



Co-funded by
the European Union



Screening 4+

Handbok

Innehåll

Förord	3
1 DiToM:s mål och vägledande principer	4
Vad är tanken med <i>DiToM</i> Screeningen?	4
Vad är "key skills" i matematik?	4
Vad är nästa steg efter att ha genomfört <i>DiToM</i> Screeningen?.....	5
2 Instruktioner för genomförande av Screening 4+	7
3 Bakgrund och förslag på stöd avseende de enskilda uppgifterna i <i>DiToM</i> 4+	25
Uppgift 1: Skriv talet	25
Uppgift 2: Jämföra tal.....	26
Uppgift 3a: Addera 1/10/100 med talsortsövergång	27
Uppgift 3b: Subtrahera 1/10/100 med talsortsövergång	28
Uppgift 4: Tallinjen	29
Uppgift 5: Hälften upp till 10 000.....	30
.....	31
Uppgift 6a: Huvudräkning: Addition and subtraktion	31
Uppgift 6b: Huvudräkning: Addition och subtraktion med jämna tusen- och hundratal.....	32
Uppgift 7a: Uppställning addition	33
Uppgift 7b: Uppställning subtraktion	34
Uppgift 8: Förståelse av addition och/eller subtraktion.....	35
.....	36
Uppgift 9: Talfakta multiplikation	36
Uppgift 10: Talfakta division.....	37
Uppgift 11: Huvudräkning: Multiplikation och division med jämna tusen- och hundratal	38
Uppgift 12: Förståelse av multiplikation	39
Uppgift 13: Förståelse av textproblem/välj rätt räknesätt	41
4 Information om utvärdering och dokumentation av resultat	42
"Cut off score" (gränsvärden) för elevens svar för <i>DiToM</i> 4+ – och hur man tolkar dem.....	42
5 Referenser.....	47

Förord

Denna handbok är utformad för att stödja dig med att administrera DiToM 4+-screeningen och använda testresultaten på ett effektivt sätt i din klass. På följande sidor hittar du:

1. kort introduktion till målen och riktlinjerna för Erasmus+-projektet *DiToM*;
2. detaljerade, stegvisa instruktioner för hur *DiToM 2+* genomförs i klassrummet;
3. förklaringar av varje uppgift i *DiToM 2+*, inklusive möjliga stödåtgärder för elever vars screeningresultat indikerar kunskapsluckor av viktiga matematiska kompetenser;
4. vägledning om hur resultaten utvärderas och dokumenteras.

Manualen (del 2) och utvärderingstabellerna som beskrivs i del 4 kan också laddas ner separat som enskilda PDF-filer från www.ditom.org/

Om du skriver ut manualen rekommenderar vi att du skriver ut den dubbelsidigt och spiralbinder den. I den broschyr du får kan du behålla sidan som är avsedd för läraren för att läsa instruktionerna högt, medan sidan som är avsedd för elever ofta innehåller ett exempel som hjälper dig att förklara vad eleverna förväntas göra. Du kan också använda power-pointen för att visa exemplen för eleverna.

1 DiToM:s mål och vägledande principer

Matematikinlärningen sker i etapper: ny kunskap bygger på tidigare kunskaper. När grundläggande idéer och begrepp saknas blir det allt svårare för eleverna att förstå och begripa matematiskt innehåll som bygger på dessa grunder. Både nationella och internationella studier visar att en betydande andel av eleverna redan i grundskolan inte uppnår minimikraven i matematik – och av ovanstående skäl fortsätter det ofta i gymnasiet. Det är alarmerande att många ungdomar avslutar sin obligatoriska skolgång utan att ha uppnått den grundläggande matematiska kompetens som enligt OECD är nödvändig för att ”fullt ut kunna delta i samhällslivet”.

För att motverka detta behöver lärarna först kunna identifiera matematiska inlärningssvårigheter – helst så tidigt och så exakt som möjligt. Endast på denna grund kan riktade stödåtgärder vidtas. Det är precis här som EU-projektet *Diagnostic Tools in Mathematics (DiToM)* kommer in. I ett samarbete mellan Tyskland, Frankrike, Grekland, Kroatien, Italien, Sverige och Spanien har fem sammankopplade screeningverktyg utvecklats. Dessa verktyg gör det möjligt för lärare att i slutet eller början av ett skolår få en överskådlig bild av vilka elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter om de inte får riktade stödåtgärder.

Screeningarna följer en tvåårig cykel:

- **Screening 0** – Slutet av förskoleklass/början av åk 1
- **Screening 2+** – Slutet av åk 2 / början av åk 3
- **Screening 4+** – Slutet av åk 4 / början av åk 5
- **Screening 6+** – Slutet av åk 6 / början av åk 7
- **Screening 8+** – Slutet av åk 8 / början av åk 9

Vad är tanken med *DiToM* Screeningen?

De fem testerna fokuserar på viktiga matematiska kunskaper som bör vara säkra i början av en årskurs för att nya kunskaper ska kunna läras in med förståelse. Varje test kan genomföras med hela klassen under en enda lektion och utvärderas med relativt liten tidsinsats med hjälp av de medföljande bedömningsverktygen (resultatblanketter, se avsnitt 3). Resultaten ger lärarna en första strukturerad översikt över vilka elever som kan behöva extra stöd inom vissa områden.

Orden ”**kan behöva**” är avgörande: en screening ersätter inte en individuell, kvalitativ bedömning av en elevs kunskaper. I bästa fall ger den initiala ledtrådar om vilka strategier eller lösningsmetoder som kan ha använts av eleven. För en mer detaljerad förståelse krävs observationer och individuella samtal. Screeningen kan dock fungera som en värdefull utgångspunkt för att avgöra vilka elever som skulle ha störst nytta av sådana uppföljande åtgärder.

Vad är ”key skills” i matematik?

Som tidigare nämnts är inlärningen av matematik hierarkisk (Wittmann, 2015, s. 199). Detta gäller särskilt inom aritmetik (tal och räkneoperationer) och algebra – just de områden som *DiToM*-testen

medvetet fokuserar på. Inom dessa områden är det möjligt att i varje inlärningsstadium identifiera "key skills" – utan dessa kan inte vidare inläring ske på ett meningsfullt och hållbart sätt.

Exempel: För att kunna arbeta framgångsrikt med naturliga tal måste elever förstå dem i termer av del-helhetsbegreppet – en utvecklingsprocess som bör slutföras under det första skolåret. Del-helhetsbegreppet innebär till exempel att talet sju förstås som en helhet som består av delar – fem och två, fyra och tre, ett och sex, och så vidare. Denna förståelse bör sedan bli automatiserad: en elev bör inte längre behöva anstränga sig medvetet för att känna igen fem som den saknade delen av sju när två ges som den andra delen. Denna kombination av förståelse och automatisering är karakteristisk för många "key skills": först när vissa färdigheter är automatiserade kan den mentala kapaciteten frigöras för att ta itu med matematiska utmaningar på högre nivå.

Om en elev kan tänka på tal som något som "bildar en helhet" eller en "helhet som kan delas upp i delar", och det är väl fungerande, kan man till exempel se det i beräkningsstrategierna. En elev som tänker på sju som fem och två kommer att lösa $7 - 5$ utan ansträngning, även under det första skolåret, utan att räkna. Elever som saknar denna kompetens fortsätter dock ofta att förlita sig på mödosamma, energikrävande räknestrategier långt upp i grundskolan och gymnasiet. Sådana strategier i addition och subtraktion blir snart ohanterliga när två- eller tresiffriga tal är inblandade. Det blir också svårt att använda relationer mellan multiplikationstabeller – till exempel att inse att $9 \cdot 6$ är sex mindre än det lättare $10 \cdot 6$. Brister i en "key skill" (att förstå tal som sammansättningar) hindrar därmed inläringen av addition, subtraktion, multiplikation, som i sin tur är förutsättningar för mer avancerade färdigheter (division, proportionellt resonemang etcetera).

Detta fortsätter även högre upp i åldrarna: elever som har svårt för naturliga tal kommer att möta ännu större svårigheter med bråk och decimaler. Algebra bygger på insikter som borde ha förvärvats genom att arbeta med de grundläggande räknesätten i grundskolan. Utan dessa insikter kan algebra framstå som en obegriplig kod för eleverna.

Av denna anledning fokuserar *DiToM*-testerna på "key skills" – de som bör vara väl etablerade i början av årskurs 1, 3, 5, 7 och 9, så att vidare matematikinläring kan fortsätta framgångsrikt.

Vad är nästa steg efter att ha genomfört *DiToM* Screeningen?

Med hjälp av de utvärderingsverktyg (resultatblanketter) som beskrivs i kapitel 4 skapar lärarna en tabell (i Excel eller på papper) som kan läsas i två riktningar:

- **Vågrätt:** Varje elevs resultat visar vilka uppgifter som löstes korrekt, delvis korrekt, felaktigt eller lämnades tomta, vilket resulterar i en totalpoäng eleven.
- **Lodrätt:** För varje uppgift visar tabellen hur många elever som löste den korrekt, delvis korrekt, felaktigt eller inte alls.

Med fokus på enskilda elever:

DiToM handlar inte om att sätta "etiketter" på elever utifrån olika nivåer. Undersökningarna är inte utformade för att identifiera elever med "dyskalkyli" till exempel. Den centrala fråga som *DiToM* försöker besvara är: Hur kan lärare på bästa sätt stödja elever som har svårt med viktiga aritmetiska färdigheter? Riktat stöd kräver en korrekt förståelse av varje elevs aktuella förståelse. *DiToM* hjälper till att identifiera de elever som är / kan vara i behov av stöd – varken mer eller mindre. Kapitel 2

innehåller kortfattade beskrivningar om vilka typer av uppföljningsstöd som kan vara till hjälp för varje specifik uppgift.

“Cut off score” (gränsvärden) som diskuteras i kapitel 4 fastställdes utifrån försök med DiToM-screeningar av 8 820 elever i de sju partnerländerna. Med hjälp av latent klassanalys (se Livingston, 2014) gjordes följande grupper.

- **Grupp A:** uppvisar omfattande svårigheter inom flera “key skills”.
- **Grupp B:** visar tecken på svårigheter inom specifika områden.
- **Grupp C:** visar inte direkta tecken på svårigheter

Det är viktigt att komma ihåg att alla screeningar endast ger en ögonblicksbild. Vissa elever kan helt enkelt ha haft en dålig dag eller varit distraherade, medan andra – trots försiktighetsåtgärder – kan ha kopierat svar från någon annan. Screeningresultat bör därför tolkas med försiktighet. De bör alltid jämföras med observationer från den dagliga undervisningen och användas som underlag för ytterligare riktade observationer och uppföljningsuppgifter under de kommande dagarna och veckorna.

Om det står klart att en elev tillhör grupp A finns det anledning att förvänta sig att elevens matematiska svårigheter kommer att förvärras under skolarbetet om inte effektiva åtgärder vidtas i tid. Kapitel 2 kan endast ge allmänna riktlinjer för sådana åtgärder, baserade på de “key skills” som bedöms i varje uppgift. För mer omfattande vägledning hänvisar vi lärarna till relevant pedagogisk litteratur och samtal med speciallärare/specialpedagog.

Elever i grupp B behöver sannolikt också riktat stöd inom åtminstone vissa områden för att lyckas med sitt lärande. Det är viktigt att komma ihåg att alla screeninguppgifter bedömer “key skills”. Screeningen är avsiktligt utformad för att inte skilja mellan högpresterande elever – i idealfallet bör de flesta elever tycka att uppgifterna är ganska lätta. Därför bör även eventuella fel som barn i grupp C gör i enskilda uppgifter tas på allvar, eftersom de kan avslöja brister i viktiga grundläggande färdigheter.

Med tanke på klassen som helhet:

Om flera elever i klassen hade svårt med samma uppgift kan detta tyda på att de har fått otillräcklig träning antingen i sin tidigare skolgång eller innan de började skolan. I sådana fall är det desto viktigare att dessa inlärningsmöjligheter nu erbjuds, även om läroplanen redan har gått vidare till nytt innehåll. Återigen är det viktigt att ta hänsyn till den hierarkiska strukturen i matematikinläringen: varje nivå bygger på en säker förståelse av de grundläggande kompetenser som krävs innan man går vidare.

2 Instruktioner för genomförande av Screening 4+

Den här manualen innehåller instruktioner om hur screeningen genomförs. Screeningen är tänkt att användas antingen vid slutet av åk 4 eller i början av åk 5. Den innehåller följande delar:

- 1 Skriv talet
- 2 Jämföra tal
- 3a Addera 1/10/100 med talsortsövergång
- 3b Subtrahera 1/10/100 med talsortsövergång
- 4 Tallinjen
- 5 Hälften upp till 10 000
- 6a Huvudräkning: Addition och subtraktion
- 6b Huvudräkning: Addition och subtraktion med jämna tusen- och hundratal
- 7a Uppställning addition
- 7b Uppställning subtraktion
- 8 Förståelse av addition och/eller subtraktion
- 9 Talfakta multiplikation
- 10 Talfakta division
- 11 Huvudräkning: Multiplikation och division med jämna tusen- och hundratal
- 12 Förståelse av multiplikation
- 13 Förståelse av textproblem/välj rätt räknesätt.

Följande avsnitt innehåller detaljerade instruktioner om hur screeningen ska genomföras.

Dessa instruktioner finns också tillgängliga som en **separat PDF-fil för nedladdning**. Om du skriver ut filen dubbelsidigt och sätter ihop den får du ett häfte som du kan läsa instruktionerna högt ur under testet. De extra sidorna som ingår i den tryckta versionen gör att du, genom att vända vänster sida av varje dubbelsida mot eleverna, kan hålla upp häftet och läsa instruktionerna från sidan framför dig, medan eleverna kan se motsvarande exempeluppgift på baksidan av häftet.

Information innan du delar ut häftena till eleverna.

Berätta för eleverna:

- Säg till eleverna att vid slutet av åk 4/början av åk 5 så vill du ta reda på vad eleverna redan vet och kan.
- Tala om att de ska få ett litet häfte med uppgifter de ska lösa och att du kommer att guida dem igenom uppgifterna och berätta vad de ska göra.
- Förklara att det är viktigt att de löser uppgifterna själva och att det inte hjälper dem om de tittar på någon annan. Ett skäl kan vara att lösningen kan vara fel. Ett annat att du vill veta vad varje elev kan och vad de kan behöva hjälp med.
- Be eleverna att bara använda pennan. Att sudda ut sitt svar i detta test tar för lång tid. Om de har svarat fel kryssar de över sitt svar i häftet och skriver det nya svaret bredvid. Du kan visa på tavlan hur det kan se ut.
- Tala om att du kommer att leda eleverna genom testet genom att du går igenom uppgifterna en efter en. Säg att det är viktigt att de inte bläddrar fram innan du säger att de ska vända sida.
- Förklara att det är viktigt att de lyssnar noggrant på dina förklaringar. Innan de kan lösa uppgiften kommer du att förklara ett exempel för hela klassen.
- Säg att det är ok om de inte kan svara på alla uppgifter, vissa av dem är lite knepiga. De ska göra sitt bästa.
- Tala om att ibland kommer du be dem att lägga ner pennan fast de inte har hunnit klart och det är ok att inte ha hunnit klart med alla uppgifter.

Ytterligare information till läraren:

Vissa uppgifter har en **tidsgräns**. För att undvika stress, meddela inte detta i förväg. Berätta i stället för dem att du förväntar dig att de kommer att lösa vissa av uppgifterna ganska snabbt eftersom de förmodligen redan kan dem utantill. Meddela att när de har arbetat en tid med en uppgift kan du säga STOPP, eller något annat, och då ska alla verkligen sluta skriva. Betona att det inte är ett problem om någon inte är klar vid den tidpunkten. Målet för all screening är en lugn och stressfri miljö. Du kan även välja att låta eleverna ha två olika pennor med olika färg. När tidsgränsen är uppnådd kan du be eleverna byta penna och på så sätt kan du se hur långt de hann under den givna tiden.

För **uppgifter utan tidsgräns**, bestäm själv om och när du ska fortsätta till nästa uppgift. Detta kan vara lämpligt när de flesta elever är klara med uppgiften. Vissa elever kan ta betydligt längre tid än den stora majoriteten, och även med mer tid kanske de inte slutför uppgiften. Men om andra måste vänta för länge kan det uppstå oro. Därför kan det vara bättre att fortsätta till nästa uppgift och försäkra dem som inte är klara att det inte spelar någon roll, och berömma eleverna för deras ansträngningar.

Om du behöver, och det finns tillgängligt, kan du sätta upp skärmar mellan eleverna.

Se till att det är tomt på elevernas bänkar och att de bara har sin penna framför sig.

Dela ut häftena och be eleverna att skriva sitt namn och klass på förstasidan.

1 Skriv talet

Inget exempel behövs

Screening uppgift

Ingen tidsgräns

a) _____

b) _____

c) _____

”Öppna nu ditt häfte till första sidan så du ser den första uppgiften.”

“Du ser tre rader, a till c. Jag kommer att säga tre tal som du ska skriva på raderna, under varandra.

Det här är de tre talen (säg varje tal min två gånger.)

a) **Femtusen åttio nio** (5 089)

b) **Fyrtiotretusen fem**(43 005)

c) **Trehundratusen femhundra**(300 500)”

“Nu går vi vidare till nästa uppgift. Vänd inte blad.”

2 Jämföra tal

Exempel

→ Skriv följande exempel på tavlan

500	550
600	550

“Låt oss jämföra de två första talen: 500 är *mindre* än 550. Då skriver vi symbolen för *mindre än* mellan: $500 < 550$ ”

→ Skriv $<$ symbolen mellan de två första talen

“Nu tittar vi på nästa två tal. 600 är *större* än 550. Då skriver vi symbolen för *större än* mellan: $600 > 550$ ”

→ Skriv $>$ symbolen mellan de två andra talen.

Screening uppgift

- | | |
|-----------|---------|
| a) 6 001 | 5 999 |
| b) 7 955 | 7 599 |
| c) 99 899 | 102 101 |

“Vänd nu blad till nästa sida.”

“Här ser du tre andra uppgifter. Jämför talen och skriv den rätta symbolen mellan dem.”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken.”

“Nu ska jag förklara nästa uppgift, vänd inte blad än”.

3a Addera 1/10/100 med talsortsövergång

Exempel

“Nästa uppgift utgår från ett givet nummer: “

→ Skriv 1 mer än 236 på tavlan

“En mer än 236 är (låt eleverna svara först) .. 237.”

→ skriv 237 bredvid 236

“skriv tio mer än 350 är (låt eleverna svara först) .. 360.”

→ skriv 360 bredvid 350

“skriv ett hundra mer än 570 är (låt eleverna svara först) ...670*

→ Skriv 670 bredvid 570

Screening uppgift

a) 1 mer än 9 899: _____

b) 10 mer än 4 590: _____

c) 100 mer än 3 900: _____

Ingen tidsgräns

“Vänd nu sida till första uppgiften.”

“Här ser du tre uppgifter som frågar efter ett mer, tio mer och hundra mer. Skriv det rätta svaret på linjen..”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken.”

“ Nu ska jag förklara nästa uppgift, vänd inte sida.”

3b Subtrahera 1/10/100 med talsortsövergång

Exempel

“Den här uppgiften liknar den vi just gjorde men den här gången handlar det om vad som är mindre än ett visst tal.”

”Här är ett exempel.”

→ Skriv 1 mer än 236 på tavlan

“En mer än 236 är (låt eleverna svara först) .. 237.”

→ skriv 237 bredvid 236

“och tio mindre än 350 är (låt eleverna svara först) .. 340.”

→ skriv 340 bredvid 350

“och ett hundra mindre än 570 är (låt eleverna svara först) ...470 ”*

→ Skriv 470 bredvid 570

Screening uppgift

a) 1 mindre än 7 000: _____

b) 10 mindre än 3 500: _____

c) 100 mindre än 4 000: _____

Ingen tidsgräns

“Vänd nu sida till första uppgiften.”

“Här ser du tre uppgifter som frågar efter ett mer, tio mer och hundra mindre. Skriv det rätta svaret på linjen.”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken.”

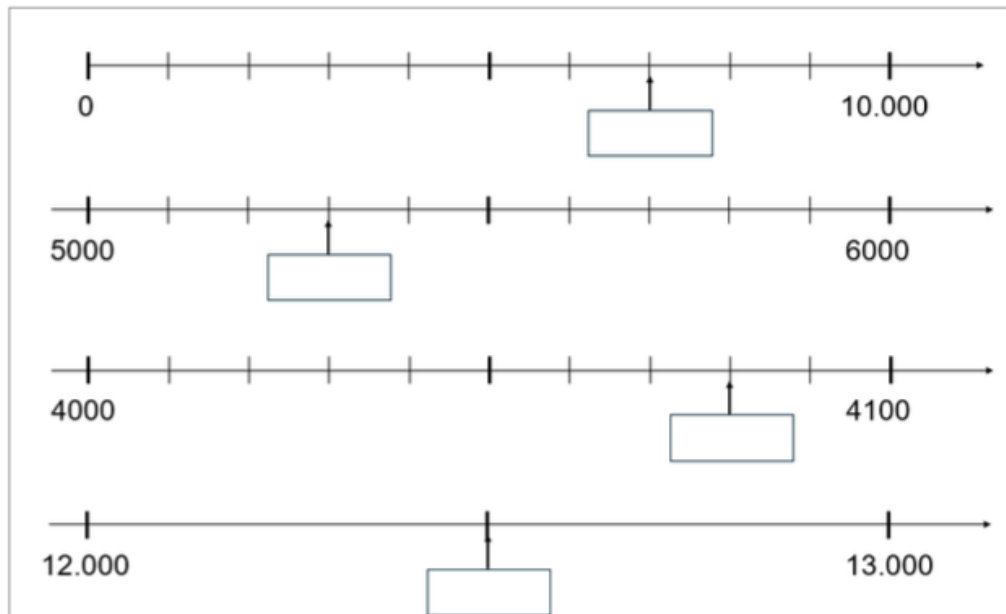
“Nu ska jag förklara nästa uppgift.”

4 Tallinjen

Inget exempel behövs

Ingen tidsgräns

Screening uppgift



“Vänd nu blad till nästa sida.”

“Här ser du fyra olika tallinjer. Skriv ner det tal som saknas i rutan. Pilen pekar på det nummer som du ska skriva..”

“Titta noga, för alla tallinjer är olika. Titta vilka tal som redan är inskrivna på tallinjen och hur många steg det är emellan de talen.”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken.”

5 Hälften upp till 10 000

Exempel

“Nästa uppgift handlar om hälften av något. Här är ett exempel”

→ Skriv **hälften av 400**: ____ på tavlan

“hälften av 400 är.... (låt eleverna svara först) .. 200.”

→ Skriv **hälften av 400**: **200** på tavlan

Screening uppgift

- a) Hälften av 1000: _____
- b) Hälften av 500: _____
- c) Hälften av 700: _____
- d) Hälften av 3 000: _____

Tid : 40 sek

“Vänd nu blad till nästa sida”

“Här ser du tre tal. Skriv ner hur mycket hälften är av dem.”

“Var så god att börja”

→ Räkna till 30 tyst för dig själv

“Nu fortsätter vi till nästa uppgift. Det gör ingenting om du inte har gjort klart.”

Nu ska jag förklara nästa uppgift”

6a Huvudräkning: Addition och subtraktion

Inget exempel behövs

Screening uppgift

a) $248 + 52 =$ _____

b) $637 + 99 =$ _____

c) $723 - 24 =$ _____

d) $453 - 99 =$ _____

Tid: 60 sek

“På nästa sida finns uppgifter som handlar om addition och subtraktion. Det är två additionsuppgifter och två subtraktionsuppgifter”

“Titta noga på talen innan du börjar räkna.”

“Räkna ut alla uppgifterna i huvudet och skriv bara ner svaret.

“Vänd blad till nästa sida.”

Titta på talen och tänk på att det två additionsuppgifter och sedan två subtraktionsuppgifter. Ni kan börja nu. “

→ *Räkna till 60 tyst för dig själv*

“Lägg ner pennan. Det gör ingenting om du inte har gjort klart. Nu ska jag förklara nästa uppgift.”

6b Huvudräkning: Addition och subtraktion med jämna tusen- och hundratal

Inget exempel behövs

Screening uppgift

a) $3\,600 + 900 =$ _____

b) $56\,000 + 8\,000 =$ _____

c) $3\,200 - 700 =$ _____

d) $54\,000 - 5\,000 =$ _____

Tid: 60 sek

”På nästa sidan är det fler uppgifter som handlar om addition och subtraktion”

”Titta noga på talen innan du börjar räkna.”

”Vänd nu blad till nästa sida. Var noga med att se om det är additions- eller subtraktionstecknet.”

”Var så god att börja.”

→ *Räkna till 60 tyst för dig själv*

”Lägg ner din penna. Det gör ingenting om du inte har gjort klart.”

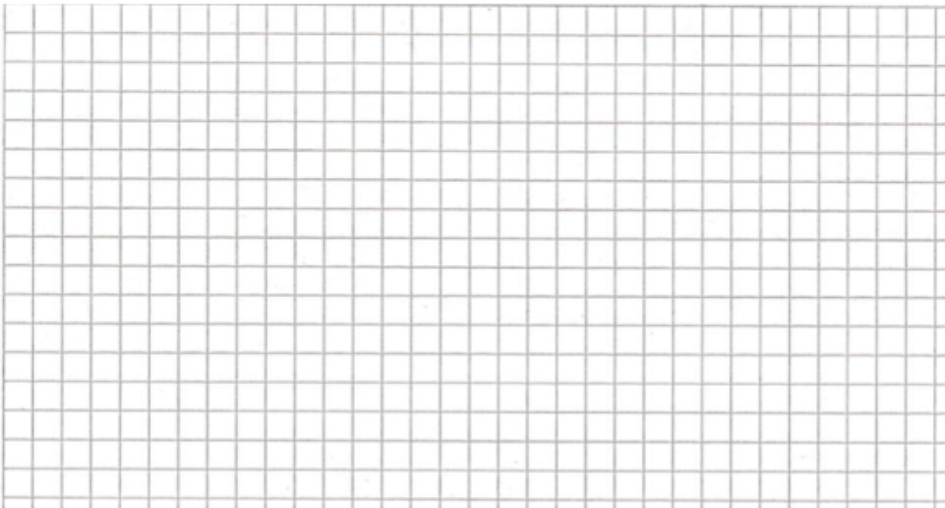
”Vänd blad till nästa sida. Vi behöver inget exempel för de uppgifterna.”

7a Uppställning addition

Inget exempel behövs

Ingen tidsgräns

Screening uppgift

a) $548 + 36$	b) $760 + 564$
	

“Här ser du två additionsuppgifter. Den här gången ska du ställa upp additionen.

“Starta varje uppgift genom att skriva det ena talet under det andra.”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken. Vänd inte blad till nästa sida”

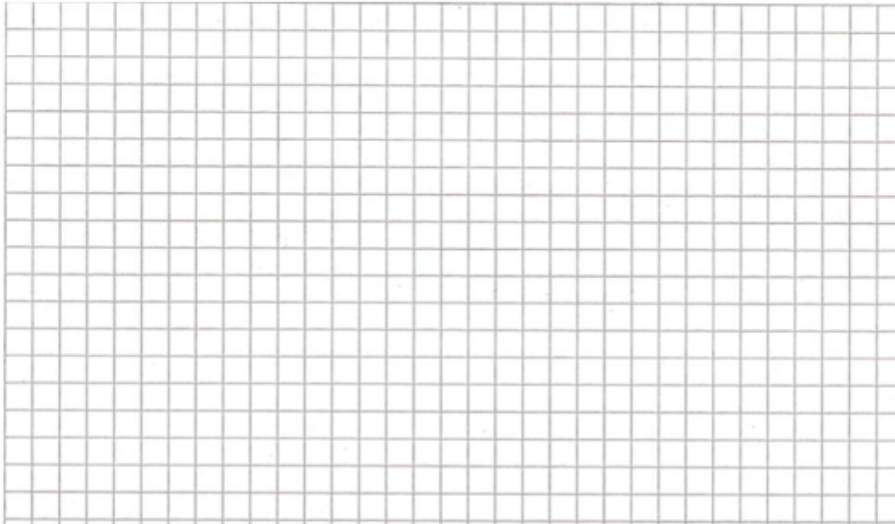
7b Uppställning subtraktion

Inget exempel behövs

Ingen tidsgräns

Screening uppgift

a) $711 - 67$	b) $806 - 534$
---------------	----------------



“Vänd blad så ser du två nya uppgifter.”

“Den här gången ska du ställa upp subtraktion.”

“Starta varje uppgift genom att skriva det ena talet under det andra.”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken. Vänd inte sida utan vänta tills jag säger till.”

8 Förståelse av addition och/eller subtraktion

Inget exempel behövs

Ingen tidsgräns

Screening uppgift

David är 35 år gammal.
Han är 4 år äldre än Helen.
Hur gammal är Helen?

Min uträkning: _____

Mitt svar : Helen är _____ år.

“Vänd nu blad i ditt häfte, Nästa uppgift är en textuppgift.”

→ *Läs uppgiften två gånger*

“David är 35 år gammal. Han är 4 år äldre än Helen.
Hur gammal är Helen?”

“Skriv ner din uträkning och ditt svar.”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken.”

“Innan du vänder blad till nästa sida ska jag förklara nästa uppgift. Den handlar om multiplikation. “

“ Skriv ner svaren så snabbt du kan men försök att få dem alla rätt.

9 Talfakta multiplikation

Inget exempel behövs

Screening uppgift

a) $6 \cdot 1 =$ _____

b) $10 \cdot 8 =$ _____

c) $8 \cdot 4 =$ _____

d) $7 \cdot 9 =$ _____

e) $9 \cdot 0 =$ _____

f) $7 \cdot 5 =$ _____

Tid: 30 sek

“Vänd nu blad till nästa sida. Här är uppgifterna ni ska lösa”. Nu ska vi jobba med multiplikation.”

“Var så god att börja.”

→ *Räkna till 30 tyst för dig själv*

“Nu fortsätter vi till nästa uppgift. Det gör ingenting om du inte har gjort klart.”

“Nästa uppgift ser likadan ut men handlar om division.”

“ Skriv ner svaren så snabbt du kan och försök att få alla rätt. Gör ditt bästa.”

“Vänd blad till nästa uppgift nu.”

10 Talfakta division

Inget exempel behövs

Screening uppgift

a) $\frac{80}{10} =$ _____

Tid: 30 sek

b) $\frac{6}{6} =$ _____

c) $\frac{28}{4} =$ _____

d) $\frac{72}{9} =$ _____

e) $\frac{30}{5} =$ _____

f) $\frac{7}{1} =$ _____

“Här är några divisionsuppgifter som du ska lösa.”

“Skriv ner svaret på varje uppgift så snabbt du kan.”

“Var så god att börja.”

→ *Räkna till 30 tyst för dig själv*

“Nu fortsätter vi till nästa uppgift. Det gör ingenting om du inte har gjort klart.”

“Vänd blad till nästa sida”

11 Huvudräkning: Multiplikation och division med jämna tusen- och hundratal

Inget exempel behövs

Ingen tidsgräns

Screening uppgift

a $7 \cdot 5\,000 =$ _____

b $50 \cdot 20 =$ _____

c $\frac{60\,000}{100} =$ _____

d $\frac{3\,000}{5} =$ _____

“Här två multiplikationsuppgifter och två divisionsuppgifter. Det är höga tal så det är ok om det tar längre tid. Var uppmärksam på alla nollor.”

“Använd huvudräkning och skriv bara ner svaret. Var noga med om det är multiplikation eller division.”

“Var så god att börja! När du är färdig lägger du ner pennan på bänken.”

“Bra jobbat, vi fortsätter. Det är bara några få uppgifter kvar. Vänd blad till nästa sida”

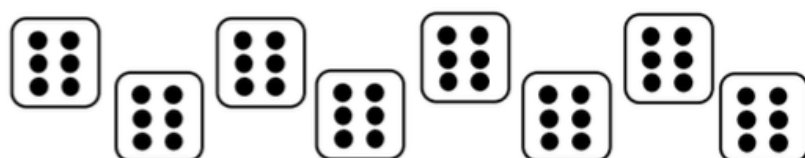
12 Förståelse av multiplikation

Ingen tidsgräns

Inget exempel behövs

Screening uppgift

Det finns en uträkning som ger svaret på det totala antalet prickar på alla tärningar.



Skriv en uträkning med multiplikation som passar till bilden.

Du behöver inte skriva svaret.

Uträkning : _____

“Titta på den här bilden. Du kan se 8 tärningar med lika många prickar. För att räkna ut hur många prickar det är så kan du räkna alla prickar men det är ganska jobbigt. Du kan komma fram till svaret genom att göra en uträkning.”

“Din uppgift är att skriva ner en uträkning med multiplikation. Du behöver inte skriva ner svaret, bara uträkningen som leder fram till hur många prickar det är på alla tärningarna tillsammans.”

Skriv ner uträkningen på linjen..”

“När du är färdig lägger du ner pennan på bänken.”

--

“Vänd nu blad till nästa sida. Det är sista uppgiften. Jag kommer först att förklara den för er. “

13 Förståelse av textproblem/välj rätt räknesätt

Inget exempel behövs

Ingen tidsgräns

Screening uppgift

- | | | | |
|----|---|----------------|---|
| a) | En bagare köper 24 paket med ägg.
I varje paket är det 6 ägg.
Hur många ägg köper bagaren? | $\frac{24}{6}$ | 1 |
| b) | 24 ägg är lagda i kartonger.
Varje kartong innehåller 6 ägg.
Hur många kartonger blir fyllda? | $24 - 6$ | 2 |
| | | $24 \cdot 6$ | 3 |
| c) | Det finns 24 ägg i kylan.
Kocken tar ut 6 ägg från kylan.
Hur många ägg finns kvar i kylan? | $24 + 6$ | 4 |

“Här ser du tre olika textproblem och fyra olika uträkningar. “

“Jag kommer att läsa de tre textproblemen som står på vänster sida.”

→ *Läs de tre texterna*

“På höger sida kan du se fyra uträkningar. Vilken uträkning passar ihop med vilket textproblem? Dra ett streck mellan dem som hör ihop. Du behöver inte räkna ut svaret. Det kommer att bli en uträkning över.”

“När du är färdig lägger du ner pennan och stänger ditt häfte. Jag kommer och samlar in dem.”

→ Efter att samlat in häftena, tacka elever för deras arbete med uppgifterna. Kanske kan du låta dem springa ett varv runt skolan eller spela ett spel.

3 Bakgrund och förslag på stöd avseende de enskilda uppgifterna i *DiToM 4+*

Uppgift 1: Skriv talet

Key skills som testas i denna uppgift

Den här uppgiften bedömer elevernas förmåga att översätta det de hör till korrekt skrivna tal, det vill säga att placera siffrorna i rätt ordning utifrån positionssystemet.

a)	<u>5 089</u>
b)	<u>43 005</u>
c)	<u>300 500</u>

Varför är det en keyskill?

Att kunna höra ett tal och skriva det korrekt med siffror är en grundläggande räknefärdighet eftersom det visar att eleverna kan:

- översätta mellan talade och skriftliga representationer, vilket är avgörande för att följa matematiska instruktioner, tolka textproblem och kommunicera matematiska idéer tydligt;
- arbeta med tal, vilket innebär att de är bättre förberedda för aritmetik, jämförelse och ordning av tal, samt att känna igen numeriska mönster;
- använda arbetsminne och uppmärksamhet, vilket innebär att eleverna kan hålla talet i minnet och ordna siffrorna korrekt, vilket stärker det övergripande tänkandet och minnesförmågan;
- tillämpning i vardagliga situationer, till exempel att skriva datum, mått och personlig information.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

När elever ombeds skriva tal som 5 089, 43 005 eller 300 500 kan olika typer av fel uppstå, vilka alla indikerar olika utmaningar vid bearbetning och registrering av tal. De kan placera fel eller kasta om siffror, till exempel att skriva 5 089 som 5 809, vilket visar svårigheter att bibehålla rätt sifferordning. Tal som innehåller nollor i mitten eller mellan siffror ger ofta särskilda problem, eftersom elever kan utelämna eller placera dessa nollor fel, till exempel att skriva 43 005 som 4305, eller 300 500 som 3 005 000. Elever kan även skriva talen "som de låter" om de inte befäst strukturen för positionssystemet, de skriver i den ordning de hör dem: femtusenåttionio som 5 000 809. Dessutom kan de hoppa över delar av talet helt och hållet, vilket tyder på problem med arbetsminnet eller att bibehålla uppmärksamheten medan de skriver. Elever kan också missförstå talet, förväxla liknande siffror eller kräva att talet upprepas flera gånger, vilket kan tyda på svårigheter med hörförståelse eller fokus.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Elever som kämpar med att skriva tal som läses högt har ofta nytta av stöd som att känna igen mönster i tal, snarare än att skriva varje siffra individuellt. För tal med fler än fyra siffror är det bra att visa eleverna att tal består av upprepade grupper om tre siffror – hundratal, tiotal och ental – och hur dessa grupper bildar tusental, tiotusental, hundratusental med mera. Att använda visuella verktyg som diagram, talrutor eller platsvärdesmaterial kan göra dessa mönster lättare att förstå. Övningen bör uppmuntra eleverna att skriva varje grupp som en enhet och koppla det talade talet till dessa grupper, snarare än att bara fokusera på enskilda siffror. Att stärka avlyssnings-, minnes- och sekvenseringsförmågan är fortfarande användbart, men huvudsyftet är att hjälpa eleverna att känna igen och använda de upprepade mönstren i stora tal så att de kan skriva dem korrekt och säkert. Dessutom kan muntliga övningar där lärare räknar högt i steg om 10 eller 100 medan eleverna skriver ner talen vara en användbar metod.

Uppgift 2: Jämföra tal

Key skills som testas i denna uppgift

Den här uppgiften bedömer elevernas förmåga att jämföra flersiffriga tal och att representera jämförelsen korrekt med hjälp av symbolerna för större än, mindre än eller lika med.

a) 6 001	5 999
b) 7 955	7 599
c) 99 899	102 101

Varför är det en keyskill?

Att jämföra tal är en viktig färdighet eftersom den är grundläggande för att förstå storleken och ordningen av tal. När elever jämför tal börjar de känna igen mönster i siffror och hur tal ökar eller minskar, vilket stöder förståelsen av platsvärde. Denna färdighet stärker också logiskt tänkande och beslutsfattande, eftersom eleverna måste analysera tal noggrant för att avgöra vilket som är större, mindre eller om de är lika. Att jämföra tal utgör grunden för många framtida matematiska uppgifter, inklusive att förstå olikheter, lösa aritmetiska problem och arbeta med decimaltal.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

När eleverna ombeds infoga rätt symbol (<, >, =) mellan tal som 5 999 och 6 001, sedan mellan 7 955 och 7 599, eller mellan 99 899 och 102 101, kan flera vanliga fel uppstå. Ett vanligt misstag är att fokusera på den sista siffran snarare än hela talet. Till exempel kan en elev skriva $5\,999 > 6\,001$ eftersom 9 är större än 1 på entalsplatsen. På liknande sätt, i exemplet med 7 955 och 7 599, kan en elev bara jämföra de två sista siffrorna (55 vs. 99) och felaktigt dra slutsatsen att 7 955 är mindre än 7 599, och ignorera hundratalplatsen. Ett annat vanligt fel är förvirring kring siffror, där eleverna tror att 99 899 är större än 102 101 eftersom "99..." verkar större än "10...". Vissa kan också använda likhetstecknet felaktigt, till exempel genom att skriva $7\,955 = 7\,599$ eftersom talen ser väldigt lika ut.

Det finns också möjlighet till misstag i symbolhanteringen, där en elev vet att 5 999 är mindre än 6 001 men ändå skriver $5\,999 > 6\,001$, vilket visar förvirring kring symbolens riktning. I ett försök att utesluta fel gällande symbolhantering tas symbolerna "större än" och "mindre än" upp i exempeluppgifterna så uppgiften bara testar förmågan att jämföra tal. Vid ett felaktigt svar behöver läraren prata med eleven så det inte är symbolen som användes felaktigt.

Tecken att uppmärksamma är elever som gör jämförelser långsamt eller med tvekan, som konsekvent förlitar sig på den sista siffran och som upprepade gånger använder "=" som en gissning. Alla dessa strategier tyder på missförstånd om platsvärde eller inkorrekt användning av jämförelsesymboler.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

När elever har svårt att jämföra tal är det ofta två huvudtyper av fel. Vissa elever vet vilket tal som är större eller mindre men använder fel symbol (<, >, =), medan andra kämpar med att avgöra vilket tal som är större och ibland blir förvirrade av nominellt värde hos ensiffriga tal. Stödet kan anpassas till varje situation. För elever som blandar ihop symboler är det bra att lära ut betydelsen av varje symbol, låta dem verbalisera sitt resonemang innan de skriver och ge övningar inriktad på korrekt symbolanvändning. För elever som kämpar med att förstå vilket tal som är större kan läraren vägleda dem att jämföra tal siffra för siffra från vänster till höger, börja med enklare heltal innan de går vidare till större tal och decimaler, och uppmuntra dem att förklara sitt tänkande, så att de utvecklar genuin förståelse snarare än att bara följa regler.

Uppgift 3a: Addera 1/10/100 med talsortsövergång

Key skills som testas i denna uppgift

Den här uppgiften bedömer elevernas förståelse för platsvärde och deras förmåga att addera 1, 10 eller 100 korrekt, inklusive talsortsövergång, och att arbeta korrekt med flersiffriga tal.

- a) 1 mer än 9 899: _____

b) 10 mer än 4 590: _____

c) 100 mer än 3 900: _____

Varför är det en keyskill?

Att addera 1, 10 eller 100 med talsortsövergång är en viktig färdighet eftersom den hjälper eleverna att förstå hur tal förändras baserat på platsvärde. Den förstärker idén att siffror i olika positioner representerar olika värden och visar hur man "skapar tiotal" och så vidare, när ett tal överstiger 9. Att behärska denna färdighet är avgörande för huvudräkning, addition med större tal och senare aritmetiska operationer, eftersom den både bygger på konceptuell förståelse och procedurflyt. Den hjälper också eleverna att känna igen mönster i tal och tillämpa addition i praktiska, verkliga situationer.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Eleverna kan addera på fel ställe, till exempel addera 100 till 3 900 och skriva 3 910 i stället för 4 000, eller addera 10 till 4 590 och skriva 4 690. Eleverna kan addera 1 till 9 899 och öka tiotalssiffrorna vartefter de räknar, för att nå 9 900.

De kan missförstå vad "1 mer", "10 mer" eller "100 mer" betyder och tillämpa ökningen på fel position. Ett annat vanligt misstag är att följa enkla mönster felaktigt, som att alltid öka den sista siffran eller bara öka en siffra oavsett talets struktur. Dessa fel tyder ofta på svårigheter med att förstå platsvärden, talsortsövergång och koppla addition till rätt position i flersiffriga tal, vilket är avgörande för korrekt beräkning och huvudräkning.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Om en elev har svårt att addera 1, 10 eller 100 är det viktigt att först bedöma deras förståelse av positionssystemet och platsvärdet. Arbeta med konkret material (ental, tiotal och hundratal) för att till exempel bilda tiotal av ental och så vidare, och på så sätt åskådliggöra hur tal förändras vid addition. Fokusera sedan på uppgifter där talsortsövergång krävs, till exempel att addera 1 till 9 899 eller 100 till 3 900. Gradvis bör eleverna öva på att lösa dessa uppgifter utan material, och bygga vidare på sina tidigare konkreta erfarenheter. Uppmuntra eleverna genomgående att verbalisera sina resonemang, först med vägledning och senare självständigt.

Uppgift 3b: Subtrahera 1/10/100 med talsortsövergång

Key skills som testas i denna uppgift

Den här uppgiften bedömer elevernas förståelse för platsvärde och deras förmåga att subtrahera 1, 10 eller 100 korrekt.

Varför är det en keyskill?

En god förståelse av positionssystemet utgör grunden för flexibel beräkning med flersiffriga tal (och senare decimaltal). Vidare för att relatera dessa tal till varandra och till den värld vi lever i (till exempel att uppskatta, göra grova beräkningar och korrekt bedöma kvantitativa proportioner i verkliga situationer).

Förmågan att lösa uppgifter som involverar uppdelning av tal indikerar en högre förståelsenivå än uppgifter som involverar ihopläggning; svårigheter med uppdelning är vanligare.

a) 1 mindre än 7 000:	_____
b) 10 mindre än 3 500:	_____
c) 100 mindre än 4 000:	_____

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Eleverna kan svara att 1 mindre än 7 000 är 6 000, eller (om de har lärt sig att sådana svar bör innehålla en eller flera 9:or) 7 009 eller 6 009 (andra svar är möjliga). 10 mindre än 3 500 kan bland annat vara 3 400 eller 2 500. 100 mindre än 4 000 kan vara 3 000 (andra felaktiga svar kan också förekomma).

Bortsett från fel eller uteblivna svar bör det betraktas som ett "varningstecken" om en elev förlitar sig på att ställa upp subtraktion för att hitta svar, även om svaren är korrekta. Eleverna ska kunna ange svaren snabbt, baserat på deras förståelse för att tusen är lika med tio hundratal, hundra är lika med tio tiotal och så vidare.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

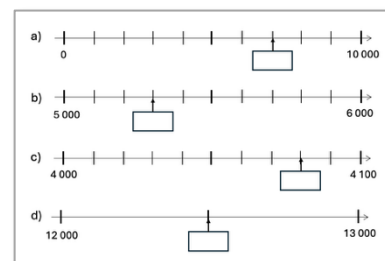
Som nämnts är förståelse av platsvärde mångfacetterad. Om en elev har svårigheter med denna uppgift rekommenderas en mer omfattande bedömning av deras nuvarande förståelse av principerna för positionssystemet.

Beroende på resultaten av elevens förståelse kan det vara nödvändigt att återgå till ett grunderna inom tiotalsovergång med eleven. Det är viktigt att använda uppgifter där eleven bildar tiotal med lämpligt material. Utifrån detta bör fokus flyttas till specifika uppgifter som kräver uppdelning av talsorter, såsom i DiToM-uppgift 3b eller 5 (till exempel hälften av 3 000). Som alltid är det viktigt att eleverna kan lösa sådana uppgifter, först med material och sedan utan material, med utgångspunkt i deras tidigare erfarenheter av olika representationer. För effektiv förståelse bör eleverna upprepade gånger uppmuntras att verbalisera sina handlingar.

Uppgift 4: Tallinjen

Key skills som testas i denna uppgift

Den här uppgiften bedömer elevernas förmåga att känna igen intervaller och avstånd mellan tal på en tallinje och att placera tal (upp till 13 000) på rätt plats på tallinjer.



Varför är det en keyskill?

Att placera tal korrekt på en tallinje är en aspekt av att förstå numeriska samband, särskilt ordinaltal (vilka tal som kommer före eller efter andra). Det hjälper eleverna att visualisera storleken och positionen på tal, och förstå samband mellan tal. Det förstärker förståelsen av platsvärde genom att visa hur siffror bidrar till ett tals totala värde.

Att representera tal på en tallinje är viktigt för många andra färdigheter, såsom att avrunda tal och uppskatta summor och differenser. Representationen av tal på en tallinje används senare för bråk, decimaltal, mått och skalor.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Vissa elever räknar skalstrecken utan att förstå skalan, vilket leder till fel (särskilt om intervallen inte är 1). Ett vanligt fel är att ignorera nollans roll i tal (utelämna eller felplacera nollor). Till exempel, i uppgift 4a, kan de skriva 700 i stället för 7 000, eller i uppgift 4b, 5 030 i stället för 5 300. Ibland tyder de misstag eleverna gör i denna uppgift på djupare missförstånd i taluppfattningen eller förståelsen av platsvärde. Till exempel kan tal placeras i fel ordning (till exempel 70 000 före 10 000), vilket tyder på förvirring kring numerisk ordning.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Om en elev inte kan göra en rimlig bedömning av var ett tal ska placeras kan det tyda på svag numerisk förståelse. Lärare behöver avgöra om svårigheten ligger i räkningen (till exempel att hoppa över tal), missförstånd av platsvärde (till exempel att förväxla 100 med 10), skala (till exempel att inte förstå lika radavstånd) eller att ta bort eller felplacera nollor.

Eleverna har nytta av att öva på uppgifter som innebär att placera tal på en tallinje. Fokus bör ligga på delvis ifyllda tallinjer, som eleverna måste slutföra med de saknade talen. Färgkodade riktmärken (till exempel 0, 10, 100) kan förstärka förståelsen. Det är också lämpligt att öva på att placera tal på en tom tallinje och att uppmuntra eleverna att uppskatta var talet ska stå, baserat på talen i början och slutet av tallinjen. Lärare kan också be eleverna förklara sina placeringar. Där det är möjligt kan lärare använda interaktiva tallinjer som låter eleverna dra och släppa tal. Verkliga sammanhang (till exempel tidslinjer, linjaler, temperaturskalor) kan också vara till hjälp för bättre förståelse.

Uppgift 5: Hälften upp till 10 000

Key skills som testas i denna uppgift

Flyt och konceptuell förståelse för halvering av stora tal genom att använda effektiva mentala strategier, inklusive platsvärdesresonemang och talsortsomvandling.

- | | |
|----|-------------------------|
| a) | Hälften av 1000: _____ |
| b) | Hälften av 500: _____ |
| c) | Hälften av 700: _____ |
| d) | Hälften av 3 000: _____ |

Varför är det en keyskill? ,

Att dela större tal i hälften är grundläggande för mer komplexa divisionsoperationer, eftersom det ger en förståelse till att dividera med andra tal genom upprepad halvering och talsortsomvandling. Elever som redan har utvecklat förmågan att halvera tal visar starkare taluppfattning och förståelse för platsvärden, och inser hur siffror beter sig över olika platsvärdespositioner när de delas. Dessutom är halvering avgörande för att utveckla mentala beräkningsstrategier som sträcker sig bortom division. Till exempel kan halverings- och dubblingstekniker användas för att förenkla multiplikationsproblem, hitta procentsatser (som 50 % och 25 %) och i arbetet med bråk, vilket också stöder proportionellt resonemang. Dessutom har halvering verkliga tillämpningar som eleverna stöter på regelbundet. Från att dela mängder lika mellan två personer till att beräkna rabatter, mäta matlagnings ingredienser eller bestämma tidsintervall, är förmågan att snabbt och noggrant halvera kvantiteter praktiskt taget ovärderlig. När eleverna uppnår flyt i att räkna ut hälften kan kognitiva resurser fokuseras på resonemang och problemlösning på högre nivå.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Beräkningsfel är vanliga. Elever kan felaktigt halvera enskilda siffror utan att ta hänsyn till platsvärdet, till exempel genom att tolka "hälften av 3 000" som "hälften av 3, hälften av 0, hälften av 0, hälften av 0" i stället för att känna igen 3 000 som 3 tusental. Vissa elever gör beräkningsfel med grundläggande halveringsfakta, som att säga att hälften av 1 000 är 50 i stället för 500, vilket indikerar luckor i deras förståelse för hur platsvärdet påverkar delningen. Missuppfattningar om platsvärdet representerar allvarigare konceptuella svårigheter. Till exempel, när de delar 7 000 i hälften kan de ge svar som 350 i stället för 3 500, vilket visar att de förstår aritmetiken (hälften av 7 är 3,5) men inte kan tillämpa platsvärdespositionen korrekt för att placera siffrorna korrekt. Uppmärksamma överdriven tillit till räknestrategier eller skriftliga algoritmer för problem som bör lösas med huvudräkning, till exempel att använda division för att hitta hälften av 1 000. Inkonsekventa prestationer – att korrekt halvera vissa tal samtidigt som man kämpar med liknande problem – tyder på svag konceptuell förståelse. Dessutom kan elever som undviker dessa problem eller uttrycker oro, sakna tilltro till sina kunskaper om platsvärde eller grundläggande halveringsfakta. Synlig tvekan när man arbetar med nollor i stora tal avslöjar ofta osäkerhet om hur platsvärde påverkar delningen.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Konkret och visuellt stöd ger viktiga stödstrukturer för elever som kämpar med abstrakta begrepp. Använd platsvärdesmaterial som tiobasmaterial för att visa hur halvering påverkar olika platsvärden. Visa till exempel att hälften av 1 000 innebär att ta 10 hundratal och dela dem i två lika stora grupper om 5 hundratal vardera, vilket resulterar i 500. Alternativt kan du använda tallinjer, matriser eller tiobasmaterial för att illustrera sambandet mellan hälften och division med 2. Grundläggande halveringsfakta för ensiffriga tal och multiplar av 10 är viktiga. Lär eleverna att känna igen mönster, vilket kan hjälpa dem att tillämpa kända fakta på större tal effektivt; till exempel, om de vet att hälften av 10 är 5, då är hälften av 100 50, hälften av 1 000 är 500, och så vidare. Integrera riktmärken för uppskattning och jämförande frågor, använd en "förutsäg-sedan-kontrollera"-uppskattning för att utvärdera rimlighet innan beräkning, till exempel: "Är hälften av 700 närmare 300 eller 400? Varför?" Uppmuntra flera metoder – att visa i ett diagram, omgruppera med material eller huvudräkning med hälften av kända tal – följt av korta reflektioner som jämför effektivitet och tydlighet. Använd verkliga sammanhang som naturligt antyder hälften och möjliggör oberoende kontroll, till exempel "Ett recept kräver 1000 g mjöl; hur mycket behövs till en halv sats?" Be eleverna att designa visuella presentationer av halveringsmönster och att presentera sina egna halveringssammanhang. Låt dem förklara hur sammanhanget hjälper till att verifiera resultatet och därigenom koppla samman beräkning, tolkning och resultat. Koppla hälften ytterligare till fjärdedelar och koppla ihop hälften med dubbelt.

Uppgift 6a: Huvudräkning: Addition and subtraktion

Key skills som testas i denna uppgift

Förmåga att tillämpa huvudräkningsstrategier för addition och subtraktion, använda kompensationsmetoder och strategier för nära tal och förståelse för platsvärden.

Varför är det en keyskill?

Att behärska strategier för huvudräkning är grundläggande för avancerat matematiskt lärande, eftersom eleverna utvecklar den numeriska flexibilitet som är avgörande för att hantera komplexa flerstegsproblem, algebraiskt resonemang och proportionellt tänkande senare i livet. Strategier för huvudräkning förbättrar problemlösningsförmågan avsevärt genom att minska den kognitiva belastningen. Det gör att eleverna kan fokusera på att förstå problemsammanhang, välja lämpliga operationer och engagera sig djupare i matematiskt resonemang. Dessutom är dessa strategier kopplade till elevernas konceptuella kunskap om tal och deras samband, taluppfattning och platsvärde (till exempel när eleverna inser att $248 + 52$ kan lösas genom att tänka " $248 + 2 + 50$ " eller till och med " $(250 - 2) + (50 + 2)$ ", eller att $637 + 99$ blir lättare som " $637 + 100 - 1$ "). Detta utgör grunden för senare lärande som involverar decimaltal, bråk och proportionellt resonemang. Slutligen visar sig förmågan att snabbt och noggrant utföra huvudräkningar med hjälp av kompensations- och uppskattningsstrategier vara ovärderlig i olika vardagliga praktiska situationer.

a) $248 + 52 =$ _____

b) $637 + 99 =$ _____

c) $723 - 24 =$ _____

d) $453 - 99 =$ _____

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Beräkningsfel uppstår när elever kämpar med kompensationsstrategier. De kan identifiera 99 som nära 100 men glömmer att justera sitt slutliga svar och beräkna $637 + 99$ som $637 + 100 = 737$ utan att subtrahera 1. Elever kan också göra aritmetiska fel med justerade tal, som att felberäkna $248 + 50$ eller $723 - 20$, vilket visar luckor i grundläggande talfakta som förvärrar strategiska utmaningar. Strategivalfel indikerar konceptuella svårigheter. Elever kan tillämpa olämpliga strategier, använda kompensation när enklare metoder fungerar bättre eller misslyckas med att inse när tal är tillräckligt nära talen 10 eller 100 för justering. Andra använder ineffektiva räknestrategier eller försöker använda skriftliga algoritmer i huvudet, vilket kan leda till fel och ökad kognitiv belastning. Inkonsekventa prestationer, undvikande av mentala strategier eller att uttrycka oro över att "räkna i huvudet" kan tyda på svaga grunder i taluppfattning.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Det är viktigt med förståelse för platsvärden. Använd tallinjer för att illustrera kompensationsmetoder, som att visa hur $637 + 99$ kan representeras genom att hoppa till 737 ($637 + 100$) och sedan gå tillbaka ett steg. Platsvärdesscheman hjälper eleverna att förstå hur justeringar över siffror kan göras när de arbetar med tal som $453 - 99$. Tiobasmaterial kan modellera "till jämnare tal" och visa varför $248 + 52$ blir lättare när det skrivs om till $250 + 50$. Lär eleverna att känna igen "nära tal" och när kompensationsstrategier är mest effektiva. Hjälプ dem att identifiera tal nära 10 eller 100 (som 199, 201, 98, 102) och öva på tvåstegsprocessen: justera för att skapa "jämnare" tal, kompensera sedan i motsatt riktning. Använd problem utformade för dessa mönster, såsom $248 + 52$ (nästan dubletter), $637 + 99$ (nästan hundratal) och $723 - 24$ (nästan tiotal). Uppmuntra eleverna att fråga: "Är dessa tal nära 10 eller 100?" och "Skulle justering hjälpa?" Lär ut kompensationsstegen: identifiera nära tal, bestäm justeringen, beräkna med "jämnare" tal och kompensera i motsatt riktning. Koppla till verkliga scenarier, till exempel: "En skolresa kostar 199 kr per elev. Om 637 elever deltar, ungefär hur mycket pengar kostar det?" Gå från enkla till komplexa övningar, börja med enskilda justeringar ($37 + 19 = 37 + 20 - 1$) innan du går vidare till större tal. Använd diskussioner och samtal om tal för att låta eleverna dela strategier och utveckla matematisk flexibilitet. Kombinera formell och informell bedömning med hjälp av övningar för att utvärdera strategival. Låt eleverna förklara sina resonemang för att identifiera missuppfattningar. Kreativa projekt, som att designa matematikspel eller skapa strategiaffischer, uppmuntrar till djupare engagemang och matematisk kommunikation.

Uppgift 6b: Huvudräkning: Addition och subtraktion med jämna tusen- och hundratal

Key skills som testas i denna uppgift

Förmåga att tillämpa platsvärdeskunskap för huvudräkningar med hundratal och tusental, med fokus på sifferoperationer i platsvärdespositioner och nollor som platsmarkörer vid addition och subtraktion.

a)	$3\,600 + 900 =$	_____
b)	$56\,000 + 8\,000 =$	_____
c)	$3\,200 - 700 =$	_____
d)	$54\,000 - 5\,000 =$	_____

Varför är det en keyskill?

Att behärska huvudräkningar med tusental och hundratal visar på tiobassystemet och förståelse för platsvärden, vilket är grundläggande för att arbeta med större tal, decimaltal och algebraiskt resonemang. När elever med huvudräkning räknar ut tal som $3\,600 + 900$ eller $54\,000 - 5\,000$, förstår de siffrans positionsvärde för varje siffra och hur operationer påverkar platsvärden? Dessa strategier förbättrar beräkningar och taluppfattning. Att tänka flexibelt kring tal, till exempel "36 hundratal adderat med 9 hundratal är lika med 45 hundratal" eller "54 tusental subtraherat med 5 tusental", utvecklar taluppfattningen. Detta gör det möjligt för eleverna att fokusera på resonemang snarare än beräkningar. Dessa färdigheter förbereder eleverna för formella skriftliga metoder. Elever som kan visualisera kombinationer av tusental och hundratal har en bättre förståelse för addition och subtraktion i uppställningar. Huvudräkningsstrategier stöder också uppskattning och verifiering. Förståelsen av platsvärdet med stora tal har praktiska tillämpningar, inom pengar, befolkning, avstånd och tillverkning, händelser i elevernas vardag.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Missuppfattningar om platsvärden utgör betydande konceptuella utmaningar. Elever kan behandla siffror oberoende av varandra och ändå inte förstå deras positioner inom tal. Till exempel, när de beräknar $3\,600 + 900$, kan de addera $3 + 9$ och $6 + 0$ separat, vilket resulterar i svar som 12 600 i stället för att känna igen 36 hundratal adderat med 9 hundratal. Elever förstår inte att 54 000 innehåller 54 tusental och ser det som separata siffror. Fel relaterade till noll uppstår när elever missförstår nollans platshållarroll i stora tal. De kan förlora eller få nollor på fel ställe - och beräkna $56\,000 + 8\,000$ som 5 680 eller 640 000 i stället för 64 000. Uppställningsfel uppstår när elever använder skriftliga metoder utan förståelse, vilket leder till felaktigheter i platsvärdet när det gäller tal med olika siffror eller nollor. Tecken att uppmärksamma är missförstånd, som att säga att $3\,200 - 700$ innebär att "subtrahera 7 från 3" snarare än att känna igen det som 32 hundratal minus 7 hundratal. Elever som ger felaktiga svar uppvisar brister i taluppfattning och förståelse för platsvärde. De som undviker dessa problem eller förlitar sig på ineffektiva räknestrategier saknar ofta bärande kunskaper om platsvärden.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Stödstrategier bör utveckla konceptuell förståelse för platsvärde och flyt i beräkningar. Visuella hjälpmedel hjälper eleverna att förstå platsvärde med stora tal. Använd tiobasmaterial för att visa hur tusental och hundratal kombineras. Till exempel kan $3\,600 + 900$ visas med hjälp av 36 hundrakvadrater adderat med 9 hundrakvadrater för att synliggöra 4 500. Tallinjer i hundratal eller tusental hjälper eleverna att visualisera beräkningar och förstå storleken på talen. Samtal där enheter betonas hjälper eleverna att känna igen mönster. Lär eleverna att identifiera enheter: "3 600 är 36 hundratal, 900 är 9 hundratal, så 36 hundratal adderat med 9 hundratal är lika med 45 hundratal, vilket är 4 500." För $54\,000 - 5\,000$, betona "54 tusental subtraherat 5 tusental är lika med 49 tusental." Detta språk kopplar tal till kvantiteter och stöder beräkningar. Börja med enklare exempel innan komplexiteten ökas. Börja med hundratal före tusental. Använd övningssekvenser som visar mönster (till exempel att jämföra $36 + 9 = 45$ med $360 + 90 = 450$, $3\,600 + 900 = 4\,500$). Uppskattning hjälper till att identifiera orimliga svar (till exempel "3 600 är nära 4 000, 900 är nära 1 000, så svaret bör vara nära 5 000"). Uppmuntra kontroll med hjälp av inversa operationer. Verkliga sammanhang gör beräkningar meningsfulla. Presentera scenarier som: "En fabrik producerar 54 000 komponenter varje vecka. Den här veckan tillverkar de 5 000 färre. Hur många tillverkar de?" Presentera felaktiga lösningar och be eleverna hitta fel. Utökade utmaningar kan engagera säkra elever samtidigt som de förstärker koncept. Presentera problem som "Beräkna $3\,600 + 900 - 700$ " eller utforska mönster som "Om $54\,000 - 5\,000 = 49\,000$, vad är $54\,000 - 4\,000$?"

a) $548 + 36$	b) $760 + 564$

Förmåga att tillämpa additionsalgoritmen med tal upp till tre siffror, inklusive platsvärde, minnessiffra och systematiska kolumn-för-kolumn-beräkningar.

Att behärska formella skriftliga metoder för addition är avgörande i matematikundervisningen i grundskolan i vissa länder. Dessa metoder ger tillförlitliga strategier för beräkningar med större tal som inte kan lösas med huvudräkning. När elever utför additionsalgoritmen utvecklar de verktyg som är nödvändiga för problemlösning i flera steg.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Att inte förstå platsvärde är grundläggande problem som påverkar beräkningsnoggrannheten. Elever kan sätta siffror i fel position när de ställer upp beräkningar – till exempel att placera $548 + 36$ med 6 under 4 i stället för 8. Svårigheter med att förstå kolumnernas platsvärden kan orsaka förvirring kring siffrornas placering under proceduren. Missuppfattningar om siffrornas värde uppstår när elever missförstår skillnaden mellan platsvärden. Vanliga fel inkluderar att glömma att göra en tiotalsovergång när summor överstiger nio eller att ta med sig felaktiga belopp. Algoritmiska fel uppstår när elever tillämpar procedurer felaktigt, till exempel att arbeta från vänster till höger i stället för höger till vänster, eller att förväxla operationer. Vissa elever tillämpar regler fel, till exempel att alltid ta med sig 1 som minnessiffra. Tecken att uppmärksamma är svårigheter med tal som innehåller noll (till exempel $806 + 534$) och att komma fram till fel svar, vilket tyder på brister i taluppfattningen. Elever som undviker skriftliga metoder kan sakna förtroende för grundläggande färdigheter.

Konkreta och visuella representationer ger eleverna en viktig stödstruktur för att utveckla en förståelse för formella skriftliga metoder. Använd tiobasmaterial för att modellera omgruppering och visa hur 10 ental blir 1 tiotal när man beräknar $548 + 36$. Platsvärdescheman hjälper eleverna att visualisera kolumnerna och förstå siffrors placering. Visuella modeller överbryggas klyftan mellan huvudräkningsstrategier och algoritmer genom att visa hur $548 + 36$ relaterar till $(500 + 40 + 8) + (30 + 6)$. Systematisk undervisning bör betona en logisk sekvens samtidigt som handlingar kopplas till matematiskt resonemang. Lär eleverna rutiner: skriv siffror efter platsvärde, börja från entalskolumnen, beräkna summor och skapa tiotal (minnessiffra) efter behov. Använd ett konsekvent språk och uppmuntra eleverna att verbalisera sitt tänkande. Guidad övning med felanalys hjälper eleverna att känna igen missuppfattningar. Presentera bearbetade exempel med fel och be eleverna identifiera misstag – till exempel att visa $548 + 36 = 574$ och diskutera varför detta är felaktigt. Progressionen i färdighetsutvecklingen bör gå från enkla till komplexa beräkningar. Börja med additioner som inte kräver totalsövergångar, men gå snabbt vidare till problem med en omgruppering och fortsätt till flera omgrupperingssteg. Verkliga problem gör formella metoder meningsfulla. Scenarier som: "En fotbollsklubb organiserar en insamling. Tjejlaget samlar in 548 kronor och pojklaget samlar in 360 kronor. Hur mycket har de samlat in?" Hjälper eleverna att förstå beräkningar. Lär eleverna att uppskatta innan de räknar och att kontrollera med inversa operationer. Utökad svårighet kan utmana alla elever samtidigt som de förstärker koncept genom flerstegsproblem eller genom att förklara metoder för yngre elever. För elever som behöver stöd med platsvärde, använd material som övar och påvisar platsvärdet.

Uppgift 8: Förståelse av addition och/eller subtraktion

Key skills som testas i denna uppgift

Förstå och lösa aritmetiska problem som involverar differens och jämförelse. I det här fallet, åldrar

Varför är det en keyskill?

Denna färdighet demonstrerar specifika matematiska förmågor. Den gör det möjligt för eleverna att översätta verkliga situationer till matematiska operationer och koppla abstrakta begrepp till vardagslivet. Den utvecklar viktiga subtraktionsfärdigheter och logiskt resonemang, inklusive att tolka jämförande termer som "äldre än", vilket stöder både matematiska och språkliga färdigheter. Att tillämpa denna färdighet i välbekanta sammanhang, såsom att beräkna åldrar, gör lärandet mer relevant. I slutändan skärper den det matematiska tänkandet och ger överförbara problemlösningsverktyg, vilket utgör en kärnkomponent i numerisk läskunnighet som stöder framtida lärande inom matematik och andra områden.

David är 35 år gammal.
Han är 4 år äldre än Helen.
Hur gammal är Helen?

Min uträkning: _____

Mitt svar : Helen är _____ år.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Elever kämpar ofta med åldersskillnadsproblem, vilket avslöjar luckor i förståelsen. Ett vanligt fel är att misstolka jämförande språk – som att anta att "äldre än" betyder addera snarare än subtrahera – vilket leder till felaktiga operationer. Eleverna kan ha letat efter signalord som ska leda dem mot vilket räknesätt de ska använda. Även när rätt operation väljs indikerar beräkningsfel vid grundläggande subtraktion ett problem med aritmetiskt flyt. Djupare konceptuella problem är också uppenbara. Vissa elever använder felaktiga operationer som multiplikation eller division, vilket visar en koppling mellan problemet och deras valda strategi. Andra kämpar med att förklara sitt resonemang, vilket tyder på begränsad metakognitiv medvetenhet. Användningen av konkreta räknemetoder (till exempel fingrar eller rita streck) för problem som kräver huvudräkning pekar ofta på taluppfattningen behöver stärkas och kan även vara svårigheter i abstrakt tänkande. Dessa mönster grundläggande luckor som kräver riktad undervisning för att utveckla både konceptuell förståelse och procedurflyt.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

För att stödja elever som kämpar med additiva jämförelseproblem är det viktigt att stärka både deras konceptuella förståelse av subtraktion och deras förståelse för sambandet mellan subtraktion och addition. Många svårigheter uppstår när man ser subtraktion endast som "ta bort", utan att förstå dess betydelse som en jämförelse mellan kvantiteter och dess koppling till addition.

1. Användning av laborativt material. Detta stöd fokuserar på att förstå subtraktion. Att använda föremål som klossar eller räknare hjälper eleverna att visualisera vad det innebär att vara "4 år yngre" som en skillnad mellan två kvantiteter. Eleverna kan fysiskt se att Helens ålder måste vara mindre än Davids, vilket förstärker subtraktion som jämförelse snarare än enkel borttagning.
2. Visuella representationer med klossar som kan staplas eller diagram. Detta stöd behandlar både förståelse av subtraktion och dess samband med addition. Stapelmodeller visar Davids ålder (35) som en stapel och Helens ålder som en kortare stapel ($35 - 4$). Att se skillnaden visuellt – och lägga märke till att Helens stapel kan erhållas genom subtraktion, eller alternativt genom att addera 4 ger Davids stapel – kopplar tydligt samman de två operationerna.
3. Verbal stöttning (vägledande frågor). Detta stöd fokuserar på att förstå subtraktion. Frågor som "Vem är äldre?", "Bör Helens ålder vara högre eller lägre?" och "Vilken operation uttrycker skillnaden?" hjälper eleverna att identifiera att problemet beskriver ett jämförande samband. Denna vägledning hjälper dem att välja subtraktion som den operation som uttrycker den skillnaden.
4. Kontroll genom addition. Detta stöd fokuserar på sambandet mellan addition och subtraktion. Att uppmuntra eleverna att kontrollera sitt svar genom att fråga: "Om Helen är 31, är $31 + 4 = 35$?" förstärker idén att addition och subtraktion är inversa operationer. Denna verifiering befäster förståelsen att båda operationerna uttrycker samma samband från olika håll.

Uppgift 9: Talfakta multiplikation

Key skills som testas i denna uppgift

Flyt i och förståelse för grundläggande multiplikationsfakta (0–10)

a)	$6 \cdot 1 =$	_____
b)	$10 \cdot 8 =$	_____
c)	$8 \cdot 4 =$	_____
d)	$7 \cdot 9 =$	_____
e)	$9 \cdot 0 =$	_____
f)	$7 \cdot 5 =$	_____

Varför är det en keyskill?

Att behärska grundläggande multiplikationsfakta är viktigt av flera anledningar. För det första ger det en solid grund för avancerad matematik. När elever snabbt kan återkalla multiplikationsfakta kan de utföra flersiffriga multiplikationer och divisioner mer effektivt och närmar sig områden som bråk och algebra med större lätthet. För det andra ökar det problemlösningssförmågan genom att minska den kognitiva belastningen. I stället för att använda mental energi på grundläggande beräkningar kan eleverna fokusera på att välja och tillämpa lämpliga problemlösningstrategier. Slutligen har multiplikationsflyt betydande tillämpningar i den verkliga världen, från att beräkna kostnader och mätningar till att hantera tid effektivt. Det slutgiltiga målet är att uppnå automatik – omedelbar återkallelse av fakta – eftersom fortsatt beroende av räkning kan hindra framsteg och innebära utmaningar när man tar itu med mer avancerade matematiska begrepp.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Elever som lär sig multiplikation kan uppvisa vissa fel och tecken som tyder på svårigheter med att bemästra fakta. Ett vanligt fel är att producera felaktiga produkter, såsom att tillämpa kända fakta felaktigt – till exempel att svara $7 \cdot 5 = 30$ i stället för 35 eller att förväxla relaterade fakta som $7 \cdot 9 = 63$ och $8 \cdot 9 = 72$ och svara $7 \cdot 9 = 72$ och $8 \cdot 9 = 63$. Ett annat vanligt problem är att det tar lång tid att komma fram till svaret, där tvekan eller fingerräkning förekommer även för enkla fakta som $3 \cdot 2$. Vissa elever kan också hoppa över uppgifter helt eller gissa svar, vilket ger slumpmässiga tal istället för beräknade resultat. Viktiga tecken att vara uppmärksam på är en överdriven tilltro till additiva strategier, som att upprepade gånger addera tal i stället för att komma ihåg multiplikationsfakta. Inkonsekvent noggrannhet – till exempel att känna till $5 \cdot 4$ men inte $5 \cdot 6$ – indikerar en instabil förståelse. Med andra ord är deras förståelse av multiplikation ännu inte helt grundad och färdig; eleven förstår konceptet endast delvis eller osäkert. Eleven behöver fortfarande förstärka sina kunskaper för att få självförtroende och noggrannhet i alla multiplikationer. Slutligen är synlig ångest, stress eller undvikande beteenden starka indikatorer på att multiplikation är en betydande källa till frustration eller brist på självförtroende.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

För att stödja elever som kämpar med grundläggande multiplikationsfakta är det viktigt att strukturera stödet progressivt, säkerställa konceptuell förståelse först och sedan automatisering, baserat på samband mellan kända fakta.

1. Kontrollera förståelsen av multiplikation. Detta stöd säkerställer att eleven förstår vad multiplikation betyder innan memorering av tabeller. Till exempel: Vet eleven att $7 \cdot 5$ betyder "7 grupper med 5"? Kan eleven representera det med ritningar, laborativa material eller verkliga situationer? Undvik att gå vidare om eleven bara adderar utantill utan att förstå operationen.

2. Kontrollera automatiseringen av viktiga fakta. Vissa multiplikationer är grundläggande och enklare att automatisera, så först är det bra att kontrollera multiplikationstabellerna 2, 5 och 10. Se till att eleven kan dem snabbt och felfritt. Om de inte är automatiserade, förstärk dem innan du går vidare till andra multiplikationer.

3. Arbeta med att härleda övriga multiplikationer från kända multiplikationer. När huvudtabellerna behärskas, visa hur man får andra multiplikationer från kända fakta. Till exempel, om de vet $5 \cdot 5 = 25$, då är $6 \cdot 5 = 25 + 5$. Om de vet $8 \cdot 4 = 32$, då är $4 \cdot 8 = 32$ (kommutativa lagen). Detta minskar vad som ska memoreras och främjar förståelsen av samband mellan operationer, vilket möjliggör flexibla strategier.

4. Automatisering baserad på förståelse. Slutligen, förstärk alla tabeller så att de är snabba och tillförlitliga, men alltid baserade på förståelse för sambanden mellan fakta:

- Enkla kombinationer härledda från kända kombinationer.
- Användning av mönster och egenskaper (kommutativa egenskaper, multiplikation med 0 och 1).
- Detta säkerställer att automatiseringen är solid och flexibel, inte bara mekanisk.

Uppgift 10: Talfakta division

Key skills som testas i denna uppgift

Flyt i och förståelse för grundläggande divisionsfakta (1–10).

Varför är det en keyskill?

Att behärska grundläggande divisionsfakta är viktigt av flera anledningar. Det ger en stark grund för avancerad matematik och stöder lärande inom områden som bråk, division, algebra och problemlösning. Det stärker också divisionsförmågan genom att förstärka det omvända förhållandet mellan de två operationerna multiplikation och division, vilket hjälper eleverna att utveckla en ömsesidig förståelse för hur de hänger ihop. Utanför klassrummet används division i vardagliga situationer, från att dela objekt lika till att beräkna proportioner. Flyt i räknandet märks genom automatisk återkallelse av dessa fakta, utan att förlita sig på räknestrategier eller upprepade multiplikationskontroller.

a)	$\frac{80}{10} =$	_____
b)	$\frac{6}{6} =$	_____
c)	$\frac{28}{4} =$	_____
d)	$\frac{72}{9} =$	_____
e)	$\frac{30}{5} =$	_____
f)	$\frac{7}{1} =$	_____

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Elever kämpar ofta med grundläggande divisionsbegrepp enligt följande:

- Ett vanligt misstag är att **blanda ihop operationer**, där de multiplicerar i stället för att dividera (till exempel att lösa $30 / 5$ som $30 \cdot 5 = 150$)
- Andra problem inkluderar **felaktiga återkallningar av fakta**, som till exempel att kvoten för $72 / 9$ misstas för 9

Dessa mönster avslöjar både beräkningsmässiga luckor och underliggande konceptuella missförstånd av inversa operationer som kräver riktade insatser.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

För att stödja elever som har svårigheter med grundläggande division kan stödet organiseras successivt: först säkerställs konceptuell förståelse för multiplikation, sedan automatisering baserad på förståelse.

1. Kontrollera den operationella förståelsen av multiplikation. Innan ni arbetar med division, se till att eleverna förstår multiplikation: Vet eleven att $10 \cdot 8 = 80$ betyder "10 grupper med 8" eller "8 grupper med 10"? Kan eleven representera detta med laborativt material, bilder eller verkliga situationer (till exempel 8 påsar med 10 godisbitar i varje)? Detta ger den nödvändiga grunden för att utföra divisioner korrekt.

2. Kontrollera automatiseringen av viktiga multiplikationstabeller. Se till att eleven behärskar de viktigaste tabellerna: 2, 5 och 10, följt av de andra. Grundläggande division är beroende av kunskaper i multiplikation: till exempel, för att lösa $72 / 9$ behöver de inse att $9 \cdot 8 = 72$. Om tabellerna inte är automatiserade, förstärk dem innan du går vidare till division.

3. Introducera konceptuell förståelse för division. Förklara att division är den inversa operationen till multiplikation: "Om $10 \cdot 8 = 80$, då är $80 / 10 = 8$ och $80 / 8 = 10$." Använd visuella representationer: gruppdiagram, matriser eller ritningar som visar hur man delar upp objekt i lika delar. Låt eleven verbalisera vad division betyder: "Fördela 80 godisbitar lika i 10 påsar. Hur många godisbitar finns det i varje påse?"

4. Arbeta med att härleda divisionsfakta från känd multiplikation. Koppla divisioner till redan behärskade multiplikationer:

- $24 / 4 \rightarrow "4 \cdot ? = 24" \rightarrow 4 \cdot 6 = 24 \rightarrow \text{svar } 6$.
- $36 / 6 \rightarrow "6 \cdot ? = 36" \rightarrow 6 \cdot 6 = 36 \rightarrow \text{svar } 6$.
- Detta minskar vad som ska memoreras och hjälper eleverna att förstå att division alltid kan härledas från multiplikation.

5. Automatisering baserad på förståelse. Förstärk alla grundläggande divisioner tills de är snabba och tillförlitliga, alltid baserade på förståelse för multiplikation och det inversa sambandet. Öva på mönster och egenskaper: division med 1, division med samma tal (resultat 1), relation till multiplikation med 0. Detta säkerställer att automatiseringen är solid, flexibel och funktionell.

Uppgift 11: Huvudräkning: Multiplikation och division med jämna tusen- och hundratal

Key skills som testas i denna uppgift

Den här uppgiften bedömer elevernas förmåga att utföra multiplikation och division som huvudräkning med tal som är multiplar av tio, hundra, tusen och så vidare.

Varför är det en keyskill?

En god förståelse av positionssystemet utgör grunden för flexibel beräkning med flersiffriga tal (och senare decimaltal). Vidare för att relatera dessa tal till varandra och till världen omkring oss (till exempel att uppskatta, göra grova beräkningar eller korrekt bedöma kvantitativa proportioner i verkliga situationer). Att förstå platsvärde är mångfacetterat. Om ett tal slutar med en nolla kan beräkningar utföras med hela tiotal, med utgångspunkt i kunskap om mindre tal. Om talet slutar med två nollor utförs beräkningar på hundratal; med tre nollor, på tusental och så vidare. Till exempel är $7 \cdot 5\,000$ 7 gånger 5 tusen, vilket är 35 tusen, skrivet som 35 000. Vi kan också dela upp det som $7 \cdot 5 \cdot 1000$. Detta möjliggör huvudräkning med stora tal. Denna färdighet kan användas för att uppskatta rimligheten för en beräkning. Till exempel, i stället för att beräkna $7 \cdot 4\,957$, kan du beräkna $7 \cdot 5\,000$ och få 35 000 som ett ungefärligt svar.

a)	$7 \cdot 5\,000 =$	_____
b)	$50 \cdot 20 =$	_____
c)	$\frac{60\,000}{100} =$	_____
d)	$\frac{3\,000}{5} =$	_____

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

Resonemang om platsvärde (tiotal, hundratal, tusental etcetera) kan automatiseras genom att manipulera nollor. Denna manipulation kan dock ge resultat "med nollor" som är felaktiga, särskilt när de tillämpas på decimaltal. Till exempel, att ge 2,30 eller 20,3 som resultat av beräkningen $2,3 \cdot 10$. Det är därför viktigt att inte automatisera "noll"-regler utan att förstå resonemanget bakom dem. Bristande svar kan tyda på att eleven försöker utföra operationerna med huvudräkning, som de skulle göra på papper (DiToM-uppgift 7). Denna teknik är inte i fokus här, den är svårare att tillämpa och det är lättare att göra fel.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Som nämnts är förståelse för platsvärde mångfacetterad. Om en elev har svårigheter med denna uppgift rekommenderas en mer omfattande bedömning av deras nuvarande förståelse av principerna för positionssystemet. Det finns två aspekter att beakta. Den första är positionssystemet, vilket innebär att man inser att en enhet (ental, tiotal, hundratal etcetera) av en viss position är tio gånger större än den av den lägre positionen: 10 ental = 1 tiotal; 10 tiotal = 1 hundratal; 10 hundratal = 1 tusental, och så vidare. Den andra aspekten är platsvärdet: siffrornas ordning ger information om platsvärdet. När "2 tiotal och 3 ental" åskådliggör ett tal, representerar endast "23" detta tal, medan "32" hänvisar till "3 tiotal och 2 ental".

Beroende på resultaten av ett förtydligande av förståelsen kan det vara nödvändigt att arbeta med eleven igen för att få en grundläggande förståelse av hur tio ental bildar ett tiotal och så vidare. Viktigt här är uppgifter där eleven bildar nya övergångar med lämpligt material. Utifrån detta bör fokus läggas på specifika uppgifter där det behövs, såsom i DiToM-uppgift 3, 6 och 7. Korta övningar kan sedan ges dagligen, enligt en progression baserad på de kunskaper som ingår (positionssystemet, platsvärdet). Man kan börja med tvåsiffriga tal med ental (e) och tiotal (t). Till exempel: 3t 2e; 4e 2t; 4t 13e; 15e 3t; 35e 2t. För 15e 3t är den förväntade proceduren inte en beräkning ($15 \cdot 1 + 3 \cdot 10$), utan följande: eftersom 15e är 10e 5e, då är 15e 1t 5e (eftersom 10e = 1t), så vi får 1t 5e 3t, vilket är 5e 4t, skrivet som "45". För tresiffriga tal gäller även likheten 10t = 1h. Vi kan betrakta följande progression: 5h 3t 2e; 6c 4e 2t; 1h 2t; 3h 15e; 2h'' 4t 23e; 3h 15e 3t; 2h 14t 1e; 4e 21t 2h; 2h 14t 13e; 21t 15e 3h; 5h 9t 12e, och så vidare. Arbetet fortsätter med fyrsiffriga tal och sedan ytterligare talsorter. Börja gärna i konkret material som konkret visar vad som händer för att sedan låta eleverna lösa uppgifterna utan material. För effektiv förståelse är det viktigt att upprepade gånger be eleverna att verbalisera sina handlingar.

Uppgift 12: Förståelse av multiplikation

Key skills som testas i denna uppgift

Denna uppgift bedömer elevernas förmåga att känna igen den multiplikativa strukturen i en representation.

Varför är det en keyskill?

Uppgiften innebär att man känner igen en multiplikativ situation (åtta uppsättningar med sex punkter vardera) och producerar ett aritmetiskt uttryck ($8 \cdot 6$ eller $6 \cdot 8$) utan att beräkna resultatet. Mer specifikt kräver uppgiften en tolkning som är utöver den aritmetiska notationen för upprepad addition ($6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$) för att producera en aritmetisk notation motsvarande multiplikation ($8 \cdot 6$). Denna uppgift är grundläggande eftersom den kräver att man känner igen en multiplikativ situation för att identifiera typen av problem innan beräkningen utförs. Den gör det möjligt för eleverna att uppfatta upprepad addition som multiplikation, vilket är nödvändigt för att:

- Bygga och förstå multiplikationstabeller
- Förstå betydelsen av ordet multiplicerat ("gånger") (i "32 multiplicerat med 100", vilket kan skrivas som $100 \cdot 32$ eller $32 \cdot 100$);
- Förstå reglerna baserade på positionssystemet när man multiplicerar ett tal i tiotal eller hundratal med ett givet heltal (ordet "multiplicera" betyder att vi adderar 32 hundra gånger), snarare än att förlita sig på regler om att addera nollor för att multiplicera med 10;
- Förstå distributiva lagen (13 multiplicerat med 5 är 10 multiplicerat med 5 adderat med 3 gånger 5 , vilket kan beräknas med upprepad addition).

Denna uppgift låter oss också bedöma elevens flexibilitet i att växla från en representation till en annan, vilket kräver ett registerbyte. Mer specifikt innebär det att växla från en konkret representation – bild, till en abstrakt representation – symboler.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

När uppgiften inte förstås:

- Felaktigt svar 8: De 8 uppsättningarna med 6 prickar vardera kan identifieras individuellt, men utan att man uppfattar att varje tärning i sig innehåller en konstellation av 6 prickar.
- Felaktigt svar 6: De 6 prickarna i konstellationen av sex i en tärning kan uppfattas utan att man tar hänsyn till de 8 tärningarna.

När varken den additiva eller den multiplikativa operationen uppfattas:

- Rätt svar 48: eleven kan använda en räknestrategi för att räkna 48 prickar.
- Felaktiga svar 47 eller 49 eller annat: eleven kan göra ett räknefel med tanke på antalet punkter och den begränsade tid som avsatts för att slutföra uppgiften

När den additiva operationen uppfattas men inte den multiplikativa operationen:

- Öväntat korrekt svar $6+6+6+6+6+6+6+6$: erhålls genom att anta att det finns 8 tärningar och att varje tärning är en konstellation av 6 prickar.
- Öväntat korrekt svar $8+8+8+8+8+8$: erhålls från en konstellation av 6 prickar och, för varje prick, anta att det finns 8, eftersom det finns 8 uppsättningar med sex prickar vardera.

Dessa svar, även om de är korrekta, kan visa att eleven fastnade i upprepad addition och inte översatte den till multiplikation.

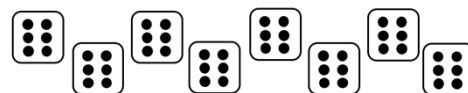
- Felaktiga svar $6+6+6+6+6+6+6+6$ eller $6+6+6+6+6+6+6+6$: antalet iterationer kan vara felaktigt

När den multiplikativa situationen uppfattas:

- Rätta svar $8 \cdot 6$ eller $6 \cdot 8$: eleven översätter genom multiplikation till att det finns 8 uppsättningar med sex punkter vardera.
- Felaktiga svar $7 \cdot 6$, $6 \cdot 6$ eller $9 \cdot 6$: antalet förekomster som motsvarar antalet tärningar med de sex konstellationerna kan vara felaktigt.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Det finns en uträkning som ger svaret på det totala antalet prickar på alla tärningar.



Skriv en uträkning med multiplikation som passar till bilden.

Du behöver inte skriva svaret.

Uträkning: _____

Tips för undervisningen i klassrummet:

- Presentera situationer som involverar konkret material eller verbalisering, likt den föreslagna, med betoning på vad "multiplicerat med b" och "a gånger b" betyder i vardagligt språk.
- Variera undervisningsvariablerna för att gå från upprepad addition till multiplikation.
- Arbeta med multiplikationens kommutativitet.
- Introducera inte tecknet "x" för tidigt.

Den här typen av situation visar inte alla betydelser som kan tillskrivas multiplikation. Till exempel, hur många olika menyer kan skapas för; en förrätt, två huvudrätter och fyra desserter? Resultatet erhålls genom en multiplikation: $3 \times 2 \times 4$.

Uppgift 13: Förståelse av textproblem/välj rätt räknesätt

Key skills som testas i denna uppgift

Denna uppgift bedömer elevernas förmåga att känna igen en additiv/multiplikativ modell associerad med ett aritmetiskt problem i ett steg.

Varför är det en keyskill?

De föreslagna problemen är enstegsproblem, innehåller inte onödiga data och liknar de som elever på denna nivå tidigare stött på. Kontexten (kartonger med ägg till matlagning) är avsedd att vara bekant för alla elever, vilket gör det lättare att förstå situationen. De fyra föreslagna aritmetiska formlerna upprepar de fyra operationerna med samma två tal som föreslås i problemformuleringen, i samma ordning: först 24, sedan 6. Lärarens läsning av texterna säkerställer att elever med lässvårigheter inte missgynnas.

a)	En bagare köper 24 paket med ägg. I varje paket är det 6 ägg. Hur många ägg köper bagaren?	$\frac{24}{6}$
b)	24 ägg är lagda i kartonger. Varje kartong innehåller 6 ägg. Hur många kartonger blir fyllda?	$24 \cdot 6$
c)	Det finns 24 ägg i kylan. Kocken tar ut 6 ägg från kylan. Hur många ägg finns kvar i kylan?	$24 + 6$

Att känna igen modellen bakom ett aritmetiskt problem, särskilt i enkla problem, är en viktig färdighet för att förstå operationer och för att lösa mer komplexa problem. Det säkerställer också att eleverna kan identifiera dessa modeller i liknande typer av problem: en multiplikativ situation som involverar att hitta produkten (problem 1) eller antalet delar (problem 2); en additiv situation som involverar borttagning/subtraktion (problem 3). Syftet här är att säkerställa att eleven kan modellera ett problem genom att identifiera lämpliga uträkningar, med en operation, utan att ange resultatet. Förmågan att beräkna (vilket är en viktig färdighet som bedöms i andra uppgifter) och att producera en svarsmening till problemet bedöms inte.

Vilka typer av fel och andra tecken att uppmärksamma kan förväntas i den här uppgiften?

En felaktig koppling mellan texten och operationen kan förklaras av:

- Förståelse av texten eller situationen: eleven förstår inte innebörden av en term (till exempel att förväxla att ta ut från kylskåpet med att addera), eller ett ord leder till att eleven väljer fel operation
- Att inte kunna koppla ihop textproblemet med rätt operation.

Vissa elever kan lösa problem 1 och 2 med hjälp av upprepad addition eller subtraktion; detta indikerar att de ännu inte har konstruerat multiplikativa modeller (multiplikation eller division). Andra elever kan lösa alla tre problemen med hjälp av att rita; i det här fallet visar övningen att de ännu inte kan koppla en uträkning till problemet.

Vilket slags stöd kan ges till elever som uppvisar brister i denna uppgift?

Som nämnts ovan kan vissa elever lösa problemen utan att använda en operation. Till exempel skulle läraren kunna återinföra multiplikation eller division som upprepad addition eller subtraktion för en elev som inte känner igen multiplikation eller division, men som kan lösa problem 1 och 2 med hjälp av upprepad addition eller subtraktion.

Om eleven kan lösa problemet genom att rita visar detta att situationen är förstådd. De tre operationerna kan sedan gås genom muntligt, med hjälp av bilder och laborativt material som representerar de aktuella problemen. För att hjälpa eleven att förstå situationen bättre kan läraren be dem att omformulera problemet med egna ord eller berätta en historia; läraren kan också mima situationen framför eleverna (med ägg, askar, spelmarker etcetera.). Det finns också olika sätt att hjälpa eleverna att känna igen modellen bakom problemet: läraren kan tillhandahålla material som hjälper till att representera situationen symboliskt, be eleverna att relatera problemet till ett de redan har stött på i klassen, eller uppmuntra dem att uppskatta storleksordningen på resultatet.

4 Information om utvärdering och dokumentation av resultat

Som stöd för att utvärdera testresultaten finns olika verktyg tillgängliga på <https://www.ditom.org/>:

Om du föredrar att utvärdera testerna manuellt finns följande blanketter för nedladdning:

- Ett **poängsättningsblad**, som för varje uppgift listar kriterierna för att ge en poäng, en halv poäng eller inga poäng (se sidan 44);
- En **resultatblankett** för att registrera och dokumentera hela klassens resultat (se sidan 45).
- En **resultatblankett** för att registrera och dokumentera en enskild elevs resultat, om du vill ha en individuell översikt (se sidan 46)

Ett mycket mindre tidskrävande alternativ är att utvärdera resultaten i Excel på din dator. För detta ändamål kan du ladda ner:

- En **förprogrammerad Excel-fil** med två arbetsblad som du kan växla mellan via flikarna längst ner till vänster.

I bladet med rubriken "**kvalitativ**" anger du helt enkelt, i lämplig kolumn för varje elev, det svar som eleven skrev i sitt testhäfte som svar på varje deluppgift. Om en elev lämnade en uppgift tom, ange 999.

När du är klar med att mata in data, växla till bladet "**kvantitativ**". Programmet kommer då automatiskt att indikera om varje deluppgift besvarades korrekt (1) eller felaktigt (0) och beräkna lämplig poäng för varje övergripande uppgift (1 / 0,5 / 0). I slutet av varje rad hittar du andelen korrekt lösta uppgifter och den totala poängen för den enskilda eleven. I slutet av varje kolumn hittar du andelen elever i klassen som löste just den uppgiften korrekt.

“Cut off score” (gränsvärden) för elevens svar för *DiToM 4+* – och hur man tolkar dem

Som förklarats i avsnitt 1 är *DiToM* inte avsett för att sortera elever i olika nivåer. Se diskussionen om *DiToM*s mål och vägledande principer i det avsnittet.

Där hittar du också en mer detaljerad förklaring av de fastställda gränsvärdena av “cut off score” som fastställdes baserat på pilottester av *DiToM* (för version 4+, med 934 elever i projektets sju partnerländer) med hjälp av den statistiska metoden “Latent Class Analysis”. Denna metod gör det möjligt att tilldela elever, baserat på deras totala poäng i *DiToM 4+*, en av följande tre grupper:

Antal rätta svar	Group
0 till 8.5	A - Tecken på omfattande svårigheter inom flera viktiga områden
9 till 12.5	B - Tecken på svårigheter inom vissa viktiga områden
13 till 16	C- Inga tecken på större svårigheter inom viktiga områden

En sista anmärkning med hänvisning till avsnitt 1: Tänk på att en screening bara ger en ögonblicksbild. Resultaten bör därför jämföras med dina egna observationer och erfarenheter i klassrummet och, där så anges, användas som utgångspunkt för uppföljningsintervjuer med enskilda elever – för att fördjupa, förfinas eller utöka din förståelse, och vid behov, för att åtminstone delvis justera dina slutsatser.

Poängbedömning DiToM Screening 4+ (max. 16 poäng) |

1	Skriva talet	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla tre rätt (5 089, 43 005, 300 500) Två rätt Alla andra svar
2	Jämföra tal	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla tre rätt (>, >, <) Två rätt Alla andra svar
3a	Addera 1/10/100	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla tre rätt (9 900, 4 600, 4 000) Två rätt Alla andra svar
3b	Subtrahera 1/10/100	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla tre rätt (6 999, 3 490, 3 900) Två rätt Alla andra svar
4	Tallinjen	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla fyra rätt (7 000, 5 300, 4 080, 12 500) Tre rätt Alla andra svar
5	Hälften	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla fyra rätt (500, 250, 350, 1 500) Tre rätt Alla andra svar
6a	Huvudräkning: Addition and subtraktion	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla fyra rätt (300, 736, 699, 354) Tre rätt Alla andra svar
6b	Huvudräkning: Addition och subtraktion med jämsna tusen- och hundratal	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla fyra rätt (4 500, 64 000, 2 500, 49 000) Tre rätt Alla andra svar
7a	Uppställning addition	1 P. 0,5 P. 0 P.	Båda två rätt (584, 1 324) Ett rätt Alla andra svar
7b	Uppställning subtraktion	1 P. 0,5 P. 0 P.	Båda två rätt (644, 272) Ett rätt Alla andra svar
8	Förståelse av addition och eller subtraktion	1 P. 0,5 P. 0 P.	Rätt term och svar ($35 - 4 = 31$) Antingen rätt term eller rätt svar Alla andra svar
9	Talfakta multiplikation	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla sex rätt (6, 80, 32, 63, 0, 35) Fem rätt Alla andra svar
10	Talfakta division	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla sex rätt (8, 1, 7, 8, 6, 7) Fem rätt Alla andra svar
11	Huvudräkning: Multiplikation och division med jämsna tusen- och hundratal	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla fyra rätt (35 000, 1 000, 600, 600) Tre rätt Alla andra svar
12	Användning av räkneseätt	1 P. 0 P.	Rätt faktor ($8 \cdot 6$ eller $6 \cdot 8$) Alla andra svar
13	Förståelse av textproblem/välj rätt räkneseätt	1 P. 0,5 P. 0 P.	Alla tre rätt ($a \rightarrow 3$, $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 2$) Två rätt Alla andra svar

Klass

Datum

Namn: _____

Datum: _____

Resultatsblankett DiToM Screening 4+

Uppg	Rätt svar	Elevens svar	Poäng
1.a	5 089		
1.b	43 005		
1.c	300 500		
2.a	>		
2.b	>		
2.c	<		
3a.a	9 900		
3a.b	4 600		
3a.c	4 000		
3b.a	6 999		
3b.b	3 490		
3b.c	3 900		
4.a	7 000		
4.b	5 300		
4.c	4 080		
4.d	12 500		
5.a	500		
5.b	250		
5.c	350		
5.d	1 500		
6a.a	300		
6a.b	736		
6a.c	699		
6a.d	354		
6b.a	4 500		
6b.b	64 000		
6b.c	2 500		
6b.d	49 000		

Uppg	Rätt svar	Elevens svar	Poängn
7a.a	584		
7a.b	1 324		
7b.a	644		
7b.b	272		
8 part 1	35-4		
8 part 2	31		
9.a	6		
9.b	80		
9.c	32		
9.d	63		
9.e	0		
9.f	35		
10.a	8		
10.b	1		
10.c	7		
10.d	8		
10.e	6		
10.f	7		
11.a	35 000		
11.b	1 000		
11.c	600		
11.d	600		
12	8-6 eller 6-8		
13.a	a) - 3		
13.b	b) - 1		
13.c	c) - 2		

Totala poänga av 16

Kommentar: _____

Poäng

Uppg 1 till 3b och 13

alla 3 rätt = 1 poäng; 2 rätt = 0.5 poäng; 1,0 rätt eller inget svar = 0 poäng

Uppg 4 till 6b och 11

alla 4 rätt = 1 poäng; 3 rätt = 0.5 poäng; 2,1,0 rätt eller inget svar = 0 poäng

5 Referenser

Dessa nämns i materialet

Livingston, S. A. (2014). *Equating Test Scores (without IRT). 2nd edition*. Educational Testing Service.

Wittmann, E. Ch. (2015). Das systemische Konzept von Mathe 2000+ zur Förderung „rechenschwacher“ Kinder. In H. Schäfer & Ch. Rittmeyer (Hrsg.), *Handbuch Inklusive Diagnostik* (S. 199–213). Beltz.

Övriga

Anthony, G. J., & Walshaw, M. A. (2004). Zero: A "none" number? *Teaching children mathematics*, 11(1), 38-42.
<https://doi.org/10.5951/TCM.11.1.0038>

Clarke, B., & Shinn, M. R. (2004). A preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement. *School psychology review*, 33(2), 234-248.
<https://doi.org/10.1080/02796015.2004.12086245>

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 28(2), 130-162. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.28.2.0130>

Gelman, R., & Galistel, C. R. (1983). The child's understanding of number. In M. Donaldson, R. Grieve, & C. Pratt (Eds.), *Early childhood development and education*. Oxford: Basil Blackwell.

Houdement, C., & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM*, 51(1), 25-37.
<https://doi.org/10.1007/s11858-018-0985-6>

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

LeFevre, J.-A., Smith-Chant, B. L., Fast, L., Skwarchuk, S.-L., Sargla, E., Arnup, J. S., Penner-Wilger, M., Bisanz, J., & Kamawar, D. (2006). What counts as knowing? The development of conceptual and procedural knowledge of counting from kindergarten through grade 2. *Journal of experimental child psychology*, 93(4), 285-303.
<https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.11.002>

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum.

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använda tal : en handbok* (Upplaga 2). Nationellt centrum för matematikutbildning. Okamoto, Y., & Case, R. (1996). Ii. Exploring the microstructure of children's central conceptual structures in the domain of number. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 61(1-2), 27-58.
<https://doi.org/10.1111/j.1540-5834.1996.tb00536.x>

Papadopoulos, I. (2013). Using calculators for assessing pupils' conceptualization on place-value. *International journal of mathematical education in science and technology*, 44(4), 523-544. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.756549>