnande för att lösa ekvationer med variabler. För att kunna lösa ekvationen behöver uppfatta likheten som en ekvivalens (och inte

en uppmaning att utföra en beräkning). För att lösa ekvationen behöver eleven antingen koppla additionen till dess inversa operation subtraktion eller pröva sig fram till ett värde som balanserar likheten. I båda fallen behöver eleven kunna tolka ekvationens algebraiska struktur och hantera aritmetik med decimaltal.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att lösa ekvationer med aritmetiska metoder – med hjälp av inversa operationer och/eller tolkning av likhet som ekvivalens – är en *key skill* som är nödvändig för överbryggning mellan aritmetik och algebra, speciellt formell lösning av ekvationer med variabel. Inom DiToM-ramverket bidrar denna typ av uppgift till att utveckla elevers algebraiska resonemang, i och med att de resonerar på liknande sätt som i algebra men utan att använda algebraiska metoder (så kallad prealgebra). Eleven måste förstå det okända talets roll i ekvationen, att talet är en term som inte direkt kan beräknas. Eftersom talen är decimaltal provas även elevens förmåga att tolka och hantera decimaltal, vilket behöver användas bland annat inom mätning och proportionella resonemang.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Eleverna ser två tal och ett plustecken, vilket kan leda till att de adderar de två givna talen vilket ger fel svar. En annan strategi är att gissa, utan att kontrollera gissningen. Eleven kanske gissar för att snabbt komma ifrån uppgiften eller så kan det bero på osäkerhet om hur decimaltal kan hanteras. Osäkerhet kan även leda till att eleven inte svarar alls. En kommentar "jag förstår inte uppgiften" kan bero både på osäkerhet och oförmåga att tolka likheten som en ekvivalens.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Uppgiften innehåller två matematiska begrepp som kan orsaka svårigheter: decimaltal och likhet som ekvivalens. Vi har tidigare redogjort för hur elevens förståelse för decimaltal kan stödjas. Att utveckla förståelse för likhet som ekvivalens görs tidigt i skolan, exempelvis med uppgifter som $3 + __ = 8$ alltså med heltal i stället för decimaltal. Elever som inte klarar av att tolka likhet som ekvivalens kan börja med att träna ekvationer med heltal, så att eleven uppfattar att uppgiften handlar om att "hitta det tal som adderat med 3 ger svaret 8". Med stöd av läraren kan eleven utveckla förståelse för att det handlar om att "tänka ut" eller "lista ut" vilket tal det handlar om snarare än att räkna ut talet. När det gäller tal i allmänhet men särskilt decimaltal kan eleven träna på att dela upp tal, som i lösningsförslagen, så att beräkningarna (eller resonemangen) blir enklare.

Att tolka likhet som ekvivalens kan tydliggöras med laborativt material som läggs på två olika platser: "Lägg 3 till vänster och 8 till höger. Hur många fler måste du lägga till vänster för att det ska bli lika många på båda platserna?"

Uppgift 3.7: Subtraktion och multiplikation med decimaltal

Uppgift 3.7

Beräkna:

a) $23,5 - 1,12 = \underline{22,38}$

b) $6 \cdot 2,5 = \underline{15}$

Några lösningar

a) $23,5 - 1,12 = 22 + 0,50 - 0,12 = 22 + 0,38 = 22,38$ (använder talfakta $50 - 12 = 38$)

Subtraktionen $50 - 12$ kan beräknas genom att fylla ut från 12 till 20 till 50: $50 - 12 = 8 + 30 = 38$. (Detta kan illustreras på en tallinje.)

b) $6 \cdot 2,5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0,5 = 12 + 3 = 15$

Redovisning av hur den distributiva lagen används: $6 \cdot 2,5 = 6 \cdot (2 + 0,5) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0,5 = 12 + 3 = 15$

Kommentar: Beräkningen av $6 \cdot 0,5$ kan tolkas som "6 halva = 3 hela" eller, symboliskt:

$$6 \cdot 0,5 = 3 \cdot 2 \cdot 0,5 = 3 \cdot 1 = 3 \quad (\text{talfakta } 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ "två gånger en halv är lika med en (hel)"})$$

En annan lösning, som också baseras på faktoriseringen $6 = 3 \cdot 2$:

$$6 \cdot 2,5 = 3 \cdot 2 \cdot 2,5 = 3 \cdot 5 = 15 \quad (\text{talfakta } 2 \cdot 2,5 = 5)$$

Redovisning av hur den associativa lagen används: $6 \cdot 2,5 = (3 \cdot 2) \cdot 2,5 = 3 \cdot (2 \cdot 2,5) = 3 \cdot 5 = 15$

En tredje lösning, som baseras på uppdelningen $6 = 4 + 2$:

$$6 \cdot 2,5 = 4 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,5 = 10 + 5 = 15$$

Redovisning av hur den distributiva lagen används: $6 \cdot 2,5 = (4 + 2) \cdot 2,5 = 4 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,5 = 10 + 5 = 15$

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att utföra beräkningar med decimaltal, med fokus på subtraktion och multiplikation. Båda uppgifterna kräver att eleven kan hantera platsvärde för decimaltal och kan genomföra beräkningar med decimaltal på ett effektivt sätt. Denna färdighet är en *key skill* för att förstå och kunna hantera omskrivningar och förenklingar inom algebra.

Varför är den här färdigheten en *key skill*?

Att kunna använda de fyra räknesätten med decimaltal är en grundläggande matematisk *key skill*, vilket beskrivs i DiToM-ramverket. Denna färdighet är inte enbart nödvändig i verklighetsnära sammanhang (t.ex. hantera pengar, mätningar, data) utan stödjer också algebraisk generalisering och proportionella resonemang. Att med säkerhet kunna genomföra beräkningar med decimaltal behövs inom många områden, speciellt geometri, statistik samt problemlösning inom naturvetenskap och teknik.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Vanligt förekommande misstag är att blanda decimaler med olika platsvärden, exempelvis behandla 23,5 och 1,12 på liknande sätt som 235 och 112 vilket kan leda till det felaktiga svaret 12,3. Alltså att inte ta hänsyn till decimalkommats placering. Elever som inte har utvecklat tillräcklig förståelse för decimaltal kan strunta i decimalerna och enbart subtrahera heltalsdelarna 23 och 1 vilket leder till fel svar.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Till att börja med bör identifieras om eleven har svårt att förstå och hantera decimaltal eller om svårigheten handlar mer om att hantera operationerna subtraktion och multiplikation. Förståelsen för decimaltal kan stödjas för sig, i enlighet med åtgärder som har beskrivits i föregående uppgifter, medan förmågan att förstå och kunna hantera subtraktion och multiplikation kan utvecklas med uppgifter som handlar om heltal. Exempelvis att ersätta $6 \cdot 2,5$ med $6 \cdot 25$, som kräver likartad procedurell hantering (med distributiva lagen). Avseende subtraktionen kan tränas subtraktion av heltal där den andra termen har färre siffror än den första termen, för att få eleven att rikta uppmärksamhet mot platsvärde.

För att få eleven att ägna tid åt att tolka uppgiften innan beräkningar börjar utföras kan läraren ställa frågor i stil med "kommer svaret till 23,5 – 1,12 att hamna nära 22 eller 12?". Om läraren regelbundet ställer sådana frågor lär sig eleven med tiden att ställa liknande frågor till sig själv både i samband med beräkningar och problemlösning, vilket bidrar till att utveckla elevens självreglerande processer. Att bedöma rimlighet i ett svar, både före och efter utförd beräkning, är ett bra sätt att övervaka och kontrollera det egna arbetet.

Att symboliskt redovisa i detalj hur associativa och distributiva lagarna används vid beräkningarna kan inte förväntas av eleverna utan överläts till läraren, som ett sätt att synliggöra hur många elever tänker.

Uppgift 3.8 och 3.9: Bestämma största värde av ett bråk genom att välja täljare eller nämnare

Uppgift 3.8

Det finns fem kort. På varje kort finns en siffra.



Välj det kort som ger största möjliga värde för bråket. Skriv svaret i rutan.

$$\frac{7}{13}$$

Uppgift 3.9

Det finns fem kort. På varje kort finns en siffra.



Välj det kort som ger största möjliga värde för bråket. Skriv svaret i rutan.

$$\frac{12}{2}$$

Lösningar

Uppgift 3.8 kan lösas genom att använda regeln

Ett **större** tal i täljaren (taket) ger ett **större** bråk (om nämnaren är densamma).*

Ett av talen 5, 3, 7, 4, 2 ska skrivas i täljaren. Eftersom 7 är det **största** av dessa tal så är det **största** möjliga bråket 7/13. Svaret är alltså 7.

Uppgift 3.9 kan lösas genom att använda regeln

Ett **mindre** tal i nämnaren (nere) ger ett **större** bråk (om täljaren är densamma).*

Ett av talen 5, 3, 7, 4, 2 ska skrivas i nämnaren. Eftersom 2 är det **minsta** av dessa tal så är det **största** möjliga bråket 12/2. Svaret är alltså 2.

* Vi betraktar enbart bråk där både täljaren och nämnaren är positiva heltal.

Key skill som testas i uppgiften

Uppgiften testar elevernas förmåga att resonera och dra slutsatser om hur storleken av ett bråk påverkas av att man väljer större eller mindre tal i bråkets täljare eller nämnare. Uppgiften testar därmed elevernas strukturella förståelse av begreppet bråk samt hur ett bråk kan uppfattas som ett tal med ett visst värde. Inom DiToM-ramverket är förmågan att kunna tolka bråk som tal, utifrån bråkets täljare och nämnare, en **key skill** för att kunna hantera bråk tillsammans med tal i andra former.

Varför är den här färdigheten en **key skill**?

Att förstå hur täljare och nämnare påverkar ett bråks värde är en fundamental del av lärande inom området rationella tal och även generellt inom det reella talområdet. Att kunna tolka värdet av ett bråk är en **key skill** för att göra uppskattningar och omskrivningar av bråk. Att göra bedömningar av ett bråks värde genom att betrakta dess täljare och nämnare kan ses som en del av relationellt tänkande, hur ett objekt påverkas av förändringar i dess struktur.

Vilka typer av fel och andra varningssignaler kan förväntas i elevers försök att lösa uppgiften?

Ett vanligt förekommande misstag är att välja det största värdet 7 i båda fallen, med (den icke giltiga) motiveringen att uppgiften handlar om att bestämma största möjliga värde. Elever som resonerar på det sättet har inte lyckats tolka innebörden i uppgiften utan enbart förlitat sig på enstaka ord i texten.

Elever kan också välja att rikta fokus mot estetiska värden och välja det svar som ger det i deras tycke snyggaste bråket. Kanske $3/13$ och $12/2$, utan att ha funderat på storleken av dessa bråk.

Exemplen ovan har det gemensamt är att eleven har gjort en ytlig tolkning när det som krävs för att lösa uppgiften är en tolkning baserad på strukturell förståelse för begreppet bråk.

Vilket stöd kan erbjudas elever som har svårt att lösa denna uppgift?

Alla elever bör arbeta med laborativa material och diagram som konkretiserar värdet av ett bråk, i förhållande till en vald eller given helhet. Eleverna måste befästa den grundläggande idén är att nämnaren bestäms av antalet (lika stora) delar som någon (eller eleven själv) har delat in helheten i, medan täljaren anger hur många sådana delar som någon (eller eleven själv) har valt att samla ihop. Utifrån en sådan idé kan elever träna på att jämföra tal med samma täljare t.ex. "jämför $4/7$ och $5/7$ " eller samma nämnare t.ex. "jämför $3/4$ och $3/5$ ". Vilket tal är minst och vilket tal är störst, och varför? Svaret kan förstärkas genom att läraren och eleverna konstruerar tallinjer där talen kan markeras (i fallet med $3/4$ och $3/5$ krävs dubbla tallinjer med olika graderingar, vilket i sig är en nyttig utmaning att klara av).

Vi återkommer alltså ännu en gång till betydelsen av att resonera i klassrummet, både mellan lärare och elev/elevgrupp och elever tillsammans. Då uppstår både frågor och klargöranden på ett naturligt sätt som bidrar till varje elevs lärande.

VI. Vetenskaplig utvärdering

DiToM-testet Screening 6+ har utvecklats med utgångspunkt i teori och beprövad erfarenhet som del av en icke-representativ valideringsstudie. Att studien bör betraktas som icke-representativ beror på att flera av skolorna valdes ut på grund av att de hade svaga resultat i matematik. Syftet var att hjälpa lärare att identifiera elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter under sin fortsatta skolgång. Genom att använda testet i slutet av årskurs 6 eller början av årskurs 7 kan lärare få stöd att göra en empiriskt grundad bedömning av elevernas prestationer och identifiera de elever som kan vara i behov av särskilt stöd inom vissa områden i matematiken.

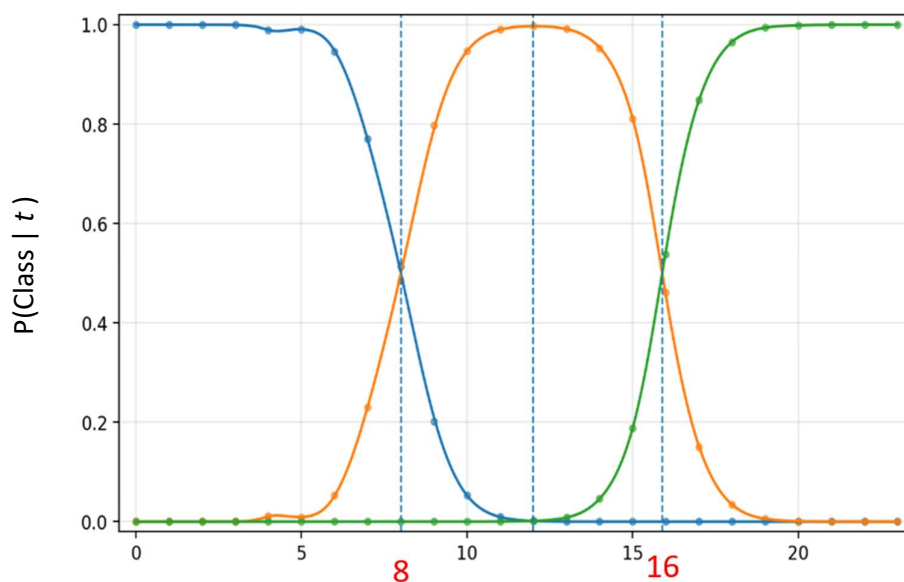
Beskrivning av urval och resultat

Testet genomfördes juni till juli 2025 under de tre sista veckorna av skolarbete 2024/2025 med 1841 elever från skolor i Grekland, Tyskland, Frankrike, Spanien, Italien, Kroatien och Sverige.

Testet består av tre delar med totalt 23 uppgifter inom områdena aritmetik, prealgebra och algebra. Uppgifterna valdes ut med stöd av ett ramverk utvecklat inom projektet och genom förhandlingar mellan projektdeltagarna. Rätt svar gav 1 poäng, fel svar 0 poäng. Ofullständigt eller inget svar gav också 0 poäng. Testet genomfördes enligt givna instruktioner (se IV. Genomförande av testen Screening 6+ och 8+) och resultaten utvärderades. Eftersom testet utformades för screening med syfte att identifiera elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter var det önskvärt att uppnå en tydlig (så tydlig som möjligt) avgränsning mellan olika grupper av elever, beroende på om de bedömdes riskera eller bedömdes inte riskera att hamna i matematiksvårigheter.

Inom projektet togs fram två *cutoff values* (tröskelvärden) för att skilja mellan olika grupper av elever: De som bedöms riskera att hamna i matematiksvårigheter och därför behöver särskilda insatser, sedan en "mellan-grupp" som behöver uppmärksammas av läraren och slutligen de som bedöms inte riskera att hamna i matematiksvårigheter.

Bestämningen av tröskelvärdena var datadriven genom *latent class analysis*. Därigenom identifierades de tre grupperna utifrån uppnådda poäng på testet. Vi redogör inte här för detaljerna utan de klargörs i en kommande doktorsavhandling vid universitetet i Bielefeld, Tyskland. Diagrammet nedan baseras på urval från Tyskland, där lärarna gjorde en skattning av elevernas grupptillhörighet (orange, blå, grön färg i diagrammet) innan de skrev testet. Här kan vi exempelvis se att det är ca 20% risk att en elev som skrivit 7 poäng tillhör mellangruppen (enligt lärares bedömning) men genom testet klassificeras i riskgruppen. Denna osäkerhet i klassificering kan anses godtagbar, då ett mindre omfattande test som vårt inte kan ge något definitivt besked utan endast indikationer på riskerna. De tre grupperna definierades utifrån testresultaten: $0 \leq t \leq 8$, $9 \leq t \leq 16$, $17 \leq t \leq 23$.



Analysen bygger på tyska lärares bedömningar av elevernas grupptillhörighet. Lärarna har gjort individuella bedömningar utifrån egen erfarenhet och kännedom om eleverna, vilket tillför en extra osäkerhet i analysen. Vi menar att elevernas resultat på testet ger varje lärare ett extra underlag och stöd för sin egen bedömning av varje elevs risk att hamna i matematiksvårigheter, samtidigt som DiToM-analysen kan uppfattas som mer stabil än en enskild lärares bedömning då den grundas på samtliga deltagande lärares bedömningar.

Rekommendationer för lärares arbete med utgångspunkt i testresultat

Till att börja med finns det elever som inte gör sitt bästa och inte försöker lösa åtminstone vissa uppgifter eller vissa typer av uppgifter när de inte känner för det och särskilt när de vet att testresultatet inte kommer att påverka deras betyg. För en sådan elev fungerar inte DiToM-testet. Läraren, som bäst känner sina elever, får försöka bedöma om ett svagt testresultat är missvisande för några av eleverna.

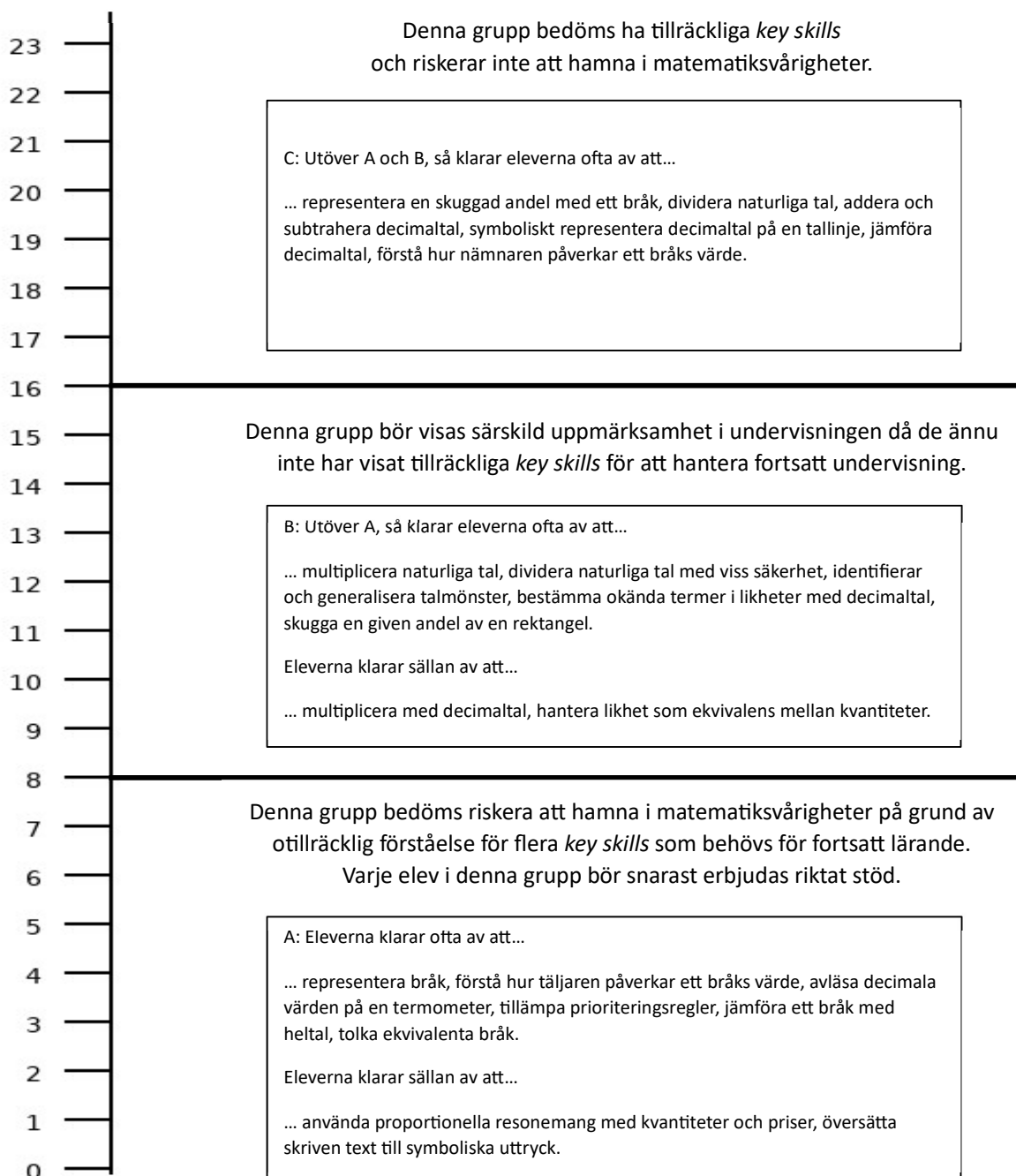
I en klass med många svagt presterande elever kan det hända att en stor andel av eleverna klassificeras i riskgruppen $0 \leq t \leq 8$. Läraren måste då avgöra vilka elever i riskgruppen som är i störst behov av extra stöd och som läraren kan klara av att hantera på egen hand, samtidigt som läraren rekommenderas att tydligt signalera till skolledningen att det finns fler elever som behöver extra stöd. Tröskelvärdet 8 är inte hugget i sten utan kan justeras antingen nedåt eller uppåt av läraren. En typ av risk som är förknippad med en sådan justering kan avläsas i diagrammet på föregående sida, där det exempelvis framgår att 4 av 5 elever som har testresultatet inte tillhör den primära riskgruppen (utan tillhör "mellangruppen").

En självklar slutsats av ovanstående resonemang är att DiToM-testet inte ersätter lärarens bedömningar och lärarens arbete. DiToM-testet är ett stöd som ger en första indikation på vilka elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter på grund av otillräckliga *key skills*.

VII. Utvärdering av testresultat

Följande skala visar hur elevers testresultat (preliminärt!) kan kopplas till deras förmåga att hantera key skills.

Resultat



VIII. Resultatblankett: Sammanställning av testresultat

På projektsidan finns en Excel-fil där läraren kan skriva in samtliga elevers resultat, uppgift för uppgift. Varje uppgift rättas med 1 för korrekt svar och 0 för felaktigt svar (eller inget svar). På arbetsbladet anges ett möjligt korrekt svar, till exempel $2a$ om frågan är att skriva ett uttryck för "dubbelt så mycket som a ". Naturligtvis ska även $2 \cdot a$, $2 \times a$ och $a + a$ accepteras som korrekta svar. Att visa de korrekta svaren (läs: ett korrekt svar) direkt i arbetsbladet fungerar som ett facit och är tänkt att underlätta lärarens rättning.

Om läraren vill anteckna elevens svar finns det fritextutrymme direkt till höger om fältet där resultatet 0 eller 1 skrivs in. Detta är inte nödvändigt att göra men kan underlätta lärarens uppföljande arbete med eleverna, så att läraren enkelt kan se elevens svar (vilket ofta speglar hur eleven har tänkt) utan att behöva gå tillbaka till de skrivna testen (vilket dock kan ge extra information, särskilt om en elev har skrivit mycket mer än bara svar).

Naturligtvis beräknas varje elevs testresultat (antalet korrekta svar) automatiskt i arbetsbladet.

Även om tröskelvärdena ger ett stöd för läraren att identifiera elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter så bör hänsyn tas till elevernas faktiska testresultat för att avgöra vilka elever som är i störst behov av stöd. En elev som har 5 poäng på testet är troligtvis i större behov av stöd än en elev som har 8 poäng.

Sammanställningen visar vilka uppgifter eller typ av uppgifter som eleven inte har klarat av, så att läraren kan ge riktat stöd inom de områden som eleven har särskilt svårt för. Läraren bör inte anta att alla elever som har uppnått liknande testresultat har exakt samma behov av stöd, de kan ju ha svårt att lösa olika typer av uppgifter. Utgångspunkten bör vara att varje elev i riskgruppen behöver ges stöd utifrån sina specifika behov.

Sammanställningen ger också en överblick på gruppnivå över vilka uppgifter som hela klassen behöver arbeta vidare med.

Referenser

- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: Macmillan.
- Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education. In *Proceedings of EDULEARN25 Conference*. Palma, Spain. [Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7](#)
- Ehlert, A., & Fritz, A. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(2), 237–263.
- Gaidoschik, M. (2025). *Das dezimale Stellenwertsystem: Verstehen, verinnerlichen und flexibel anwenden*. Hannover: Klett Kallmeyer.
- Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 447–469.
- Prediger, S. (2008). Zahlaspekte verstehen und flexibel nutzen. In E. Cohors-Fresenborg et al. (Eds.), *Mathematiklernen ermöglichen* (pp. 85–100). Münster: Waxmann. [ph-gmuend.de+3Edoc LMU München+3Wikipedia+3](#)
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 76(2), 428–444.
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.
- Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM*, 46, 45–58.
- Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Charlotte, NC: Information Age.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2004). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Seelze: Friedrich Verlag.