Co-funded by
the European Union

Freie Universität Bozen
Libera Università di Bolzano
Università Liedia de Bulsan

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

# Manuale del docente

# Screening test 8+

Questo progetto è stato finanziato con il sostegno della Commissione Europea. La presente pubblicazione riflette esclusivamente le opinioni degli autori e la Commissione non può essere ritenuta responsabile per l'uso che potrebbe essere fatto delle informazioni in essa contenute.

## Indice

# I. Introduzione

L'apprendimento della matematica si fonda su prerequisiti essenziali: in assenza di basi solide, gli studenti incontrano difficoltà nella comprensione dei nuovi argomenti. Il fatto che molti di loro non raggiungano gli standard minimi in matematica compromette la riuscita del percorso scolastico futuro e rende quindi necessario adottare strumenti pratici per una valutazione rapida dello stato di apprendimento, così da poter offrire un supporto mirato. Il Progetto europeo "Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)", sviluppato grazie alla collaborazione tra diversi Paesi europei, ha messo a punto cinque strumenti di screening volti ad aiutare gli insegnanti a individuare i bisogni specifici della propria classe nei momenti chiave delle transizioni educative.

Gli screening possono essere somministrati con cadenza biennale nei principali momenti di transizione del percorso scolastico:

1. fine della scuola dell'infanzia / inizio della classe prima della scuola primaria;
2. fine della classe seconda della scuola primaria / inizio della classe terza della scuola primaria;
3. fine della classe quarta della scuola primaria / inizio della classe quinta della scuola primaria;
4. fine della classe prima della scuola secondaria di primo grado / inizio della classe seconda della scuola secondaria di primo grado;
5. fine della classe terza della scuola secondaria di primo grado / inizio della classe prima della scuola secondaria di secondo grado.

Ma che cos'è, più in dettaglio, uno screening?

Uno screening è una prova di valutazione che può essere somministrata all'intera classe nel corso di una singola lezione. I suoi risultati forniscono una prima panoramica strutturata dei concetti matematici fondamentali già consolidati e delle aree in cui i singoli studenti potrebbero necessitare di ulteriore supporto.

È importante sottolineare che lo screening non sostituisce una valutazione individuale, di tipo qualitativo, orientata all'analisi dei processi di pensiero matematico dello studente.

Lo screening rappresenta piuttosto un punto di partenza: i risultati ottenuti possono essere successivamente approfonditi attraverso osservazioni mirate, interviste e interventi di sostegno.

Perché è utile?

- Fornisce una rapida panoramica: evidenzia quali abilità fondamentali sono consolidate e in quali ambiti è opportuno prevedere un ripasso o un approfondimento.
- Permette un supporto mirato: consente di individuare gli studenti che potrebbero incontrare difficoltà nel raggiungimento degli standard minimi di matematica di base e di organizzare interventi tempestivi.
- Supporta le decisioni diagnostiche: i risultati dello screening offrono una prima indicazione chiara degli studenti che potrebbero beneficiare di ulteriori approfondimenti diagnostici (ad esempio analisi dettagliate dei compiti o colloqui successivi).
- Facilita le transizioni tra i livelli scolastici: orienta l'attenzione sulle abilità chiave nei passaggi cruciali del percorso educativo.

I test di screening sono progettati per un utilizzo in classe, con modalità di somministrazione e criteri di correzione chiaramente definiti. Gli insegnanti ricevono un quadro sintetico dei risultati della propria classe, corredato da indicazioni sugli studenti che richiedono ulteriori approfondimenti in specifiche aree. Su questa base è possibile pianificare interventi mirati di revisione o di consolidamento.

Il presente manuale offre una guida essenziale all'utilizzo dello strumento di screening, illustrandone finalità, struttura, tipologie di quesiti, criteri di valutazione, modalità di somministrazione e interpretazione dei dati, nonché suggerimenti operativi per il successivo intervento didattico.

L'obiettivo è mettere a disposizione dell'insegnante uno strumento di screening pratico, affidabile e di facile utilizzo, in grado di fornire un orientamento rapido, richiamare l'attenzione su eventuali difficoltà e supportare concretamente un intervento efficace, affinché il maggior numero possibile di studenti possa apprendere la matematica con sicurezza, consapevolezza e fiducia nelle proprie capacità.

# II. Che cosa si intende per “abilità matematiche chiave”

Lo sviluppo di test diagnostici richiede una solida base teorica. Nel caso di test di screening brevi, somministrati all’intera classe, ciò implica la necessità di concentrarsi su quelle abilità senza le quali i contenuti disciplinari successivi non possono essere appresi in modo significativo. Seguendo la posizione classica di Gagné e Briggs, ogni nuovo apprendimento si fonda su un insieme minimo di prerequisiti indispensabili: è a questo insieme che si fa riferimento con il termine *competenze matematiche chiave*.

In assenza di tali prerequisiti, l’appropriazione efficace dei nuovi contenuti risulta poco probabile o comunque difficoltosa. In matematica, infatti, gli apprendimenti si strutturano in modo gerarchico e cumulativo; per questo motivo, le attività didattiche devono necessariamente basarsi su ciò che è già consolidato.

**Comprensione concettuale: competenze, concetti, abilità e abilità chiave**

Nel Progetto DiToM si distingue tra competenze e abilità, concetti che nella pratica didattica risultano strettamente interconnessi. Le competenze riguardano la capacità di agire in modo consapevole in contesti matematici, mentre le abilità fanno riferimento alla prestazione concreta dello studente.

Le abilità chiave, considerate prerequisiti fondamentali per gli apprendimenti futuri, costituiscono il fulcro dello screening, con particolare attenzione agli ambiti dell’aritmetica e dell’algebra, in virtù della loro rilevanza gerarchica e trasversale all’interno della matematica.

**Esempi utili per chiarire il concetto di abilità chiave**

**Livello della scuola primaria: eseguire addizioni in modo strutturato**
La risoluzione del quesito $25 + 7$ richiede più che un conteggio passo per passo. Una solida consapevolezza operativa si manifesta quando gli studenti riconoscono relazioni *parte–tutto* (per esempio, $25$ e $7$ come parti di un intero), scompongono i numeri in modo flessibile (per esempio, $7 = 5 + 2$) e procedono per completamento, basandosi sul raggiungimento della decina successiva (per esempio, $25 + 5 = 30$; poi $30 + 2 = 32$). In questo esempio, concetti (valore posizionale, uguaglianza), competenze (calcolo flessibile, giustificazione del procedimento) e abilità (addizione strutturata) agiscono in sinergia. In assenza di questa abilità chiave, l’accesso ai livelli successivi – quali contesti numerici più ampi o strategie di calcolo più efficienti – risulta significativamente più difficoltoso.

**Livello della scuola secondaria di primo grado: gestire l’estensione dei domini numerici**
Un solido senso operativo dei numeri naturali (scomposizione, uso delle operazioni inverse, riferimenti al valore posizionale e alla retta dei numeri) costituisce un prerequisito fondamentale per il trasferimento del senso del numero e delle procedure acquisite ai numeri in notazione decimale e alle frazioni (per esempio addizione e sottrazione, approssimazione, stima), consentendo di superare gli ostacoli epistemologici implicati nell’apprendimento dei concetti matematici (Brousseau, 1997).
Lacune in queste abilità chiave conducono spesso a un lavoro prevalentemente procedurale, privo di una comprensione autentica, che a sua volta ostacola il passaggio alle espressioni algebriche, alle equazioni e alle relazioni funzionali. Ciò mette in evidenza il carattere predittivo delle abilità aritmetiche chiave rispetto allo sviluppo delle competenze algebriche.

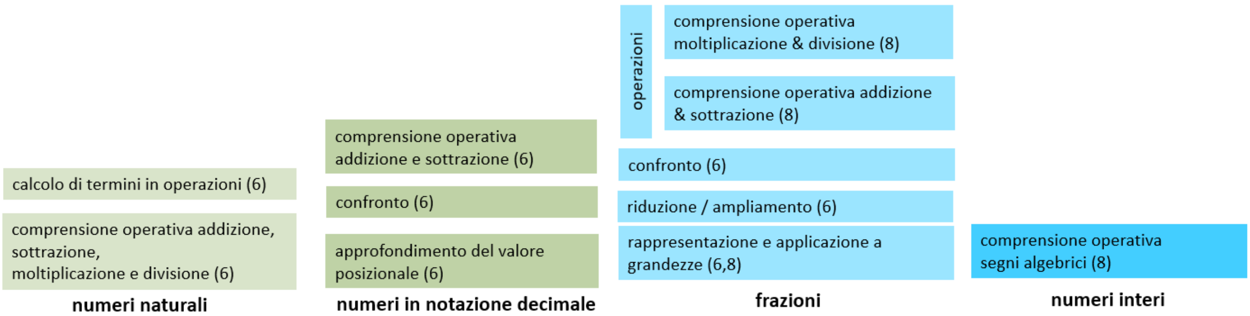
**L’accertamento del possesso delle abilità chiave è integrato nei test al fine di:**

- tenere conto dei prerequisiti necessari per il passaggio al livello di apprendimento successivo;
- utilizzare compiti strettamente legati ai contenuti, e quindi osservabili attraverso attività brevi;
- fornire agli insegnanti indicazioni su quali studenti necessitino di approfondimenti e di supporto, rilevando precocemente i prerequisiti fondamentali per garantire un apprendimento solido e duraturo.

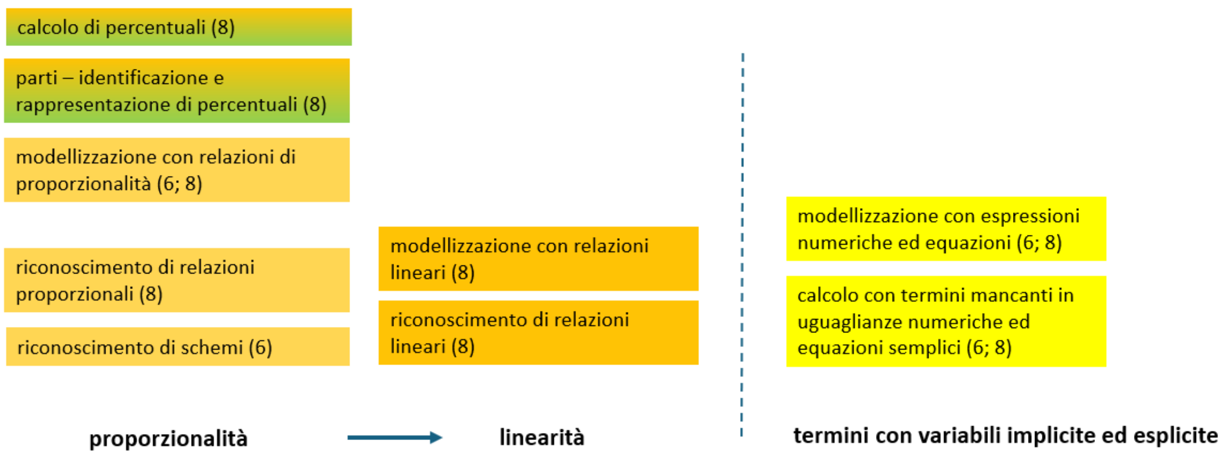
Nel nostro approccio, ogni ambito di contenuto è caratterizzato da specifiche abilità chiave, che possono rappresentare punti di criticità in momenti diversi del percorso di apprendimento, anche al termine di un’unità didattica, quando una determinata abilità risulta necessaria per proseguire efficacemente. Lo sviluppo delle abilità chiave prosegue dunque attraverso i diversi gradi scolastici; individuare tempestivamente eventuali prerequisiti mancanti diventa pertanto essenziale affinché gli studenti possano continuare a costruire conoscenze in modo significativo e consapevole.

# III. Struttura dei test di Screening 6+ e 8+

La struttura del test DiToM si basa sui contenuti di aritmetica e algebra, tenendo conto dell'organizzazione gerarchica di questi ambiti del sapere matematico. La costruzione del test si concentra in particolare sull'area dello sviluppo e dell'estensione del campo numerico, inteso come ambito del calcolo tecnico. In questo contesto, le procedure di calcolo vengono affrontate sia in forma non algoritmica sia algoritmica, ma sempre a partire da una comprensione concettuale di base.
Il diagramma sottostante illustra la struttura del test in quest'area per gli screening 6+ e 8+. Il test di screening 6+ si fonda sugli elementi essenziali dello screening 4+, che si concentra sui numeri naturali; nello screening 6+, tali contenuti vengono ripresi e trattati in modo più articolato.
Qualora gli studenti all'inizio della classe prima della scuola secondaria di primo grado (screening 6+) manifestino difficoltà significative nell'ambito dei numeri naturali, è consigliabile fare riferimento al test previsto per la classe quarta della scuola primaria (screening 4+).




Nell'ambito dell'algebra e della pre-algebra viene valutata la comprensione di strutture matematiche semplici, sia in applicazioni interne alla matematica sia in contesti applicativi esterni, con particolare attenzione agli aspetti di proporzionalità e di linearità. Analogamente, vengono prese in considerazione espressioni contenenti numeri o variabili in diverse tipologie di contesti di base, così come la comprensione dei termini algebrici, nella misura in cui essa costituisce parte integrante di una comprensione matematica fondamentale.



# IV. Somministrazione del test DiToM

- **Indicazioni generali**
    - Spiegare agli studenti lo scopo del test e rassicurarli.
    - Il test non è valutato con un voto.
    - Serve a fare il punto su ciò che gli studenti sanno già e su ciò che non sanno ancora, al fine di poter predisporre misure di supporto adeguate.
    - È particolarmente importante che gli studenti lavorino individualmente.
    - È utile sottolineare l'importanza di completare tutti i quesiti: più risposte vengono fornite, più sarà facile individuare conoscenze, abilità e difficoltà, e quindi offrire un aiuto mirato per superare queste ultime.

- **Struttura del test**
    - Il test è suddiviso in tre parti, ciascuna composta da diversi quesiti.
    - I quesiti sono indipendenti tra loro; pertanto, il mancato completamento di un quesito non pregiudica la riuscita dei successivi.

- **Durata**

  È prevista una **durata massima stimata per ciascuna parte**:

  Screening 6+: massimo 45 minuti
  – 15 minuti per la sezione di pre-algebra (parte I);
  – 10 minuti per la sezione di proporzionalità (parte II);
  – 20 minuti per la sezione di calcolo aritmetico (parte III).

  Screening 8+: massimo 40 minuti
  – 15 minuti per la sezione di pre-algebra (parte I);
  – 10 minuti per la sezione di proporzionalità (parte II);
  – 15 minuti per la sezione di calcolo aritmetico (parte III).

  È importante comunicare in anticipo la durata di ciascuna parte e informare gli studenti che, al termine di ogni sezione, devono fermarsi e attendere il segnale dell'insegnante prima di procedere con la parte successiva. L'insegnante interromperà chi non ha terminato, al fine di garantire a tutti lo stesso tempo a disposizione; è opportuno ribadire che non è grave non aver completato un quesito.

- **Formato degli esercizi**
    - Esercizi a risposta aperta: prevedono uno spazio in cui scrivere la risposta, che può consistere in un numero o in una breve frase.
    - Esercizi a risposta chiusa (scelta multipla): vengono proposte più opzioni e, salvo diverse indicazioni nel testo, lo studente deve sceglierne una sola. In caso di modifica della risposta, lo studente deve scrivere "No" accanto alla risposta iniziale e "Sì" accanto a quella nuova.

- **Modalità di risposta**
    - Non è consentito l'uso della calcolatrice.
    - Gli studenti possono utilizzare le parti bianche del fascicolo come foglio di appoggio, in particolare per effettuare calcoli.

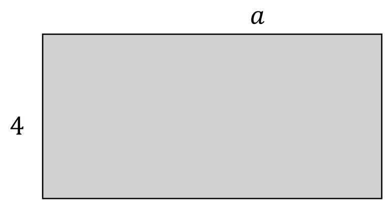
- **Interazioni durante il test**
    - In caso di richieste di aiuto, l'insegnante non deve fornire indicazioni che possano orientare la risposta. Lo scopo del test è rilevare le difficoltà degli studenti, non guidarli verso la soluzione.

# Presentazione dei quesiti

# Quesito 1.1: Formula per il calcolo del perimetro di un rettangolo

Il perimetro di un poligono è la somma delle lunghezze dei suoi lati.

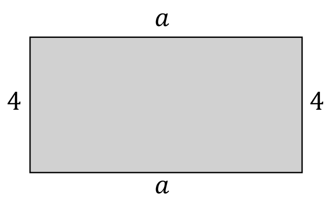
Qual è la formula del perimetro ($P$) di questo rettangolo?




$P =$ $2a + 8$

**Soluzione**

Devono essere addizionate le lunghezze di tutti e quattro i lati.




Anche se il quesito richiede "la" formula, sono corrette diverse risposte (equivalenti).

Ad esempio:

$a + 4 + a + 4$ oppure $a + a + 4 + 4$, oppure altre analoghe con i termini in qualsiasi ordine

$2a + 8$ oppure $2(a + 4)$ o $(a + 4) \cdot 2$, oppure ancora $2 \cdot a + 2 \cdot 4$

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di costruire una formula simbolica per il perimetro di un rettangolo, quando i lati sono espressi in forma algebrica. Il rettangolo è indicato con i lati di lunghezza $a$ e 4 e il quesito richiede agli studenti di esprimere il perimetro $P$ come una formula generale, anziché calcolare un valore numerico. Per rispondere correttamente, gli studenti devono comprendere che un rettangolo ha due coppie di lati di uguale lunghezza e che la formula scelta deve addizionare le lunghezze di tutti e quattro i lati.

$P = 2 \cdot (a + 4)$
$P = (a + 4) \cdot 2$
oppure, in modo equivalente: $P = 2a + 8$ oppure $P = 2a + 2 \cdot 4$ oppure $a + 4 + a + 4$ o equivalenti

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Questo quesito stimola lo sviluppo del pensiero algebrico, incoraggiando gli studenti a rappresentare le relazioni tra le quantità utilizzando le variabili. All'interno del quadro di riferimento del Progetto DiToM, la costruzione di tali formule è fondamentale per acquisire scioltezza nell'uso dei simboli e comprendere le relazioni funzionali. In

questo modo, si stabilisce un collegamento tra il ragionamento geometrico (perimetro) e l'espressione algebrica, rafforzando l'uso delle variabili come numeri generalizzati. Questa abilità prepara inoltre gli studenti al lavoro successivo con le funzioni, i modelli parametrizzati e la risoluzione delle equazioni.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**

Un malinteso molto comune è che gli studenti tentino di calcolare un valore numerico per il lato indicato con a—ad esempio, misurandolo direttamente dal disegno—anziché riconoscere che $a$ è una variabile e che il quesito richiede una formula generale, non un risultato specifico. Questo indica una mancata corrispondenza tra rappresentazione algebrica e calcolo concreto. Un altro errore frequente è il calcolo numerico del perimetro inserendo valori stimati o assunti (ad esempio, "a è circa 6 cm, quindi..."), mostrando così di aver frainteso la natura del quesito. Ciò rivela un'errata interpretazione del formato del quesito, trattandolo come un problema di calcolo invece che come una generalizzazione simbolica. Inoltre, alcuni studenti forniscono la formula per l'area del rettangolo anziché quella del perimetro, ad esempio scrivendo $A = a \cdot 4$ oppure $A = 4a$, confondendo i concetti di area e perimetro. Questo suggerisce sia una confusione concettuale tra le due grandezze sia difficoltà nell'estrarre le informazioni rilevanti dal testo.

Complessivamente, questi errori segnalano debolezze in:

- comprendere il ruolo delle variabili
- distinguere i diversi concetti geometrici
- interpretare con precisione le istruzioni matematiche

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

Gli studenti traggono beneficio da esercizi che distinguono chiaramente i quesiti che richiedono una formula da quelli che richiedono un risultato numerico. L'insegnante potrebbe utilizzare rettangoli ritagliati fisicamente o strumenti digitali interattivi, in cui gli studenti etichettano i lati con le lettere e "camminano" intorno alla figura per contare la lunghezza totale. Strumenti visivi come le tessere algebriche o le cornici per il perimetro possono aiutare a spiegare perché i lati opposti sono uguali e devono essere addizionatii due volte. Incoraggiare formulazioni verbali, come "due volte la somma di $a$ e $4$", aiuta a passare dalla comprensione concreta alla notazione algebrica. Inoltre, proporre quesiti a contrasto, come „1) Scrivi una formula per il perimetro in termini della variabile/incognita $a$; 2) Usa la formula per calcolare il valore del perimetro per $a = 5$", può aiutare gli studenti a leggere le istruzioni in modo preciso.

# Quesito 1.2: Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico

Traduci ogni frase in una espressione:

a) La somma di 3 e $x$ $3 + x$

b) La differenza tra $x$ e 3 $x - 3$

c) Il doppio di $a$ $2a$

**Soluzione**

a) La somma di 3 e $x$ può essere scritta sia come $3 + x$ che come $x+3$.
b) 3 in meno di $x$ può essere scritto come $x - 3$ (oppure $x + (-3)$ o $-3 + x$)
c) Il doppio di $a$ può essere scritto come $2 \cdot a$, $2a$ oppure $a + a$.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questa serie di esercizi valuta l'abilità degli studenti di tradurre dal linguaggio naturale nel linguaggio algebrico. Ciascuno dei tre item presenta una diversa struttura verbale che corrisponde a una semplice espressione simbolica. Nell'item a (la somma di 3 e $x$) l'obiettivo è riconoscere una struttura additiva $(3 + x)$. L'item b (la differenza tra $x$ e 3) verifica se gli studenti interpretano correttamente una relazione sottrattiva con il giusto ordine degli operandi $(x - 3)$. L'item c (il doppio di $a$) richiede di riconoscere una struttura moltiplicativa $(2a)$. Questo quesito combina la verifica delle abilità di base di traduzione dal linguaggio naturale in quello algebrico simbolico.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
La capacità di passare con disinvoltura dalle descrizioni verbali alle rappresentazioni algebriche è fondamentale per acquisire competenza matematica. Questa abilità è fondamentale per comprendere le relazioni funzionali, per interpretare e scrivere equazioni e formule e per le attività di modellizzazione. Secondo il quadro teorico del Progetto DiToM, questa abilità è fondamentale per sviluppare una comprensione simbolica e una padronanza significativa delle operazioni, andando oltre l'applicazione meccanica delle procedure. Gli studenti che possiedono queste abilità di traduzione sono più preparati a interpretare i problemi e a costruire equazioni anche in contesti più complessi.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Questo quesito evidenzia errori tipici a diversi livelli. Nell'item b (differenza tra $x$ e 3), molti studenti invertono l'ordine e scrivono $3 - x$, interpretando la descrizione verbale come "3 meno $x$", invece che come "$x$ meno 3". Ciò indica una difficoltà nel riconoscere la direzione della relazione all'interno delle strutture verbali. Un altro errore frequente è la confusione tra "al quadrato" e "il doppio". Questi errori segnalano che gli studenti hanno difficoltà nell'analisi della struttura verbale, nella comprensione della sintassi algebrica e delle convenzioni matematiche.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Per rafforzare le abilità in questione, l'azione didattica dovrebbe porre l'accento sulla struttura del linguaggio in relazione alla forma simbolica. È fondamentale spiegare esplicitamente frasi come "in meno di", "in più di", "il prodotto di", "la differenza tra" "il quadrato di", fornendo esempi di traduzioni corrette ed errate. Inoltre, è importante incoraggiare gli studenti a esprimere a parole le proprie riflessioni ("$x$ meno 3 significa che parto da $x$ e sottraggo 3"), in modo da promuovere la costruzione di significato nel passaggio verso il linguaggio algebrico simbolico e rafforzare il legame tra linguaggio e significato matematico.

# Quesito 1.3: Tradurre relazioni tra quantità in un’espressione algebrica

Laura ha 10 libri in più di Jenny. Kevin ha il doppio dei libri di Laura. Qual è il numero dei libri di Kevin se il numero dei libri di Jenny è $n$?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta

- ☐ $10 + n$
- ☐ $10 + n + 2$
- ☑ $2 \cdot (n + 10)$
- ☐ $2 \cdot n + 10$

**Soluzione**

Prima soluzione, per uno studente abituato a lavorare con le variabili:

- Passo 1: Jenny ha $n\ libri$
- Passo 2: Laura ha 10 libri in più di Jenny; quindi, Laura ha $n + 10\ libri$.
- Passo 3: Kevin ha il doppio dei libri di Laura, quindi Kevin ha $2 \cdot (n + 10)\ libri$.

Seconda soluzione, basata su una notazione informale:

- Laura = Jenny $+ 10$
- Kevin = 2· Laura = 2 $\cdot$ Jenny $+10 = 2 \cdot (n + 10)$

Terza soluzione, basata sul test con un numero e successiva generalizzazione:

- supponiamo che Jenny abbia 17 libri. Allora Laura ne ha $17 + 10 = 27$ e Kevin ha $2 \cdot 27 = 54$ libri.
- il numero 17 è nascosto nel 27 e la risposta $2 \cdot 27 = 2 \cdot (17 + 10)$.
- generalizzando, sostituendo 17 con $n$ si ottiene la risposta $2 \cdot (n + 10)$.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di tradurre una descrizione verbale in due passaggi in un'espressione simbolica. Il problema descrive che Jenny possiede $n$ libri, Laura ne possiede 10 in più di Jenny e Kevin ne possiede il doppio rispetto a Laura. Per risolvere correttamente il problema, gli studenti devono riconoscere che la quantità dei libri di Laura si esprime come $n + 10$ e poi applicare la moltiplicazione per trovare il totale dei libri di Kevin, ottenendo l'espressione $2 \cdot (n + 10)$. Ciò richiede attenzione sia alla sequenza delle relazioni sia al ruolo strutturale delle parentesi nelle espressioni algebriche.

**Perché questa abilità è un’abilità chiave**
La capacità di costruire espressioni simboliche a partire da descrizioni relazionali è fondamentale in algebra. Questo tipo di quesito dimostra la capacità dello studente di identificare le dipendenze funzionali e di codificarle strutturalmente tramite le parentesi. Nel contesto del Progetto DiToM, questo tipo di quesito rappresenta un'abilità matematica fondamentale, in quanto richiede il coordinamento di diverse quantità e operazioni e favorisce il passaggio dal ragionamento aritmetico alla generalizzazione algebrica. Lavorando con variabili astratte e traducendo le operazioni in linguaggio simbolico, gli studenti iniziano a ragionare in termini di relazioni tra variabili, un passo fondamentale per la modellizzazione, la risoluzione delle equazioni e il ragionamento funzionale.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Un errore comune è che gli studenti semplificano prematuramente la struttura scrivendo $2n + 10$ invece del corretto $2 \cdot (n + 10)$, segno che non hanno considerato la priorità della moltiplicazione rispetto all’addizione. Altri possono fermarsi alla prima relazione e scrivere solo $n + 10$, rappresentando i libri di Laura invece che

quelli di Kevin. Una frequente incomprensione, come $10 + n + 2$, nasce anche dall'interpretare "il doppio di" come un aumento separato invece che come una moltiplicazione, oppure dal non rispettare la priorità della moltiplicazione sull'addizione, con conseguente errata interpretazione del calcolo richiesto. In alcuni casi, gli studenti potrebbero confondere i personaggi o il flusso delle informazioni, segno che faticano a estrarre o mantenere più relazioni presenti nel testo. Queste difficoltà evidenziano lacune nella comprensione strutturale, specialmente quando si combinano ragionamenti additivi e moltiplicativi in forma simbolica.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Gli studenti potrebbero beneficiare di una scomposizione esplicita delle relazioni verbali, guidata da domande stimolo come: "Cosa ha Laura in termini di libri di Jenny?" e "Cosa fa Kevin con la quantità di Laura?". L'uso di strumenti visivi, come diagrammi o schemi, aiuta a rendere queste connessioni più tangibili. Inoltre, esercitarsi nella traduzione dal linguaggio verbale a quello simbolico, con relazioni più semplici, a un solo passaggio, aiuta a costruire sicurezza prima di combinare i passaggi. L'insegnamento dovrebbe affrontare esplicitamente anche l'uso delle parentesi, mettendo a confronto espressioni come $2n + 10\ e\ 2 \cdot (n + 10)$ con esempi numerici concreti (per esempio, utilizzando un foglio di calcolo) per mostrare l'importanza della struttura. Incoraggiare gli studenti a esprimere ad alta voce il proprio ragionamento rafforza sia la logica operativa sia il significato algebrico.

# Quesito 1.4: Tradurre una situazione reale in un'espressione algebrica

Un gruppo di 13 amici va al cinema. Ognuno di loro paga un biglietto che costa $x$ euro e compra popcorn per 3,20 euro.

Quale delle seguenti espressioni esprime il prezzo pagato dall'intero gruppo?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

- ☐ $13 + (x + 3{,}20)$
- ☐ $x \cdot (13 + 3{,}20)$
- ☐ $13 \cdot x + 3{,}20$
- ☑ $13 \cdot (x + 3{,}20)$

**Soluzione**

Prima soluzione: Ogni persona paga $x + 3{,}20$ e 13 persone pagano 13 volte quello che paga una persona. Quindi la risposta è $13 \cdot (x + 3{,}20)$.

Seconda soluzione, basata sulla verifica con un valore numerico e sulla generalizzazione: Supponiamo che un biglietto costi 5 €. Ogni persona paga un biglietto da 5 € e compra del popcorn per 3,20 €, quindi ogni persona paga 8,20 €. 13 persone pagano 13 volte quella somma: $13 \cdot 8{,}20$. Non è necessario calcolare il prodotto, ciò che conta è il ruolo di incognita svolto dal numero scelto, cioè 5: $13 \cdot 8{,}20 = 13 \cdot (5 + 3{,}20) = 13 \cdot (x + 3{,}20)$.

La seconda soluzione può essere sviluppata anche per generalizzazione di un esempio generico:

| con il numero | con la variabile |
|---|---|
| $5 + 3{,}20$ | $x + 3{,}20$ |
| $13 \cdot (5 + 3{,}20)$ | $13 \cdot (x + 3{,}20)$ |

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito richiede agli studenti di tradurre una situazione reale in un'espressione algebrica strutturata. Il contesto è presentato in forma scritta: 13 amici acquistano un biglietto del cinema a $x$ euro ciascuno e spendono ulteriori 3,20 € per i popcorn. Il costo totale per il gruppo deve essere rappresentato da un'espressione che combini entrambe le componenti, la variabile e la costante, e che moltiplichi l'intero costo individuale per il numero di persone. L'espressione corretta è quindi $13 \cdot (x + 3{,}20)$. Per scegliere la risposta corretta, gli studenti devono comprendere la struttura narrativa e come rappresentare l'addizione ripetuta tramite la moltiplicazione, utilizzando le parentesi.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Tradurre situazioni reali in espressioni algebriche riflette una abilità fondamentale nella modellizzazione matematica. Questo quesito mostra un esempio della transizione cruciale dal ragionamento aritmetico alla strutturazione algebrica: invece di calcolare o stimare, agli studenti viene chiesto di generalizzare e rappresentare una relazione. Secondo il quadro DiToM, questa abilità è fondamentale per lo sviluppo del pensiero funzionale, della consapevolezza strutturale e di una comprensione flessibile dell'uso delle variabili. Inoltre, questa abilità sostiene una comprensione profonda delle operazioni, dei raggruppamenti e della proprietà distributiva, prerequisiti essenziali per la manipolazione di espressioni algebriche ed equazioni.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Molti studenti tendono a non rendersi conto della necessità delle parentesi, scegliendo espressioni come $13x + 3{,}20$. Altri potrebbero invertire la moltiplicazione, scegliendo $x + 13 \cdot 3{,}20$ o rappresentando erroneamente

solo una parte della situazione. I distrattori sono appositamente scelti per rivelare specifiche misconcezioni: per esempio, non applicare la proprietà distributiva o interpretare in maniera errata il modo in cui la ripetizione dei costi sia modellizzata tramite il linguaggio algebrico. In alcuni casi, gli studenti optano anche per l'opzione numericamente più semplice senza analizzarne il significato, mostrando di aver effettuato una lettura superficiale o di affidarsi a euristiche invece che a un ragionamento relazionale.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

Per rafforzare la comprensione, potrebbe essere utile visualizzare lo scenario utilizzando tabelle o diagrammi, mostrando una riga per persona e totalizzando i costi in ogni colonna. La modellizzazione esplicita di quesiti simili, come "Ogni persona paga $x$ € e $y$ €, qual è il totale per $n$ persone?", può essere utile. Favorisce la familiarità con le strutture di raggruppamento. Sottolineare il ruolo delle parentesi con frasi come "tutto quello che paga una persona, poi moltiplicato per 13" aiuta gli studenti a trasferire le relazioni espresse nel linguaggio verbale nella forma algebrica. Inoltre, le discussioni che mettono a confronto le opzioni proposte e valutano il significato di ciascuna espressione, possono aiutare gli studenti a sviluppare strategie metacognitive adatte per interpretare le scelte simboliche. Si può anche incoraggiare lo studente che non sa come iniziare a partire da un numero qualsiasi scelto da lui o lei.

# Quesito 1.5: Tradurre un'istruzione di calcolo dal linguaggio naturale a quello algebrico

Un calcolo è definito tramite i seguenti passaggi:

- scegli un numero $x$
- aggiungi $4$ a $x$
- moltiplica il risultato per $8$.

Quale delle seguenti espressioni corrisponde al calcolo?
Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

- ☐ $8 \cdot x + 4$
- ☐ $x + 4 \cdot 8$
- ☑ $(x + 4) \cdot 8$
- ☐ $(8 \cdot 4) + x$

**Soluzione**

Prima soluzione, in due passaggi.

Passaggio 1: addizionare $4$ a $x$; fornisce $x + 4$
Passaggio 2: moltiplicare il risultato precedente, cioè $x + 4$, per $8$; fornisce $(x + 4) \cdot 8$.

Seconda soluzione, basata sulla prova con un numero e sulla generalizzazione: supponiamo che $x = 17$.

Passaggio 1: addizionare $4$ a $17$ fornisce come risultato $17 + 4 = 21$
Passaggio 2: moltiplicare il risultato precedente, cioè $21$, per $8$; fornisce $21 \cdot 8$.
Passaggio 3: analizzare le trasformazioni che ha subito il numero di partenza e sostituirlo con l'incognita $x$: $(17 + 4) \cdot 8 = (x + 4) \cdot 8$.

In questo modo è possibile "seguire il numero" per trovare la risposta corretta:

| con il numero | con la variabile |
|---|---|
| $17 + 4$ | $x + 4$ |
| $8 \cdot (17 + 4)$ | $8 \cdot (x + 4)$ |

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito chiede agli studenti di rappresentare una sequenza di calcoli —nello specifico, di esprimere simbolicamente il risultato di aggiungere $4$ a $x$ e poi moltiplicare il risultato per $8$. L'espressione corretta è $(x + 4) \cdot 8$, che richiede agli studenti di rispettare le priorità delle operazioni addizionando $x + 4$ prima di eseguire la moltiplicazione, il che si esprime inserendo le parentesi.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Comprendere e saper rappresentare la struttura gerarchica delle operazioni è una competenza fondamentale in algebra. Consente agli studenti di passare dall'interpretazione aritmetica "passo dopo passo" all'organizzazione di questi passaggi in una forma simbolica strutturata. Secondo il quadro di riferimento del Progetto DiToM, questo fa parte dello sviluppo delle competenze di modellizzazione simbolica, in particolare dell'uso delle parentesi per mettere in evidenza le priorità delle operazioni. Questo aspetto è cruciale non solo per valutare correttamente le espressioni, ma anche per acquisire sicurezza nella manipolazione delle formule e nella risoluzione delle equazioni.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**

I distrattori sono scelti con cura per rivelare misconcezioni comuni, legate alle relazioni algebriche. Per esempio, $8 \cdot x + 4$ rappresenta l'errore di eseguire la moltiplicazione non nell'ordine indicato nel testo, non rispettando il raggruppamento previsto dall'addizione iniziale. La scelta $x + 4 \cdot 8$ mostra una lettura sequenziale delle istruzioni fornite nella consegna, che applica la moltiplicazione prima dell'addizione, senza fare ricorso alle parentesi. $8 \cdot 4 + x$ ignora del tutto la struttura delle relazioni algebriche, suggerendo un'attenzione superficiale ai numeri coinvolti piuttosto che alla relazione tra essi. I distrattori non sono quindi scelti a caso, ma indicano se uno studente comprende l'influenza delle parentesi sull'ordine delle operazioni e se è in grado di analizzare istruzioni verbali in più passaggi in modo strutturale anziché sequenziale.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

Il supporto dovrebbe mirare a rafforzare la consapevolezza del ruolo delle parentesi e la comprensione di come esse possono incidere sulla priorità delle operazioni. Un approccio utile è far verbalizzare agli studenti ogni passaggio e poi far raggruppare le espressioni attraverso azioni concrete, scrivendole su cartoncini o codici colore. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a confrontare espressioni come $x + 4 \cdot 8$ e $(x + 4) \cdot 8$, sostituendo i valori di $x$ con numeri (per esempio, $x = 2$) per verificare che la struttura corrisponda al significato inteso. Spiegare perché le parentesi sono necessarie in questo contesto aiuta a sviluppare il ragionamento simbolico e a superare una traduzione puramente procedurale, avvicinando gli studenti a una comprensione più profonda delle relazioni algebriche. Inoltre, si può chiedere agli studenti di scegliere un numero a piacere e poi far loro eseguire dei calcoli che successivamente si possono generalizzare in una sequenza di calcoli indipendenti dal numero iniziale scelto.

# Quesito 1.6: Determinare il valore di un'espressione algebrica tramite la sostituzione di una variabile

Qual è il valore di $1 + 3x$ per $x = 8$ ?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

- ☑ 25
- ☐ 32
- ☐ 39
- ☐ 48

**Soluzione**

La chiave per risolvere questo quesito è notare che $3x = 3 \cdot x$ deve essere calcolato prima di addizionare il numero 1.

Soluzione in un passaggio: Sostituisci $x = 8$ e calcola

$$1 + 3x = 1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$$

Soluzione in due passaggi: Sostituisci $x = 8$. Prima calcola $3x = 3 \cdot 8 = 24$. Poi calcola $1 + 24 = 25$.

Per avere una visione più chiara dei calcoli in due passaggi, possiamo presentarli su righe separate:

$$x = 8$$

$$3x = 3 \cdot x = 3 \cdot 8 = 24$$

$$1 + 3x = 1 + 24 = 25$$

**Abilità chiave valutata con questo quesito**

Questo quesito valuta la capacità degli studenti di calcolare il valore di un'espressione algebrica, sostituendo un valore dato alla variabile e applicando correttamente la priorità delle operazioni. In particolare, agli studenti viene presentata l'espressione $1 + 3x$ e viene chiesto di calcolarne il valore per $x = 8$. È fondamentale riconoscere che $3x$ significa 3 moltiplicato per x; la procedura corretta consiste quindi nel moltiplicare prima di eseguire l'addizione:

$$1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$$

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**

La sostituzione è uno dei processi più fondamentali dell'algebra e rappresenta un ponte tra le espressioni simboliche e il ragionamento numerico. All'interno del quadro di riferimento del Progetto DiToM, la valutazione delle espressioni mediante la sostituzione dei valori aiuta a sviluppare fluidità operativa, attribuire senso ai simboli e acquisire confidenza nell'uso delle variabili. Queste abilità sono fondamentali per costruire tabelle e grafici e risolvere classi di problemi reali ricorrendo all'algebra, nonché per lavorare con le funzioni. Inoltre, promuove una comprensione flessibile delle relazioni strutturali in matematica, in particolare della relazione tra simboli, operazioni e il loro significato.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**

Gli errori comuni riguardano l'interpretazione errata della struttura dell'espressione o l'applicazione errata dell'ordine di priorità delle operazioni. Chi sceglie come risposta 32, potrebbe aver interpretato l'espressione come $(1 + 3) \cdot 8 = 32$, introducendo parentesi non previste. Chi sceglie come risposta 39, potrebbe aver valutato erroneamente $3x$ come 38 (concatenando 3 e 8 in un numero a due cifre), mostrando di mettere in atto un'interpretazione simbolica errata piuttosto che un errore di calcolo. Chi sceglie come risposta corretta 48, potrebbe aver interpretato $3x$ come $38$ e aver addizionato $1$ alla cifra delle decine, piuttosto che a quella delle unità. In questo caso all'errore di interpretazione della struttura algebrica si aggiunge anche un errore legato alle operazioni nel sistema posizionale. Anche se non previsto dai distrattori del quesito, alcuni studenti potrebbero commettere altri errori in un calcolo di questo tipo. Per esempio, potrebbero calcolare $1 + (3 + 8) = 12$, interpretando $3x$ come $3 + x$ invece che come $3$ per $x$. Altri potrebbero fornire come risultato $27$, avendo addizionato prima $1$ e $8$ e poi moltiplicato la somma per $3$, cioè $(1 + 8) \cdot 3 = 27$.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

L'azione didattica dovrebbe puntare sulla lettura strutturale piuttosto che procedurale delle espressioni algebriche. L'insegnante può favorire l'apprendimento incoraggiando gli studenti a esprimere a parole le espressioni ("uno più tre volte $x$") e a collegarle al significato numerico. L'uso di tabelle di sostituzione che separano chiaramente ogni operazione può aiutare a chiarire la struttura dell'espressione. Attività di confronto del valore assunto dalle espressioni, come per esempio $1 + 3x$ e di $(1 + 3)x$ per lo stesso valore numerico, aiutano a evidenziare come le parentesi cambino il significato dell'espressione. Il rafforzamento della consapevolezza dell'ordine delle operazioni tramite il ricorso a esercizi strutturati, soprattutto in espressioni prive di parentesi, può essere una misura utile per accrescere la sicurezza nell'esecuzione di operazioni e l'automatizzazione dei processi di calcolo.

# Quesito 1.7: Identificare la soluzione di un'equazione lineare

L'uguaglianza $7x + 3 = 80$ è verificata per quale valore di $x$?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

- ☐ $x = 7$
- ☐ $x = 8$
- ☐ $x = 10$
- ☑ $x = 11$

**Soluzioni**

Prima soluzione, basata sulla verifica di tutti e quattro i numeri:

| $x$ | $7$ | $8$ | $10$ | $11$ |
|---|---|---|---|---|
| $7x + 3$ | $49 + 3 = 52$ | $56 + 3 = 59$ | $70 + 3 = 73$ | $77 + 3 = 80$ |

Corrisponde al numero a secondo membro nell'equazione (80).

Seconda soluzione, basata sul calcolo di $7x + 3$ con alcuni dei numeri suggeriti dai distrattori: possiamo iniziare con uno qualsiasi dei quattro numeri, ad esempio $x = 10$ che porta al semplice calcolo

$7x + 3 = 7 \cdot 10 + 3 = 70 + 3 = 73$ (non corrisponde a 80)

73 è minore di 80, quindi serve un numero maggiore di 10. L'unico di questi quattro numeri che soddisfa questa condizione è $x = 11$ che fornisce:

$7x + 3 = 7 \cdot 11 + 3 = 77 + 3 = 80$ (corrisponde al numero a secondo membro nell'equazione, cioè 80)

Pertanto, possiamo concludere che la risposta corretta è $x = 11$.

Terza soluzione, risoluzione algebrica (versione breve):

$7x + 3 = 80$ (sottrai 3 $a\ entrambi\ i\ membri$)

$7x = 77$ (dividi per 7 a entrambi i membri)

$x = \frac{77}{7} = 11$

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito valuta se gli studenti possiedono il concetto di equazione lineare e se sono in grado di stabilire se un dato numero è soluzione dell'equazione, sostituendo la variabile. Agli studenti viene presentata l'equazione $7x + 3 = 80$ e viene chiesto di individuare il valore di $x$ che rende vera questa uguaglianza. La risposta corretta è $x = 11$, poiché sostituendo questo valore si ottiene un'identità:

$7 \cdot 11 + 3 = 80$

$80 = 80$

Per rispondere correttamente, gli studenti devono non solo eseguire il calcolo, ma anche comprendere che un numero è soluzione di un'equazione se sostituendo la variabile con esso si ottiene lo stesso valore in entrambi i membri dell'equazione.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**

Comprendere le equazioni come relazioni di equivalenza e sapere come verificare se un numero è soluzione dell'equazione, sono aspetti fondamentali dell'algebra. Nel quadro di riferimento del Progetto DiToM, questa abilità rientra nell'ambito dell'interpretazione dei simboli e del significato del segno di uguaglianza. Queste conoscenze e abilità sono necessarie per essere in grado di risolvere equazioni in modo sistematico e di verificare se una soluzione proposta soddisfa l'equazione. Questa comprensione supporta un pensiero algebrico più avanzato e rafforza il senso del numero attraverso il ragionamento inverso e il controllo delle operazioni.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**

Alcuni studenti potrebbero sostituire i valori nell'equazione ma commettere errori di calcolo nel valutare $7x + 3$. Altri potrebbero fraintendere la richiesta, interpretando l'espressione come un semplice calcolo invece che come una relazione di equivalenza da soddisfare. Una misconcezione comune è scegliere $x = 10$ perché il risultato che si ottiene (77) "va circa bene" perché si discosta di tre unità dal numero che compare a secondo membro $(80)$. Questo evidenzia che sia stata effettuata una stima piuttosto che un calcolo seguito da ragionamento. Alcuni studenti potrebbero scegliere $x = 8$ o $x = 7$ basandosi su tentativi ed errori o su sostituzioni incomplete, fermandosi eventualmente quando il primo membro è reputato sufficientemente vicino a $80$. Alcuni studenti potrebbero sostituire $x$ con $7$, ma interpretando erroneamente $7x$ come un numero con due cifre avente 7 decine e $7$ unità, piuttosto che come $7 \cdot x$. Questi errori rivelano lacune nella comprensione della notazione algebrica e del significato di uguaglianza.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

Gli studenti dovrebbero essere guidati attraverso attività che mettano in luce il significato di un valore numerico che soddisfa un'equazione. Le tabelle di sostituzione strutturate, in cui gli studenti verificano più valori per una singola equazione, aiutano a sviluppare l'intuizione. L'insegnante potrebbe incoraggiare la verbalizzazione, chiedendo per esempio: "Il primo membro è uguale al secondo?" e promuovendo l'uso di strategie di stima insieme ai calcoli esatti. Questo consentirebbe agli studenti di rendersi conto della plausibilità di una ipotetica soluzione. L'uso di metafore come la bilancia o di materiali manipolativi può aiutare a sviluppare una comprensione concettuale dell'uguaglianza. Infine, offrire agli studenti l'opportunità di inventarsi delle equazioni e di testare diversi valori favorisce il loro coinvolgimento e una comprensione più profonda delle relazioni tra le variabili.

# Quesito 1.8: Tradurre una situazione di acquisto in un’equazione con due variabili

Marta compra 2 chilogrammi di mele e 3 chilogrammi di arance e spende 9 euro.

Qual è l’equazione che traduce correttamente la situazione se $x$ è il prezzo di un chilogrammo di mele e $y$ il prezzo di un chilogrammo di arance?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

□ $3x + 2y = 9$
✓ $2x + 3y = 9$
□ $2x + 3x = 9$
□ $2y + 3y = 9$

**Soluzione**

Prima soluzione, che potrebbe mettere in atto uno studente abituato a lavorare con le variabili:

- il prezzo di un chilogrammo di mele è $x$ euro; Marta ne compra 2 kg; quindi, spende $2 \cdot x = 2x$ euro per le mele;
- il prezzo di un chilogrammo di arance è $y$ euro; Marta ne compra 3 kg; quindi, spende $3 \cdot y = 3y$ euro per le arance;
- la spesa totale è 9 euro, dunque l’equazione corretta è $2x + 3y = 9$.

Seconda soluzione, andando per esclusione. Le tipologie di frutta sono due, quindi ci devono essere due variabili diverse; questo porta a escludere le ultime due opzioni. Visto che Marta compra 2 kg di mele e 3 di arance e $x$ è il prezzo di un chilogrammo di mele e $y$ il prezzo di un chilogrammo di arance, la risposta corretta deve essere $2x + 3y = 9$.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**

Il quesito valuta la capacità di tradurre una situazione reale con due quantità variabili in un’equazione lineare. Lo studente deve riconoscere che ciascun prodotto “numero di chilogrammi per prezzo unitario” rappresenta una parte della spesa totale, e che la somma di queste parti deve essere uguale all'importo complessivo.
Il quesito richiede quindi di: individuare le grandezze coinvolte, assegnare correttamente i coefficienti, comporre un’equazione che rispecchi la struttura additiva del contesto.
Questa abilità si fonda sulla capacità di tradurre dal linguaggio naturale nel linguaggio simbolico, riconoscendo la struttura algebrica sottostante.

**Perché questa abilità è un’abilità chiave**

Saper modellizzare una situazione di costo attraverso un’equazione lineare è un passo importante nell’apprendimento algebrico perché richiede di costruire un’espressione composta da termini con significato distinto, mette in gioco la relazione fra quantità e prezzi, ed esercita la capacità di riconoscere nella frase la sua architettura matematica. Nel quadro del Progetto DiToM, questo tipo di quesito sostiene il passaggio dal calcolo alla modellizzazione, e da un ragionamento puramente aritmetico a uno più relazionale, che prepara alla risoluzione di sistemi e allo studio di funzioni lineari. Il ricorso a una modellizzazione con due variabili, anziché comprimere l’informazione fornita nel testo in un’unica incognita, invita lo studente a mantenere distinti i contributi delle grandezze coinvolte: questa separazione controllata permette di cogliere più chiaramente come ciascuna variabile influisca sul totale e prepara al lavoro con sistemi di equazioni.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Gli errori più frequenti mostrano spesso dove si interrompe il filo logico della traduzione:

- invertire i coefficienti, ottenendo $3x + 2y = 9$: segnale che lo studente ha colto la struttura ma ha scambiato le quantità associate a mele e arance;
- addizionare quantità dello stesso tipo, come $2x + 3y = 9$ o $2y + 3y = 9$: indica una difficoltà nel tenere distinti i ruoli delle variabili o una comprensione debole dell'idea di prezzo unitario;
- comprendere i coefficienti come prezzi anziché come quantità: lo studente può credere che "$2x$" significhi "il prezzo è 2 volte $x$" invece di "quantità di mele per prezzo unitario";
- interpretare erroneamente il linguaggio algebrico, per esempio non leggendo $2x$ come 2 volte $x$, ma come 2 decine e $x$ unità o altre interpretazioni non coerenti con il linguaggio algebrico.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Rappresentazione tabellare: una semplice tabella con colonne "quantità", "prezzo unitario", "costo" rende chiaro il significato della moltiplicazione delle quantità per i prezzi e precede l'addizione.
Il docente potrebbe guidare lo studente con domande guida del tipo: "Quanto spende Marta per le mele?", Come lo esprimi con $x$?", "Quanto spende per le arance?", "Come lo esprimi con $y$?", "Se metti insieme le due spese, che cosa ottieni?".
Un'ulteriore strategia utile consiste nel confrontare espressioni errate e corrette: discutendo perché $3x + 2y$ non rappresenta la situazione può aiutare a stabilizzare l'associazione quantità–coefficiente.

# Quesito 2.1: Risolvere di un problema di proporzionalità diretta in contesto reale

2 Kg di patate costano 2,40 €. Qual è il prezzo di 5 Kg di patate?

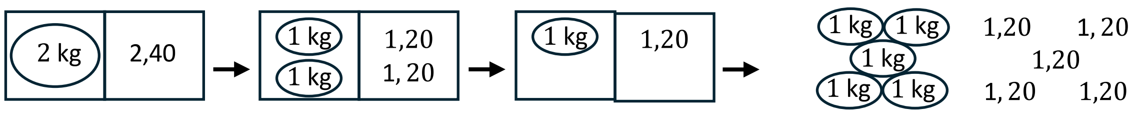
Risposta 6 €

**Soluzioni**

Prima soluzione: basata su un procedimento che si avvicina in più passaggi al risultato: 2 kg costano 2,40 €, quindi 4 kg costano 4,80 €. Un ulteriore chilogrammo costa 1,20 €, quindi 5 kg costano $4{,}80 + 1{,}20 = 6$€.

Seconda soluzione: basata sulla riduzione all'unità: 2 kg costano 2,40 €, quindi 1 kg costa 1,20 €. 5 kg costano 5 volte tanto: $5 \cdot 1{,}20 = 6$.

Entrambe le soluzioni possono essere supportate da immagini. Per esempio, per quanto riguarda la seconda soluzione:




Con notazione semi-formale simbolica:

2 kg costano 2,40 €

Dividi per 2, cioè $2{,}40 : 2 = 1{,}20$ 1 kg costa 1,20 €
Moltiplica per 5, cioè $1{,}20 \cdot 5 = 6$ 5 kg costano 6 €

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito richiede agli studenti di applicare il ragionamento moltiplicativo per risolvere un problema di proporzionalità inserito in un contesto quotidiano. Fornendo il dato che 2 kg di patate costano 2,40 €, agli studenti viene chiesto di determinare il prezzo per 5 kg. Ciò implica riconoscere un prezzo costante per chilogrammo (1,20 € per kg) e applicarlo a un'altra quantità. L'approccio corretto prevede sia il ragionamento basato sul prezzo unitario come grandezza di riferimento (dividendo 2,40 € per 2 e moltiplicando per 5), sia la costruzione e la risoluzione di una proporzione. In alternativa si può interpretare 5 come composto da 2, 2 e 1, cioè $5 = 2 + 2 + 1$, e addizionare i prezzi corrispondenti a queste quantità: $2{,}40 + 2{,}40 + 1{,}20$. Il quesito verifica non solo le abilità procedurali, ma anche la comprensione concettuale di come i prezzi variano in maniera proporzionale rispetto alle quantità.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Il ragionamento proporzionale è una pietra angolare del pensiero matematico. Consente agli studenti di interpretare e modellizzare relazioni reali che coinvolgono rapporti in scala, grandezze unitarie e confronti moltiplicativi. All'interno del quadro di riferimento del Progetto DiToM, questo tipo di quesito sostiene passaggi fondamentali verso il pensiero funzionale e prepara gli studenti ad affrontare argomenti come il calcolo delle percentuali e le funzioni lineari. Inoltre, l'abilità chiave coinvolta nel quesito rafforza il senso del numero e la flessibilità nell'applicazione di strategie diverse in contesti proporzionali.

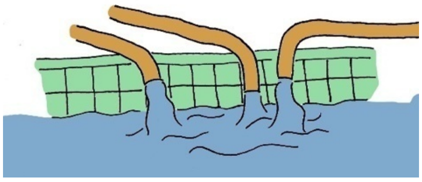
**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Gli studenti potrebbero utilizzare erroneamente il ragionamento additivo, ad esempio calcolando "$2\,kg \rightarrow 2{,}40$ €, quindi $5\,kg \rightarrow 2{,}40$ € $+$ 5 €" o compiendo altri passaggi simili, mostrando di non cogliere la struttura proporzionale sottostante al quesito. Altri potrebbero tentare di produrre un aumento in scala per 2 e poi eseguire un'addizione (per esempio, $2\,kg \rightarrow 2{,}40$ €, $4\,kg \rightarrow 4{,}80$ €; $4{,}80$€ $+ 1$ € $= 5{,}80$ €, considerando la

quantità mancante come se fosse il prezzo mancante), il che può riflettere un uso parziale della strategia, ma con ricaduta nel ragionamento additivo. Alcuni studenti potrebbero fornire una risposta considerando semplicemente un prezzo che appare plausibile, il che dimostra una familiarità con il contesto quotidiano, ma una mancanza o debolezza nel ragionamento quantitativo. Gli errori possono anche derivare da calcoli imprecisi o da errori nella divisione (per esempio, dividendo $5$ per $2{,}40$ invece che viceversa). Questi modelli indicano lacune nella logica di rapporti in scala, nella comprensione del prezzo unitario o nell'interpretazione delle quantità nel contesto reale.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

Il supporto dovrebbe concentrarsi sulla costruzione di una solida comprensione intuitiva e procedurale della proporzionalità. L'uso di tabelle che riportino i rapporti e permettano di confrontarli in maniera agevole, permette agli studenti di visualizzare le relazioni e di comprendere la regolarità che segue l'aumento graduale delle quantità. L'insegnante può proporre domande guida come: "Quanto costa 1 kg?" o "Che cosa succede se ne compri il doppio?". Incoraggiare l'uso di strategie multiple, come il prezzo unitario, l'impostazione della proporzione e la variazione in scala per passi successivi, aiuta gli studenti a sviluppare flessibilità e ad abituarsi al controllo degli errori. Collegare problemi di questo tipo a esperienze di acquisto reali può inoltre rafforzare il coinvolgimento e supportare il significato attribuito al quesito.

# Quesito 2.2: Risolvere un problema di proporzionalità inversa in contesto reale



Una piscina può essere riempita in 6 ore usando 4 rubinetti d'acqua dello stesso tipo.

Quanti rubinetti di questo tipo servono per riempire la stessa piscina in 2 ore?

**Soluzione**

La soluzione si basa sul ragionamento proporzionale: poiché quattro rubinetti riempiono la piscina in 6 ore, ciascun rubinetto riempie un quarto di piscina in sei ore e un dodicesimo in due ore. Ne consegue che sono necessari 12 rubinetti per riempire la piscina in 2 ore.

Per sostenere il ragionamento passo dopo passo, questa soluzione può essere presentata in notazione semi-simbolica:

$$4\ rubinetti\ riempiono\ 1\ piscina\ in\ 6\ ore$$

$$1\ rubinetto\ riempie\ 1/4\ di\ piscina\ in\ 6\ ore$$

$$1\ rubinetto\ riempie\ 1/12\ di\ piscina\ in\ 2\ ore$$

$$12\ rubinetti\ riempiono\ 1\ piscina\ in\ 2\ ore$$

Un ragionamento analogo, che espliciti le relazioni tra le quantità, può aiutare a comprendere meglio le operazioni sottostanti al ragionamento e il fatto che il volume dell'acqua aggiunta è proporzionale al prodotto $(nrumero\ di\ rubinetti) \cdot (tempo)$. Sappiamo che (ignorando le unità di misura):

$$4\ rubinetti\ \cdot\ 6\ ore\ =\ 1\ piscina$$

$$1\ rubinetto\ \cdot\ 6\ ore\ =\ \frac{1}{4}\ di\ piscina$$

$$1\ rubinetto\ \cdot\ 2\ ore\ =\ \frac{1}{12}\ di\ piscina$$

$$12\ rubinetti\ \cdot\ 2\ ore\ =\ 1\ piscina$$

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo problema propone uno scenario reale in cui gli studenti devono comprendere la relazione proporzionale tra tempo e quantità. In particolare, a partire dal fatto che quattro rubinetti identici riempiono una piscina in 6 ore, si pone la domanda: quanti rubinetti sono necessari per riempire la stessa piscina in sole 2 ore? Per risolvere il problema, gli studenti devono riconoscere che più rapidamente il lavoro deve essere completato, maggiore deve essere il numero dei rubinetti. Si è quindi di fronte a un caso di proporzionalità inversa, in cui l'aumento di una grandezza comporta la diminuzione dell'altra, tenendo conto che il prodotto tra le misure corrispondenti delle grandezze rimane costante. Una strategia valida e accessibile consiste nell'organizzare i valori noti e quelli richiesti in una tabella.

| Numero di rubinetti | Tempo (in ore) |
|---|---|
| 4 | 6 |
| ? | 2 |

A questo punto, gli studenti possono riconoscere che, poiché il tempo viene diviso per $3$ (da $6$ a $2$ ore), il numero di rubinetti deve essere moltiplicato per $3$, arrivando così a: $4 \cdot 3 = 12$ rubinetti.

Questa strategia mette in evidenza il pensiero relazionale sottostante e favorisce un approccio al ragionamento proporzionale senza ricorrere a formule o algoritmi di risoluzione legate alle proporzioni.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
La capacità di comprendere le relazioni in cui le quantità interagiscono variando in direzioni opposte è un aspetto fondamentale del pensiero moltiplicativo flessibile. A differenza della relazione di proporzionalità diretta, la relazione di proporzionalità inversa richiede una presa di coscienza della struttura sottostante che è meno intuitiva, poiché coinvolge due variazioni contrapposte delle grandezze. Secondo il framework teorico del Progetto DiToM, padroneggiare questo aspetto aiuta gli studenti ad ampliare il proprio ragionamento quantitativo e a prepararsi ad affrontare argomenti tipici nel mercato del lavoro, i tassi di crescita o decrescita e il pensiero funzionale in generale. Situazioni come questa sviluppano anche le abilità degli studenti nel modellizzare e comprendere le relazioni del mondo reale mediante strumenti matematici.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Alcuni studenti potrebbero interpretare erroneamente lo scenario come un caso di proporzionalità diretta, supponendo che ridurre il tempo significhi ridurre anche il numero di rubinetti e arrivando così a risposte errate come $1$ o $2$ rubinetti. Altri ancora potrebbero applicare strategie aritmetiche in modo incoerente o invertire la proporzionalità, diminuendo il numero di rubinetti, invece di aumentarlo. Un errore frequente è quello di trattare la situazione in modo additivo piuttosto che moltiplicativo (per esempio: "è $4$ in meno di $6$, quindi sottraggo $4$ rubinetti"). Questi errori indicano una scarsa familiarità con le strutture inverse e con il ruolo della riduzione/ aumento in scala in direzioni opposte.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
L'insegnante può ricorrere a modelli visivi o esempi concreti che mostrino come più persone o dispositivi che lavorano insieme possano completare un compito più rapidamente. L'uso di tabelle strutturate come quella mostrata in precedenza, aiutano a rendere esplicite le relazioni moltiplicative. È utile anche proporre domande guidate, come: "Che cosa succede se devi finire in metà tempo?" o "Come cambia il tempo quando raddoppi il numero di rubinetti?". Offrire quesiti a confronto, uno diretto e uno inverso, può aiutare a mettere in evidenza le differenze strutturali. Incoraggiare gli studenti a spiegare ad alta voce il proprio ragionamento o a confrontare i diversi percorsi di soluzione può rafforzare la loro comprensione.

# Quesito 2.3: Identificare le relazioni di proporzionalità nelle rappresentazioni tabellari

Per ciascuna tabella, decidi se il prezzo pagato è direttamente proporzionale o non proporzionale al numero di dolci.

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

a) Tabella 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| Numero di dolci | 1 | 2 | 5 |
| Prezzo | 5 | 10 | 50 |

□ direttamente proporzionale
☑ non proporzionale

b) Tabella 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| Numero di dolci | 10 | 20 | 30 |
| Prezzo | 34 | 54 | 64 |

□ direttamente proporzionale
☑ non proporzionale

c) Tabella 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| Numero di dolci | 1 | 5 | 9 |
| Prezzo | 3 | 15 | 27 |

☑ direttamente proporzionale
□ non proporzionale

**Soluzione**

Due strategie comuni per identificare la proporzionalità diretta tra due variabili sono quelle descritte di seguito.

Strategia 1. Quando si confrontano due dei tre rapporti (ad esempio, nella Tabella 1 ( $1:5$ e $2:10$)), si nota se le variabili variano secondo lo stesso fattore (in questo caso 2). Tuttavia, confrontando i rapporti $1:5$ e $5:50$, si nota che le variabili variano in base a fattori diversi: 5 e 10. Pertanto, la Tabella 1 non rappresenta una relazione proporzionale.

Strategia 2. In ogni proporzione, il quoziente $\frac{\text{prezzo}}{\text{numero di dolci}}$ dovrebbe essere lo stesso (ad esempio, $\frac{5}{1} = \frac{10}{2}$ oppure $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, a seconda di quale delle due grandezze si pone al numeratore). In questo quesito, il quoziente prezzo/numero di dolci può essere interpretato come il prezzo per dolce. Nella Tabella 1, il prezzo per dolce è $5:1 = 5$; $10:2 = 5$; $50:5 = 10$, a seconda di quanti dolci si acquistano. Pertanto, la Tabella 1 non rappresenta una relazione proporzionale.

Tabella 1, strategia 1 rappresentata in forma tabellare:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| fattore | | 2 | | 2,5 | |
| dolci | 1 | | 2 | | 5 |
| prezzo | 5 | | 10 | | 50 |
| fattore | | 2 | | 5 | |

Non va bene

Tabella 1, strategia 2 rappresentata in forma tabellare:

| | | | |
|---|---|---|---|
| dolci | 1 | 2 | 5 |
| prezzo | 5 | 10 | 50 |
| quoziente | 5 | 5 | 10 |

Non va bene perché prezzi diversi: 5, 5, 10 per dolce

Dalla Tabella $2$ si evince facilmente che i rapporti $11:1$ e 12:2 non sono uguali. Pertanto, non è necessario procedere oltre per concludere che le variabili non seguono una legge di relazione di proporzionalità.

Nella Tabella $3$, il prezzo unitario è $3$ per ciascuno dei rapporti, pertanto le variabili sono direttamente proporzionali.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di analizzare dati rappresentati in una tabella per determinare se esiste una relazione proporzionale tra le grandezze rappresentate. In ciascuna delle tre tabelle, gli studenti devono verificare se la relazione tra i numeri nelle colonne possa essere ricondotta a un fattore moltiplicativo costante, caratteristica distintiva della proporzionalità diretta. Gli studenti devono segnare con una croce se la tabella rappresenta una relazione di proporzionalità diretta.

Per risolvere con successo questo quesito, si possono seguire strategie risolutive anche diverse da quelle presentate in precedenza:

- verificare se i quozienti tra le misure corrispondenti delle due grandezze (quindi, ad esempio $y : x$) sono costanti in tutte le righe;
- controllare se il prodotto dei termini medi è uguale al prodotto dei termini esterni;
- verificare se le misure di una grandezza si ottengono moltiplicando quelle dell'altra per lo stesso fattore, ad esempio "$moltiplicare\ per\ 3$" o "$raddoppiare$".

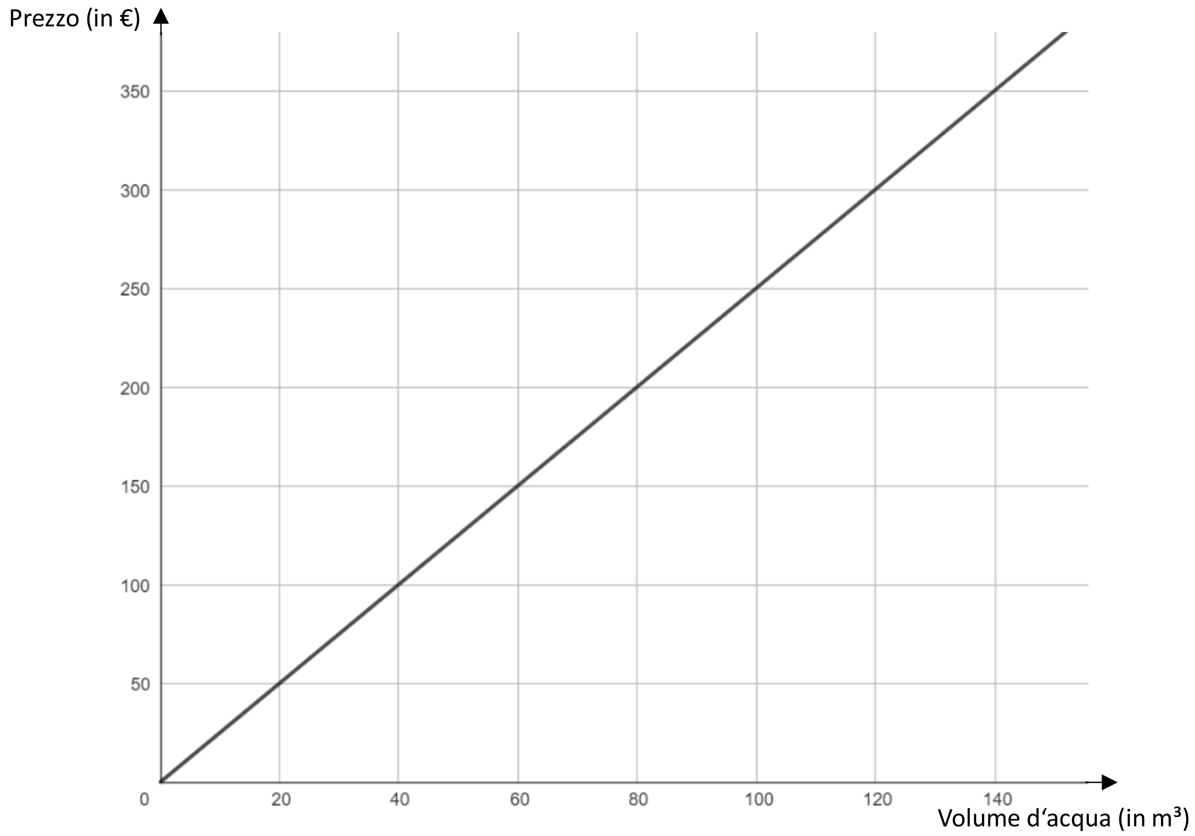
**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Comprendere le caratteristiche delle relazioni proporzionali è essenziale per il pensiero funzionale e algebrico. All'interno del quadro teorico del Progetto DiToM, questo quesito valuta lo sviluppo del ragionamento relazionale, in particolare il riconoscimento della struttura dei dati. La capacità di determinare se una relazione è proporzionale è fondamentale per comprendere le caratteristiche delle funzioni lineari, i problemi di scala e le rappresentazioni grafiche di fenomeni che rappresentano relazioni di proporzionalità. Viene inoltre valutata la flessibilità nel lavorare con diverse rappresentazioni: tabelle, grafici, descrizioni verbali ed equazioni.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Alcuni studenti potrebbero considerare le relazioni come proporzionali basandosi su variazioni generiche (ad esempio, "entrambi i numeri aumentano"), senza verificare la costanza del rapporto. Altri studenti potrebbero confrontare le differenze assolute anziché i rapporti, confondendo il ragionamento additivo con quello moltiplicativo. Per esempio, se entrambi i valori aumentano di 2, gli studenti potrebbero erroneamente concludere che si tratti di una relazione di proporzionalità. Gli errori possono anche derivare da calcoli imprecisi, come divisioni errate o effettuate tra valori non corrispondenti. Questi schemi riflettono abilità ancora poco sviluppate nel ragionamento moltiplicativo, nell'interpretazione dei tassi di variazione e nella generalizzazione simbolica. In alcuni casi, gli studenti potrebbero rispondere a caso, evitando l'analisi. Queste tendenze evidenziano la necessità di strategie di strutturazione più solide e di maggiore sicurezza nella verifica.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Un supporto efficace prevede la fornitura agli studenti di strumenti per verificare sistematicamente la proporzionalità, quali il calcolo dei rapporti riga per riga, l'analisi del tasso unitario o ausili visivi come le doppie linee numeriche. Gli insegnanti possono mostrare agli studenti come spiegare i risultati verbalmente ("Poiché $6 : 2 = 3$ e $9 : 3 = 3$, il rapporto è costante") e incoraggiarli a utilizzare delle checklist per l'analisi delle tabelle. Le attività di discussione a coppie, in cui gli studenti devono stabilire se una tabella rappresenta una relazione proporzionale, possono approfondire il ragionamento. Collegare le tabelle a scenari proporzionali reali (per esempio ricette, prezzi, velocità) aiuta a consolidare la comprensione e a trasferire le abilità a nuovi contesti.

# Quesito 2.4: Leggere grafici e identificare dati in un contesto di proporzionalità diretta

Sul grafico è riportata sull'asse $x$ la quantità di acqua (in $m^3$) e sull'asse $y$ il prezzo (in €).




a) Determina quanti $m^3$ d'acqua si ottengono per 200 €.

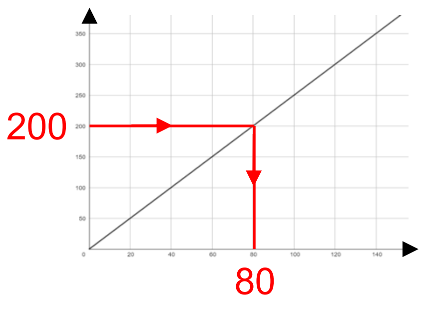
Risposta: *80* m³

b) Qual è il prezzo di 300 $m^3$ d'acqua?

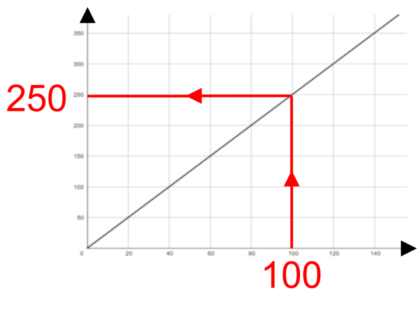
Risposta: *750* €

**Soluzioni**

a)




b) lettura dei valori nel grafico e ridimensionamento



Per rispondere al quesito b), si può osservare che $100\ m^3$ costano $250$ euro, proseguendo poi nel constatare che $300$ m³ costano 3 volte tanto rispetto a 100 m³ e concludendo che $300$ m³ costano $750$ euro:

$3 \cdot 250 = 750$ euro.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito, composto da due item, valuta la capacità degli studenti di interpretare e leggere il grafico di una relazione di proporzionalità diretta. L'item a) richiede di leggere un valore direttamente dal grafico: il numero di metri cubi d'acqua che si possono ottenere con $200$ €. Nell'item b), lo studente deve determinare il prezzo per $300$ m³ d'acqua, un valore al di fuori dell'intervallo visibile del grafico, e quindi calcolare il risultato sulla base della variazione osservata nel grafico. L'abilità chiave consiste nel saper collegare la rappresentazione grafica al ragionamento proporzionale sottostante e nel saper distinguere la lettura del grafico dall'estrapolazione basata sul modello.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Saper leggere e interpretare grafici è una competenza matematica fondamentale. Questo quesito crea un ponte tra l'interpretazione visiva dei dati e il pensiero funzionale. Secondo il framework del Progetto DiToM, l'abilità base in esso coinvolta è necessaria per comprendere la pendenza come rapporto, usare il grafico come strumento decisionale, tradurre tra rappresentazioni grafiche, numeriche e verbali. Inoltre, essa sostiene le competenze di modellizzazione matematica, in particolare nel riconoscere quando è necessario estendere i dati tramite il ragionamento proporzionale piuttosto che tramite stime.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Nell'item a), gli studenti potrebbero commettere errori nella lettura dei valori sugli assi (per esempio, commettendo errori di allineamento dei valori) o interpolare in modo errato tra i punti. Se non comprendono che il grafico rappresenta una relazione continua, potrebbero fare riferimento solo ai valori indicati sulla griglia e ignorare quelli intermedi. Nell'item b), alcuni studenti potrebbero provare a estrapolare i dati anche se il grafico termina in corrispondenza di $140$ m³, producendo così risposte imprecise o basate su stime infondate. Altri ancora potrebbero non riconoscere la struttura lineare e adottare strategie non pertinenti. Un errore tipico è anche quello di interpretare in modo errato la pendenza, per esempio ritenendo che aumenti in modo non lineare o che cambi in modo imprevedibile oltre il campo visibile. Queste difficoltà possono riflettere lacune nella comprensione del concetto di variazione proporzionale, dell'estrapolazione lineare o delle convenzioni di lettura dei grafici (come la scala uniforme e l'allineamento delle linee della griglia).

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Un supporto mirato dovrebbe partire da esercizi guidati di lettura dei grafici che aiutino gli studenti a posizionare correttamente i valori su entrambi gli assi, a riconoscere i rapporti costanti e a utilizzare righelli o strumenti di tracciamento per mantenere l'orientamento. Per quanto riguarda l'estrapolazione (item b), l'insegnamento dovrebbe concentrarsi su come determinare il tasso unitario dal grafico (per esempio, $1$ € per m³ o $5$ € ogni $20$ m³) e poi estendere tale relazione direttamente attraverso i calcoli o tramite una tabella. L'insegnante può anche incoraggiare gli studenti a esprimere a parole ciò che il grafico rappresenta (per esempio, "per ogni $20$ metri cubi, il costo aumenta di $50$ €"), rafforzando così il collegamento tra rappresentazione verbale, numerica e visiva. Confrontare il grafico con la corrispondente equazione o tabella dei rapporti rafforza inoltre un accesso flessibile alla struttura sottostante.

# Quesito 2.5: Risolvere un problema di divisione in contesto reale

In un serbatoio ci sono 810 litri d'acqua.
Ogni giorno vengono prelevati 30 litri d'acqua dal serbatoio.

Dopo quanti giorni il serbatoio sarà vuoto?

Risposta: ___27___ giorni.

**Soluzioni**

La rimozione giornaliera di 30 litri porta a un totale di $30 \times n$ litri rimossi dopo $n$ giorni.

Prima soluzione, basata sulla divisione: il numero di giorni necessari può essere espresso come

$$\frac{810}{30} = \frac{81}{3} = 27$$

Seconda soluzione, basata sulla moltiplicazione, qui rappresentata in una tabella:

| numero di giorni | 1 | 10 | 20 | 7 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|
| Volume (litri) | 30 | 300 | 600 | 210 | 810 |

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito valuta la capacità di risolvere un problema di divisione in un contesto reale, in cui una quantità totale di 810 litri d'acqua viene consumata a un ritmo costante di 30 litri al giorno. La domanda è: quanti prelievi giornalieri uguali sono necessari affinché il serbatoio si svuoti completamente? Ciò implica interpretare la divisione come "quante volte 30 sta in 810" o, in modo equivalente:

$$810 \ : \ 30 \ = \ 27 \text{ giorni}$$

Questa interpretazione richiede la comprensione della divisione come sottrazione ripetuta o della moltiplicazione come addizione ripetuta e la capacità di tradurre un processo reale in un'operazione simbolica.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
All'interno del quadro DiToM, questo quesito valuta lo sviluppo di abilità fondamentali nel ragionamento moltiplicativo, nel pensiero funzionale e nella strutturazione algebrica di base. Gli studenti devono identificare la regolarità sottostante ("30 litri al giorno") ed estenderla attraverso un processo ripetuto. In questo modo si rafforza la comprensione del concetto di rapporto, di modellizzazione nonché l'interpretazione della divisione in contesti non orientati alla procedura. Questo tipo di ragionamento è alla base dell'apprendimento successivo delle funzioni lineari, degli schemi di crescita e delle equazioni differenziali.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Molti studenti affrontano il problema con strategie valide, ma commettendo errori di conteggio o errori di calcolo, oppure affidandosi a una stima:

- uso della sottrazione ripetuta: sottrarre 30 da 810 più volte e contare i passaggi, commettendo errori di conteggio
- uso dell'addizione ripetuta: aggiungere 30 tante volte quanto è necessario per raggiungere 810, poi contare i passaggi, commettendo errori di conteggio;

- divisione con errori di calcolo: dividere $810$ per $30$ commettendo errori di calcolo;
- stima approssimativa: fornire risposte apparentemente plausibili come $30$ o $25$, basandosi su delle stime.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

Il supporto didattico dovrebbe aiutare gli studenti a costruire un modello mentale coerente di suddivisione nel tempo. Strumenti visivi come barre suddivise in parti uguali o la retta dei numeri possono aiutare a comprendere meglio. L'insegnante potrebbe incoraggiare gli studenti a rappresentare la situazione verbalmente, esplicitando la divisione e a spiegare il significato di ciascun numero coinvolto nell'operazione. Collegare il problema a routine quotidiane (come il consumo d'acqua giornaliero, le porzioni dei pasti o il budget distribuito nei giorni) può aumentare la familiarità con problemi analoghi, supportando la costruzione di schemi operatori. Sottolineare i raggruppamenti strategici, come la suddivisione in blocchi di 10 giorni ($10 \times 30 = 300$), può favorire un ragionamento più efficace e un migliore controllo delle stime.

# Quesito 2.6: Combinare costi fissi e variabili in un contesto quotidiano

Paolo ha invitato 15 amici alla sua festa di compleanno.
Deve pagare 50 € per il noleggio della sala e 10 € per ogni amico invitato.

Quanto deve pagare Paolo in totale per la sua festa di compleanno?

Risposta: 200 €.

**Soluzione**

Paolo deve pagare 50 euro per l'affitto della sala, come costo fisso iniziale.

Inoltre, Paolo deve pagare 10 euro per ciascuno dei suoi 15 amici invitati. Questo comporta un costo aggiuntivo di $15 \times 10 = 150$ euro.

Il costo totale è quindi $50 + 150 = 200$ euro.

**Abilità chiave valutata da questo quesito**
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di applicare la modellizzazione algebrica di base e le operazioni aritmetiche in un contesto reale che prevede costi fissi e variabili. Viene fornita l'informazione che Paolo spende 50 € per la sala e, in più, 10 € per ogni amico invitato. Si chiede di determinare il costo totale della festa di compleanno.

La strategia attesa è:

calcolare il costo variabile: $15\, persone \times 10€ = 150€$;

aggiungere il costo fisso: $150€ + 50€ = 200€\, costo\ totale$.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Questo quesito valuta il possesso delle basi del pensiero funzionale e pre-algebrico, in particolare nel contesto di un modello lineare. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, le abilità collegate al quesito sostengono lo sviluppo delle competenze di modellizzazione matematica, della fluidità operativa e dell'interpretazione di espressioni simboliche in contesti applicativi. Comprendere la distinzione tra componenti fisse e variabili è fondamentale in molti contesti reali, come la gestione dei budget, la determinazione dei prezzi e la pianificazione delle risorse. Inoltre, la risoluzione di quesiti come il presente rafforza la capacità degli studenti di strutturare i problemi in più passaggi, una caratteristica fondamentale per la risoluzione di problemi matematici più complessi.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Un errore comune è quello di prendere in considerazione solo il costo variabile, tralasciando quello fisso. Questo rivela una comprensione parziale della struttura del problema, in cui viene presa in considerazione solo una componente (spesso quella più immediata da considerare in riferimento a quantità prodotte). Altri studenti potrebbero invertire i passaggi (ad esempio, sottrarre 50 € da 150 €), mostrando di fraintendere il ruolo delle quantità nel contesto. Altri studenti ancora potrebbero moltiplicare erroneamente tutti i valori tra loro o eseguire operazioni a caso, rivelando una mancanza di comprensione del contesto del problema. In particolare, tali errori possono essere dovuti alla difficoltà di concatenare correttamente i passaggi nei quesiti a più fasi, di collegare le quantità reali alle operazioni e di integrare le diverse componenti numeriche in una soluzione coerente.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
L'insegnante potrebbe supportare gli studenti strutturando visivamente il problema, per esempio utilizzando una tabella con due righe, una per il costo fisso e una per il costo variabile, o rappresentando il costo totale come una barra divisa in due parti. Inoltre, potrebbe risultare utile proporre lo schema "$totale = fisso + variabile$" in

contesti diversi per favorire la familiarizzazione con i modelli lineari e supportare la costruzione di un modello adeguato a tali contesti.

Inoltre, invitare gli studenti a rileggere la domanda e a verificare che la loro risposta includa tutti i costi favorisce il controllo metacognitivo. Proporre problemi in cui prima si separa il costo fisso da quello variabile e poi si uniscono i due costi può aiutare a comprendere il processo passo dopo passo. Infine, è utile verbalizzare la situazione (per esempio: “deve pagare $50$ € comunque, più $10$ € per ogni invitato”), al fine di dare significato alla relazione tra struttura matematica e linguaggio usato per descriverla.

# Quesito 3.1: Convertire una frazione in percentuale

Qual è la percentuale che corrisponde alla frazione $\frac{3}{5}$ ?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

- ☐ 0,6%
- ☐ 6%
- ☐ 35%
- ☑ 60%

**Soluzioni**

Prima soluzione, utilizzando un fatto numerico noto:

$$\frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%, \text{ quindi } \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot 20\% = 60\%$$

Seconda soluzione, tramite il ricorso a una frazione equivalente:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Terza soluzione, basata sulla divisione:

$$\frac{3}{5} = \frac{3{,}0}{5} = 0{,}6 = 0{,}60 = 60\%$$

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di convertire una frazione (tre quinti) in una percentuale. Per risolverlo, gli studenti devono comprendere la relazione tra frazioni e percentuali e riconoscere che:

$$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$$

$$\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Ciò implica sia la conversione della frazione in numero decimale (dividendo il numeratore per il denominatore), sia l'applicazione delle equivalenze note tra frazioni e percentuali. Il quesito richiede quindi sia un'abilità di calcolo sia la comprensione concettuale delle rappresentazioni proporzionali.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
La conversione tra frazioni, numeri decimali e percentuali è fondamentale in molti contesti della vita reale, come l'interpretazione di statistiche, sconti o confronti di dati. All'interno del quadro del Progetto DiToM, questa abilità sostiene la comprensione dei numeri razionali, la flessibilità nell'uso dei numeri e la traduzione simbolica. Essa prepara gli studenti ad affrontare quesiti che coinvolgono l'aumento percentuale, i confronti e il ragionamento proporzionale in algebra e nella lettura dei dati. Riuscire a passare da una rappresentazione all'altra dello stesso oggetto matematico è un'abilità essenziale in tutti gli ambiti della matematica.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Alcuni studenti potrebbero confondere la frazione con il numero decimale oppure, all'interno della frazione, i ruoli di numeratore e denominatore.

Si potrebbe quindi verificare che:

- selezionino 0,6%, il che suggerisce che 0,6 sia stato interpretato come se fosse una percentuale;
- scelgano 6%, il che suggerisce uno “spostamento” scorretto della virgola.
- interpretino la frazione $\frac{3}{5}$ come 35%, basandosi su aspetti puramente visivi e privi di significato matematico.

Questi errori indicano carenze nell’interpretazione del concetto di “per cento”; essi rivelano la necessità di rafforzare la comprensione del collegamento tra le frazioni e la scala in centesimi delle percentuali.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
L’insegnante potrebbe aiutare gli studenti a utilizzare modelli visivi, come ad esempio le griglie con $100$ punti o gli aerogrammi (“diagrammi a torta”) o i modelli rettangolari, per mostrare come una frazione, per esempio $\frac{3}{5}$, corrisponda a $60$ punti colorati su $100$ o a $60$ quadratini su $100$. Attività strutturate che prevedono la conversione delle frazioni più comuni (come $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$) in percentuali possono aumentare la familiarità con i concetti e consolidare la loro comprensione.

Incoraggiare gli studenti a convertire prima la frazione in numero decimale e poi a moltiplicare per $100$ può essere una strategia utile perché richiama il significato del “per cento” delle percentuali. La retta dei numeri e le barre rettangolari usate per rappresentare le percentuali possono rafforzare ulteriormente l’idea di rappresentazioni equivalenti. Le verbalizzazioni del tipo “tre su cinque equivale a quanti su 100?” aiutano a consolidare il pensiero proporzionale.

# Quesito 3.2: Calcolare un aumento percentuale

Il numero $30$ viene aumentato del $50\%$. Qual è il risultato di questo calcolo?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

- ☐ $80$
- ☑ $45$
- ☐ $35$
- ☐ $15$

**Soluzioni**

Prima soluzione, basata sull'interpretazione di 50% come "la metà": l'aumento è la metà di 30, cioè 15. Il risultato dopo aver aumentato $30$ di $15$ è $30 + 15 = 45$.

Più formalmente, con la divisione:

$$50\% \text{ di } 30 = \frac{30}{2} = 15 \qquad \text{Totale: } 30 + 15 = 45.$$

Seconda soluzione, basata sul calcolo dell'aumento del 50% tramite moltiplicazione; l'aumento è:

$$50\% \text{ di } 30 = 0{,}50 \cdot 30 = 5 \cdot 3 = 15 \qquad \text{Totale: } 30 + 15 = 45.$$

Terza soluzione, basata sull'interpretazione del risultato come il $150\%$ di $30$:

$$150\% \text{ di } 30 = 1{,}50 \cdot 30 = 15 \cdot 3 = 45$$

**Abilità chiave valutata con questo quesito**

Questo quesito valuta la capacità degli studenti di interpretare e applicare correttamente un aumento percentuale a un valore di base dato. Il valore iniziale è $30$ e viene chiesto di aumentarlo del $50\%$. Per fornire la soluzione corretta, gli studenti devono determinare il $50\%$ di $30$ e poi aggiungerlo alla quantità iniziale.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**

La capacità di calcolare e interpretare gli aumenti percentuali è una competenza essenziale sia nella vita di tutti i giorni sia nei contesti matematici. È fondamentale per comprendere le variazioni di prezzo, la crescita di una popolazione, gli interessi finanziari e i confronti statistici. Secondo il quadro di riferimento del Progetto DiToM, il ragionamento sulle percentuali sostiene lo sviluppo del pensiero funzionale, del ragionamento proporzionale e dell'integrazione di strutture moltiplicative in diversi contesti. Quesiti di questo tipo rafforzano la flessibilità nel passare da un'interpretazione additiva a una moltiplicativa della percentuale e contribuiscono alla capacità di generalizzazione e applicazione di ragionamenti strutturali a problemi sempre più astratti.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**

Una concezione errata comune osservata nelle risposte degli studenti è la confusione tra valori assoluti e valori percentuali relativi. Alcuni studenti potrebbero erroneamente aggiungere $50$ a $30$ invece che il $50\%$ di $30$, ottenendo così come risposta errata $80$. Questo indica una comprensione non corretta della natura fondamentale della percentuale come misura relativa. Altri studenti potrebbero scegliere $15$ come risposta, interpretando erroneamente il quesito come una richiesta di determinare il $50\%$ di $30$, anziché di calcolare il valore totale, comprensivo dell'aumento. Altri studenti ancora potrebbero scegliere come risposta $35$ a causa di errori di calcolo o di stima durante il calcolo mentale. È anche possibile che alcuni studenti leggano o interpretino in modo errato il testo del problema, assumendo che sia un quesito che chieda di determinare la differenza, oppure che si affidino all'intuizione piuttosto che a calcoli. Tali risposte rivelano lacune nella comprensione concettuale, nella padronanza delle procedure di calcolo e nella comprensione del testo. Altre cause potrebbero essere legate a una mancata interiorizzazione delle operazioni con le percentuali come processi moltiplicativi scalabili e alla necessità di una maggiore chiarezza nella distinzione tra parte, intero e tasso di crescita.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

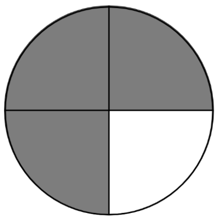
L'insegnante potrebbe fornire supporto proponendo situazioni reali in cui gli aumenti percentuali si verificano naturalmente, come l'aumento dei prezzi, gli aumenti salariali o la crescita della popolazione, radicando così i concetti astratti in esempi concreti che possono supportare il controllo semantico della plausibilità dei risultati. Strumenti visivi come le barre percentuali o la doppia retta dei numeri, che consentono di mettere a confronto le quantità coinvolte, possono aiutare gli studenti a visualizzare come un aumento del 50% agisce sulla quantità iniziale.

Può essere inoltre utile richiamare esplicitamente l'attenzione sulla distinzione tra base, percentuale e risultato all'interno di una struttura operatoria chiara, supportata da esempi, al fine di prevenire confusioni e rafforzare la comprensione. Infine, l'uso di strategie additive (ad esempio, "trova il 50% e poi aggiungi") e moltiplicative (ad esempio, "moltiplicata per 1,5") e l'incoraggiamento a verificare i risultati tramite stime possono risultare utili a promuovere una maggiore flessibilità nella scelta delle strategie.

# Quesito 3.3: Interpretare rappresentazioni di frazioni nel modello circolare e convertirle in percentuali

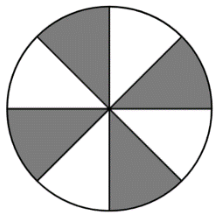
Esprimi la parte colorata in ciascun cerchio sotto forma di percentuale.

a)



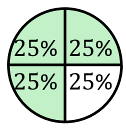
Parte colorata del cerchio: 75 %

b)



Parte colorata del cerchio: 50 %

**Soluzione**




a) Ciascuna delle quattro parti rappresenta il 25% del cerchio.
Quindi 3 parti corrispondono a $3 \cdot 25\% = 75\%$ del cerchio.
Questo ragionamento può essere supportato disegnando una figura come quella accanto.

b) Ciascuna delle otto parti rappresenta il 12,5% del cerchio (la metà di 25%).
Quindi 4 parti corrispondono a $4 \cdot 12{,}5\% = 50\%$ del cerchio.

Un altro modo per risolvere il problema è interpretare la parte colorata come composta da 4 degli 8 settori circolari, cioè "spicchi". Di conseguenza, la parte colorata è formata da 4 settori circolari su un totale di 8, il che porta direttamente all'interpretazione "metà" = 50%, oppure al calcolo:

$$\frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2} = 50\%, \text{oppure, analogamente } \frac{4}{8} = \frac{(4 \cdot 1)}{(4 \cdot 2)} = \frac{1}{2} = 50\%$$

La risposta 50% può essere ottenuta anche riordinando i quattro "spicchi" in modo che la "metà" risulti più evidente.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**

Il quesito valuta la capacità degli studenti di interpretare le parti di un intero a partire da una rappresentazione grafica, in questo caso un cerchio suddiviso in settori congruenti, e di convertire la frazione rappresentata in percentuale. Il quesito è suddiviso in due parti:

Nell'item a) viene mostrato un cerchio diviso in quattro settori congruenti, di cui tre sono colorati.

Nell'item b) viene proposto un cerchio suddiviso in otto settori congruenti, di cui uno su due è colorato, per un totale di quattro settori colorati su otto.

In entrambi i casi, la soluzione corretta richiede di riconoscere la frazione del cerchio colorata e di convertirla in percentuale. Si tratta quindi di tradurre le quantità rappresentate graficamente in frazioni e successivamente in percentuali, oppure di riconoscere direttamente la percentuale nella rappresentazione grafica, se già automatizzata, dimostrando di saper passare con dimestichezza da una rappresentazione all'altra.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**

La capacità di compiere conversioni tra rappresentazioni fornite nel registro grafico e aritmetico, sotto forma di frazioni e percentuali, è una competenza fondamentale nell'ambito dell'educazione matematica. Essa favorisce una comprensione più profonda delle relazioni parte-tutto, del ragionamento proporzionale e delle stime. Secondo il quadro teorico del Progetto DiToM, i quesiti di questo tipo rafforzano la flessibilità concettuale e la capacità di collegare diverse rappresentazioni, una caratteristica fondamentale dell'alfabetizzazione matematica. Questa competenza è inoltre di grande rilevanza nella vita quotidiana, per esempio nell'interpretazione di grafici, indagini statistiche e nella lettura dei dati, dove le relazioni parte-tutto sono spesso rappresentate visivamente ed espresse in forma percentuale.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Un errore comune riscontrato in entrambe le parti del quesito consiste nell'individuare il numero di parti colorate, ma poi riportano tale numero come percentuale. Per esempio, nell'item a), alcuni studenti potrebbero rispondere "tre" perché tre parti su quattro sono colorate, confondendo la frequenza assoluta con la percentuale corrispondente. In modo analogo, nell'item b), gli studenti potrebbero scrivere "$4$" perché quattro degli otto settori sono colorati, senza però fare riferimento alla frazione $\frac{4}{8}$ e alla sua rappresentazione percentuale. Questi errori riflettono una mancanza di comprensione della percentuale come misura che mette in relazione due quantità oppure una lettura non accurata della consegna stessa. Un altro errore che si presenta di frequente consiste nel non riconoscere la regolarità nella rappresentazione dell'item b), in quanto la colorazione alternata dei settori rende non immediatamente evidente che si tratta della "metà" della superficie colorata. Di conseguenza, alcuni studenti potrebbero sovrastimare o sottostimare la percentuale, giudicandola inferiore o superiore al $50\%$ a causa della disposizione dei settori nella rappresentazione. Questi errori indicano la necessità di rafforzare le competenze nel collegare rappresentazioni concrete e astratte, in particolare nel passaggio tra conteggi, frazioni e percentuali.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Per supportare gli studenti con difficoltà in questo quesito, l'insegnante potrebbe utilizzare rappresentazioni visive strutturate, come per esempio le griglie da $100$, areogrammi o barre frazionarie, che mostrino esplicitamente la relazione tra frazioni e percentuali. Potrebbe essere utile incoraggiare gli studenti a nominare prima la frazione (per esempio, "$3$ su $4$") e poi a tradurla in percentuale, aiutandoli a chiarire il passaggio intermedio. Potrebbe risultare anche utile iniziare con frazioni di riferimento note (per esempio $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$) e le loro percentuali corrispondenti. L'insegnante potrebbe guidare ad alta voce il ragionamento: "Ci sono quattro parti uguali e tre sono colorate. Quindi si tratta di tre quarti. Quanto vale tre quarti in percentuale?". Le attività che prevedono l'abbinamento di rappresentazioni grafiche, frazioni, numeri decimali e percentuali rafforzano la comprensione trasversale.

# Quesito 3.4: Calcolo con i numeri interi

Calcola e scrivi il risultato sulla riga vuota.

a) $12 - (-5) = \underline{\ 17\ }$

b) $11 \cdot \underline{(-4)} = -44$

**Soluzione**

L'item a) può essere risolto ricordando che sottrarre un numero negativo equivale ad addizionare il numero positivo avente lo stesso valore assoluto. Sulla base di questo principio, il calcolo è il seguente:

$$12 - (-5) \ = \ 12 + 5 \ = \ 17$$

L'item b) può essere risolto notando innanzitutto che se il prodotto $(-44)$ è negativo e il primo fattore $(11)$ è positivo, la risposta all'item b) deve essere un numero negativo, il cui valore assoluto si ottiene completando la moltiplicazione $11 \cdot \_\_ = 44$ o eseguendo la divisione $44 : 11$, ottenendo come soluzione $4$. La risposta all'item b) è quindi $-4$.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Il quesito mira a valutare la capacità degli studenti di ragionare sugli effetti dell'addizione, della sottrazione e della moltiplicazione di numeri negativi. Richiede di calcolare il risultato considerando l'interpretazione corretta dei segni $(+ \ e \ -)$.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
Saper operare con i numeri negativi è fondamentale per padroneggiare non solo l'aritmetica più avanzata, ma anche l'algebra. Questo quesito richiede agli studenti di applicare "le regole" dei segni, sviluppando la capacità di manipolare mentalmente espressioni contenenti segni a partire dalla loro struttura e non eseguendo dei calcoli. All'interno del quadro del Progetto DiToM, questo quesito mira a valutare lo sviluppo del senso del simbolo e il ragionamento concettuale legato al concetto di somma algebrica, nonché la padronanza delle operazioni e degli ordini di grandezza. Tali abilità sono fondamentali per l'apprendimento matematico, soprattutto in riferimento alla flessibilità strutturale (il quesito richiede un'interpretazione del simbolo di uguaglianza in senso relazionale, una competenza essenziale in algebra) nonché alla gestione degli aspetti algebrico-operativi, elementi fondamentali per risolvere equazioni, comprendere il comportamento delle funzioni e valutare espressioni algebriche.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Nell'item a), molti studenti sottraggono erroneamente $5$ da $12$, interpretando in maniera errata il significato dei segni, senza distinguere il segno del numero da quello dell'operazione. Nell'item b), alcuni studenti potrebbero inserire un numero intero positivo senza considerare la regola dei segni per la moltiplicazione. Altri ancora potrebbero fornire risposte errate perché 17 è una risposta controintuitiva se si è guidati dalla misconcezione che la sottrazione diminuisce sempre. Questi errori indicano una mancata interiorizzazione del significato delle operazioni con i numeri negativi, soprattutto nei casi che richiedono di distinguere tra segno del numero e simbolo di operazione, ricorrendo a delle parentesi. Questi errori mostrano anche che gli studenti potrebbero non essere in grado di ragionare "a ritroso", cioè a partire dal risultato ed interpretando il simbolo di uguaglianza in senso relazionale, ma risultano ancora ancorati al suo senso procedurale.

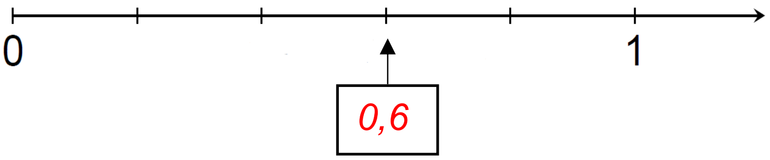
**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Gli studenti potrebbero trarre beneficio da esercizi che mettono esplicitamente a confronto le differenze nelle diverse combinazioni di segni $((+) \ e \ (+), (+) \ e \ (-), (-) \ e \ (+), (-) \ e \ (-))$, sia nelle operazioni di moltiplicazione e divisione, sia nell'addizione e sottrazione. A tale scopo si potrebbero usare rappresentazioni come la retta numerica o dei gettoni colorati diversamente sulle due facciate (ad esempio una facciata blu e una rossa), in maniera tale da rappresentare il segno associato alla quantità rappresentata. L'insegnante potrebbe

fornire supporto a livello linguistico, accompagnando il ragionamento con frasi del tipo: "Sottrarre un numero negativo è come…" e aiutare gli studenti a verbalizzare l'azione dell'operazione in maniera corretta. Un'altra strategia utile per interiorizzare le "regole dei segni" potrebbe essere quella di chiedere agli studenti di fornire loro stessi esempi in cui il cambio di segno produce risultati differenti. Per quesiti come quello dell'item b), potrebbe essere utile ragionare "a ritroso" sulla struttura della moltiplicazione ($fattore \times fattore = prodotto$), cioè partendo dal prodotto e risalendo ai fattori. Questo aiuta gli studenti a dedurre logicamente il segno mancante piuttosto che procedere per tentativi. In definitiva, il ricorso frequente a quesiti "inversi" che partono dal risultato per determinare gli input, può aiutare lo sviluppo delle abilità nel contesto dell'algebra.

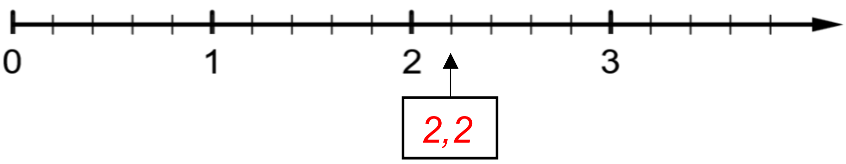
# Quesito 3.5: Identificare la posizione di numeri razionali sulla retta numerica

Scrivi nelle caselle i numeri che corrispondono alle posizioni evidenziate tramite la freccia.

a)




b)

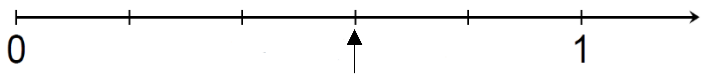



**Soluzioni**

Due possibili strategie:

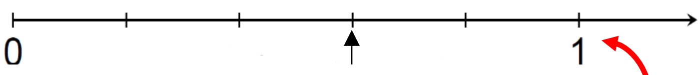
- contare il numero dei “passi”, cioè dei sotto-intervalli, da 0 a 1;
- procedere per tentativi ed errori con sequenze di numeri decimali (o frazioni) a partire da 0 e cercando di arrivare a 1.

Prima soluzione per l’item a): in dettaglio, la prima strategia può essere applicata contando cinque passi da 0 a 1.




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| numero passi: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| frazione: | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\boxed{\frac{3}{5}}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{5}$ |
| decimale: | 0,2 | 0,4 | $\boxed{0{,}6}$ | 0,8 | 1,0 |

Seconda soluzione: una prima opzione è tentare con 0,1 per la prima marcatura a destra dello zero, proseguendo con 0,2 per la seconda marcatura, 0,3 per la terza e così via, arrivando però a 0,5 invece che a 1 in corrispondenza dell’unità. Un secondo tentativo potrebbe iniziare con 0,2, consentendo di giungere alla soluzione corretta.




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| prova: | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
| correzione: | 0,2 | 0,4 | $\boxed{0{,}6}$ | 0,8 | 1,0 |

Nel caso dell’item b), le due strategie presentate sono analoghe, tenendo conto che si deve operare sull’intervallo tra 2 e 3, invece che tra 0 e 1.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di identificare la posizione di numeri razionali positivi sulla retta numerica. Entrambi gli item si focalizzano sull'interpretazione di marcature equidistanti posizionate tra i numeri naturali e sull'assegnazione del valore decimale corretto alla posizione indicata.

Il quesito richiede di combinare l'interpretazione della retta numerica, la comprensione dei numeri decimali e il ragionamento proporzionale.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**
La retta numerica offre una rappresentazione visiva potente dei numeri razionali, evidenziandone sia il valore assoluto sia la posizione relativa. Saper interpretare le posizioni frazionarie o decimali su una retta numerica è fondamentale per comprendere l'equivalenza, la densità e le operazioni con i numeri razionali. Secondo Treppo e van den Heuvel-Panhuizen (2014), questo tipo di quesito sostiene lo sviluppo del senso numerico mentale, la rappresentazione dei numeri razionali e la capacità di collocare e ragionare in modo flessibile sui numeri tra i valori interi. Queste competenze sono cruciali non solo per la teoria dei numeri, ma anche per la misurazione, l'interpretazione dei dati e la modellizzazione algebrica.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Gli studenti che incontrano difficoltà in questo quesito potrebbero:

- contare in modo errato le marcature, per esempio confondendo la terza marcatura con $0{,}3$ invece che $0{,}6$ nella parte a), assumendo che ogni marcatura corrisponda a $0{,}1$ senza verificare l'intervallo in base al numero di suddivisioni presenti;
- scrivere, nella parte b), $2{,}25$ invece di $2{,}2$, stimando il risultato o ricorrendo alle strutture decimali più familiari;
- non riconoscere l'ampiezza dell'incremento, specialmente quando i segmenti non corrispondono ai decimi e quindi utilizzano valori di passo errati;
- commettere errori legati alla suddivisione non standard della retta numerica.

Questi errori mettono in evidenza carenze nella comprensione della retta numerica come strumento basato sulla proporzionalità e/o nell'interiorizzazione del sistema numerico decimale.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Per rafforzare l'abilità a cui si riferisce il quesito, potrebbe essere utile lavorare con rappresentazioni della retta numerica, sia disegnate sia interattive, in cui gli studenti devono etichettare delle marcature e motivare le proprie scelte. L'insegnante potrebbe guidare il processo ponendo domande come: "In quante parti è suddiviso questo intervallo?", "Qual è la distanza tra due marcature?". L'uso di colori diversi per ogni intervallo o di strisce di carta che evidenziano le suddivisioni in segmenti congruenti può aiutare a stimare e contare con maggiore precisione. Rafforzare l'abilità di trasformare frazioni in numeri decimali e viceversa, a partire da quelle più comuni (per esempio $1/4 = 0{,}25$ e $1/5 = 0{,}2$) è utile per acquisire maggiore sicurezza e flessibilità nel posizionare i numeri sulla retta numerica. Infine, il ricorso alla retta numerica in cui un intervallo viene ingrandito gradualmente, in maniera tale da far emergere progressivamente sempre più valori decimali, può essere molto utile per ragionare in accordo con la relazione di proporzionalità ed evitare che venga implicitamente generalizzato il ragionamento tipico nel contesto dei numeri interi, basato sul conteggio, piuttosto che su relazioni di proporzionalità.

# Quesito 3.6: Eseguire calcoli con le frazioni

Calcola e scrivi il risultato sulla riga vuota.

a) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} =$ $\frac{7}{5}$

b) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} =$ $\frac{5}{8}$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} =$ $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5} : \frac{4}{5} =$ $\frac{3}{4}$

**Soluzioni**

I quesiti richiedono di applicare le operazioni fondamentali con le frazioni, rispettando le consuete regole. Nell'item a), cioè $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$, gli studenti devono riconoscere che le frazioni hanno lo stesso denominatore (si riferiscono quindi a frazioni unitarie uguali dello stesso intero) e che quindi è sufficiente addizionare i numeratori, ottenendo $\frac{7}{5}$.

Nell' item b), cioè $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$, occorre invece ricondursi allo stesso denominatore (infatti, le frazioni con denominatore diverso non si riferiscono a frazioni unitarie uguali dello stesso intero); il denominatore $8$ è il minimo comune multiplo e quindi è il denominatore più "agevole", anche se è accettabile qualsiasi denominatore comune; nell'item b) si ottiene quindi $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3+2}{8}=\frac{5}{8}$.

Nell'item c), cioè $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$, occorre moltiplicare rispettivamente i numeratori e i denominatori, semplificando eventualmente in precedenza e ottenendo $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ oppure $\frac{2}{\cancel{3}\,1}\cdot\frac{\cancel{3}\,1}{5}=\frac{2}{5}$. È accettabile come soluzione anche la frazione non ridotta ai minimi termini, cioè $\frac{6}{15}$.

Nell'item d), cioè $\frac{3}{5}:\frac{4}{5}$, è necessario tenere conto del fatto che dividere per una frazione equivale a moltiplicare per la sua inversa, il che fa ottenere, tenendo conto delle opportune semplificazioni, $\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ oppure $\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{\cancel{5}\,1}\cdot\frac{\cancel{5}\,1}{4}=\frac{3}{4}$. Anche in questo caso, è accettabile come risultato anche la frazione non ridotta ai minimi termini, cioè $\frac{15}{20}$.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**

Il gruppo di esercizi mira a valutare le abilità nell'operare con le frazioni, in particolare la capacità di riconoscere la struttura dell'operazione richiesta e di applicare correttamente le regole specifiche per ciascun tipo di calcolo. Gli studenti devono saper addizionare frazioni con lo stesso denominatore, individuare un denominatore comune quando i denominatori sono diversi e utilizzare le procedure di moltiplicazione e divisione. La fluidità nel passaggio da un'operazione all'altra è un indicatore importante della comprensione delle frazioni come numeri e della capacità di manipolarle in contesti diversi.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**

La capacità di operare con le frazioni rappresenta un'abilità fondamentale perché costituisce uno dei passaggi più importanti nell'evoluzione dall'aritmetica di base a una visione più matura del numero e delle relazioni tra quantità. Saper addizionare/sottrarre, moltiplicare e dividere frazioni non implica soltanto conoscere delle regole procedurali, ma richiede la comprensione di che cosa sia una frazione, in che senso due frazioni sono equivalenti e come le operazioni agiscono sui rapporti tra grandezze. Questa abilità diventa essenziale in molte aree successive dell'apprendimento matematico: è una premessa necessaria per affrontare proporzioni, percentuali, espressioni aritmetiche complesse e, più avanti, per lavorare con equazioni e funzioni. La padronanza delle operazioni con le frazioni mostra inoltre che lo studente ha sviluppato una certa flessibilità cognitiva, che gli permette di passare da una rappresentazione all'altra (per esempio da una rappresentazione grafica a una di tipo numerico-simbolico), di riconoscere la struttura dell'operazione coinvolta e di applicare la procedura adeguata in maniera appropriata. Per tutte queste ragioni, l'abilità di calcolo con le frazioni è considerata un indicatore chiave delle competenze matematiche di base e una tappa imprescindibile nella costruzione del pensiero matematico formale.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**
Un errore frequente nell'addizione di frazioni con denominatori diversi è quello di addizionare i denominatori senza averle prima trasformate in frazioni equivalenti. Questo errore potrebbe segnalare che lo studente non ha ancora interiorizzato il significato di suddivisione dello stesso intero in parti uguali, che sta alla base dell'addizione. Nella moltiplicazione, alcuni studenti potrebbero applicare impropriamente la regola dell'addizione, riconducendosi a un denominatore comune. Nella divisione emerge spesso la confusione tra moltiplicazione e inversione, con risposte errate del tipo $\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$, che rivelano la scarsa comprensione del senso dell'operazione.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**
Per sostenere gli studenti in difficoltà con questo tipo di quesiti è utile tornare al significato delle operazioni, ricorrendo a rappresentazioni visive come strisce di carta con rappresentazioni frazionarie o aerogrammi per mostrare perché i denominatori devono essere uguali nell'addizione e perché la divisione richiede l'inversione della seconda frazione. Esercizi graduati, che isolano prima le regole relative alle singole operazioni e solo dopo propongono calcoli che coinvolgono diverse di esse, aiutano a consolidare le procedure. La verbalizzazione guidata ("che cosa faccio per primo?", "perché posso semplificare qui?", "che cosa cambia nella divisione?") contribuisce infine a rendere più solida la comprensione strutturale delle operazioni con le frazioni.

# Quesito 3.7: Confrontare numeri in notazione decimale e frazioni

Segna con una crocetta **tutti** i numeri che sono minori di $\frac{1}{10}$.

- ☐ 0,01
- ☐ 0,10
- ☐ 0,001
- ☐ 0,101

**Soluzioni**

Per risolvere il quesito, gli studenti devono confrontare ciascun numero con $\frac{1}{10}$. Per fare ciò è utile trasformare $\frac{1}{10}$ in numero decimale, cioè $0{,}1$, in maniera tale da poterlo confrontare agevolmente con gli altri numeri decimali. Il primo numero ($0{,}01$) è minore di $0{,}1$ perché ha zero decimi, mentre $0{,}1$ ha un decimo; $0{,}01$ è dieci volte minore di $0{,}1$. Anche $0{,}001$ è minore di $0{,}1$ perché $0{,}1$ ha un decimo, mentre $0{,}001$ ne ha zero; $0{,}001$ è cento volte minore di $0{,}1$. Il numero $0{,}10$ è invece uguale a $0{,}1$, perché entrambi hanno un decimo e zero centesimi. Infine, $0{,}101$ è maggiore di $0{,}1$ perché entrambi hanno un decimo e zero centesimi, ma $0{,}101$ ha un millesimo, mentre $0{,}1$ ha zero millesimi.

Le risposte corrette da selezionare sono dunque $0{,}01$ e $0{,}001$.

Una seconda strategia potrebbe consistere nel trasformare i quattro numeri decimali in frazioni unitarie con denominatori potenze di dieci e ragionare sul confronto di tali frazioni:

$0{,}01 = \frac{1}{100}$: un centesimo è minore di $\frac{1}{10}$ perché se si divide la stessa unità in $100$ parti uguali e se ne prende una, tale parte sarà minore di quella che si ottiene se si divide la stessa unità in dieci parti uguali, prendendone una; $0{,}001 = \frac{1}{1000}$: $\frac{1}{1000}$ è minore di $\frac{1}{10}$ per lo stesso motivo;

$0{,}10 = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, quindi $0{,}10$ è uguale a $0{,}1$;

infine, $0{,}101 = \frac{1}{10} + \frac{1}{1000}$, quindi $0{,}101$ è maggiore di $0{,}1$ perché è composto da $\frac{1}{10}$ più una quantità positiva (un millesimo).

Una terza strategia possibile consiste nel trasformare tutti i numeri coinvolti in frazioni con lo stesso denominatore e confrontare i numeratori, ma si tratta di una strategia che richiede più tempo e non è molto efficiente in questo contesto.

**Abilità chiave valutata con questo quesito**

Il quesito valuta la capacità di confrontare numeri decimali e collegare rappresentazioni diverse dello stesso numero razionale. Per rispondere correttamente, gli studenti devono padroneggiare con sicurezza il sistema numerico posizionale, distinguendo il significato delle cifre decimali come decimi, centesimi, millesimi e così via, nonché le diverse rappresentazioni dei numeri razionali (decimale e frazionaria) e le regole per passare da una all'altra.

**Perché questa abilità è un'abilità chiave**

L'abilità di confrontare numeri razionali in diverse rappresentazioni è fondamentale per l'apprendimento in matematica perché costituisce una base per la comprensione del valore posizionale del sistema decimale, collegando questa comprensione sia al sistema frazionario sia a quello decimale. Riconoscere correttamente il valore delle cifre decimali e associare a esse delle rappresentazioni frazionarie è importante per sviluppare un'intuizione solida dei numeri anche molto piccoli, utile per lavorare con misure, proporzioni, percentuali e arrotondamenti. Inoltre, la capacità di collegare frazioni e decimali potenzia la flessibilità operativa e prepara agli apprendimenti successivi, come la manipolazione di numeri razionali in contesti più complessi.

**Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito**

Gli errori più frequenti riguardano l'errata interpretazione del significato delle cifre decimali, dovuta alla scarsa dimestichezza con il sistema posizionale. Alcuni studenti potrebbero considerare $0{,}10$ maggiore di $0{,}1$ perché vedono i numeri decimali come composti da due numeri naturali, uno prima della virgola e uno dopo di essa. Questa misconcezione porta a confrontare $10$ e $1$, invece che $10$ centesimi e un decimo, concludendo che $0{,}10$ è maggiore di $0{,}1$ perché $10$ è maggiore di $1$. Un altro errore ricorrente consiste nel considerare $0{,}101$ minore di $0{,}1$ perché il primo ha più cifre decimali e, come potrebbe ragionare uno studente, "più le cifre sono lontane dalla virgola, più sono piccole", basandosi sulla sola osservazione del numero di cifre, anziché sul loro valore posizionale.

**Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito**

Per supportare gli studenti che hanno mostrato difficoltà con questo quesito, è utile ricorrere a rappresentazioni visive che possono consentire di mettere a confronto le relazioni tra decimi, centesimi, millesimi ecc. A tale scopo si può chiedere agli studenti di dividere un foglio A4 in dieci parti uguali e di fare la stessa cosa con una di tali parti, producendo così centesimi e, in un ulteriore passaggio, millesimi, della stessa unità. Anche l'uso di carta millimetrata può essere utile in questo senso, ma preferibilmente dopo il lavoro esplorativo descritto in precedenza, in cui sono gli studenti stessi a produrre le suddivisioni dell'unità. Inoltre, un lavoro mirato sul valore posizionale attraverso la messa a confronto di rappresentazioni della retta numerica, in cui in passaggi successivi si produce un ingrandimento progressivo di un dato intervallo (p.e. tra $0$ e $1$), in maniera tale che ad ogni "zoom" emergano nuove cifre decimali, può essere molto utile per rafforzare la comprensione e prevenire errori ricorrenti. Infine, accompagnare gli studenti nella verbalizzazione attraverso affermazioni del tipo ("$0{,}01$ significa un centesimo", "$0{,}001$ significa un millesimo") può supportare ulteriormente la comprensione del valore posizionale delle cifre nel sistema posizionale.

# V. Valutazione scientifica

Lo Screening DiToM 8+ è stato sviluppato sulla base di un solido quadro teorico ed è stato testato nell'ambito di uno studio di validazione non rappresentativo. I risultati ottenuti sono stati utilizzati per individuare le soglie decisionali che consentono di stabilire se uno studente possa essere considerato a rischio a causa di carenze nelle abilità matematiche fondamentali per l'apprendimento successivo.
Il test supporta gli insegnanti, al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado o all'inizio della classe prima della scuola secondaria di secondo grado, nella formulazione di una valutazione empiricamente fondata del rendimento degli studenti e nell'identificazione di coloro che necessitano di un intervento di supporto tempestivo.

**Descrizione del campione e risultati principali**
Lo Screening DiToM 8+ è stato somministrato nel periodo compreso tra il 1° giugno e il 31 luglio 2025, durante le ultime tre settimane dell'anno scolastico 2024/2025, a un campione di 1 238 studenti provenienti da scuole situate in Croazia, Francia, Germania, Grecia, Italia, Spagna e Svezia.

Il test è articolato nelle seguenti sezioni:

- Abilità aritmetiche e algebriche di base (10 item);
- Proporzionalità e linearità (9 item);
- Calcoli tecnici (13 item).

La somministrazione è avvenuta secondo criteri standardizzati (si veda la sezione IV, Implementazione del test DiToM). Ogni item è stato valutato assegnando 1 punto alle risposte corrette e 0 punti alle risposte errate, incomplete o mancanti. Poiché il test è concepito come uno strumento di screening volto all'individuazione di studenti potenzialmente a rischio, era atteso — e desiderabile — un marcato effetto soffitto, ossia una distribuzione dei punteggi asimmetrica a sinistra piuttosto che normale. I risultati della sperimentazione hanno confermato tale aspettativa.

Per favorire un utilizzo efficace del test in ambito didattico, non è stato definito un unico valore soglia, bensì due valori soglia che permettono di distinguere tra studenti potenzialmente a rischio, studenti da monitorare attentamente nelle settimane successive e studenti potenzialmente non a rischio. La determinazione dei punteggi soglia è stata guidata dai dati, attraverso un'analisi delle classi latenti che ha evidenziato tre classi chiaramente distinguibili. Tali classi risultano monotone e non sovrapposte. Le probabilità posteriori di appartenenza alle classi sono state tracciate in funzione del punteggio, opportunamente smussate (*smoothed*), e utilizzate per individuare i punti di intersezione corrispondenti ai valori soglia rilevanti per le decisioni di supporto.

L'analisi ha portato all'identificazione di tre gruppi distinti, denominati K1, K2 e K3. Il gruppo K1 comprende studenti con prestazioni nettamente deboli nel test di screening; il gruppo K2 include studenti con risultati relativamente deboli; il gruppo K3 è costituito da studenti i cui risultati complessivi non destano particolari preoccupazioni.

Il primo valore soglia è stato fissato considerando il punteggio fino al quale la probabilità di appartenere alla classe con risultati deboli raggiunge il 50%. Questa soglia corrisponde a 8 punti. Gli studenti che ottengono un punteggio pari o inferiore a 8 necessitano di un supporto mirato volto al consolidamento delle competenze di base, condizione necessaria per costruire una comprensione solida dei contenuti matematici successivi. La seconda soglia è stata fissata a 17 punti. Gli studenti che ottengono un punteggio compreso tra 9 e 17 punti dovrebbero essere monitorati nel corso delle settimane successive, al fine di verificare se riescono a seguire proficuamente il percorso didattico e ad applicare in modo autonomo quanto appreso.

# VI. Scheda di valutazione dello Screening 8+

La seguente scala fornisce indicazioni sulle abilità che potenzialmente possiedono agli studenti, sulla base dei punteggi ottenuti, suddivisi nelle tre fasce: $0-8$ punti, $9-17$ punti e $18-32$ punti.

32

**Punteggio $18-32$: lo studente non presenta particolari criticità rispetto ai prerequisiti necessari per l'apprendimento futuro della matematica**

**C: oltre alle competenze descritte in A e B, lo studente è potenzialmente in grado di…**
… eseguire calcoli con i numeri negativi, costruire un'espressione algebrica ben strutturata partendo da una descrizione fornita nel linguaggio naturale, risolvere problemi di divisione in contesti reali, interpretare grafici di relazioni di proporzionalità e ricavare informazioni da essi, modellizzare situazioni problematiche tramite espressioni algebriche, risolvere problemi che coinvolgono relazioni di proporzionalità inversa; comprendere e utilizzare espressioni algebriche utili per calcolare il perimetro di un rettangolo.

**Lo studente è raramente in grado di…**
… applicare queste abilità con flessibilità in quesiti di modellizzazione complessi e a più passaggi in contesti non familiari.

18

17

**Punteggio $9-17$: l'apprendimento dello studente deve essere monitorato attentamente durante le settimane successive per valutare se riesce a seguire in maniera proficua**

**B: oltre alle abilità descritte in A, lo studente è potenzialmente in grado di…**
… valutare un'espressione sostituendo una variabile con un valore numerico, convertire una frazione in una percentuale, costruire un'espressione algebrica partendo da una descrizione fornita nel linguaggio naturale e articolata in più passaggi, strutturare un'espressione partendo da una regola in più passaggi, stabilire se un numero è soluzione di un'equazione lineare, distinguere tra relazioni di proporzionalità diretta e inversa e identificare la posizione di numeri razionali positivi sulla retta numerica.

**Lo studente è raramente in grado di…**
… eseguire calcoli con i numeri negativi, risolvere problemi di divisione inseriti in contesti reali più complessi o tradurre descrizioni verbali più articolate in espressioni algebriche.

9

8

**Punteggio $0-8$: lo studente è a rischio rispetto ai prerequisiti necessari per l'apprendimento futuro in matematica e necessita un supporto mirato il prima possibile**

**A: lo studente è potenzialmente in grado di…**
… ricavare informazioni da un piano cartesiano, identificare relazioni di proporzionalità diretta, interpretare rappresentazioni di frazioni e convertirle in percentuali, risolvere semplici problemi di proporzionalità in contesti reali, individuare valori decimali sulla retta numerica e calcolare un incremento percentuale.

**Lo studente è raramente in grado di…**
… valutare espressioni algebriche sostituendo valori numerici, convertire frazioni in percentuali in situazioni più complesse, costruire espressioni strutturate partendo da una descrizione fornita nel linguaggio naturale e articolata in più passaggi.

0

# VII. Riferimenti bibliografici


Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 296–333). Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at risk students in lower secondary mathematics education. In Proceedings of EDULEARN25 Conference. Palma, Spain. Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7

Cusi, A., & Navarra, G. (2012). L'approccio alla generalizzazione con alunni giovani in ambiente early algebra. Disponibile da: http://www.progettoaral.it/2013/05/23/cusi-navarra-2012/

D'Amore, B., Asenova, M., Del Zozzo, A., Iori, M., Nicosia, G. G., & Santi, G. (2023). I numeri: Matematica, storia, giochi e curiosità, per una didattica corretta ed efficace. Bonomo.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M., Santi, G., & Sbaragli, S. (2025). Riflessioni didattiche sul tema «Frazioni». Bonomo.

Malara, N.A., & Navarra, G. (2024). Quadro teorico di riferimento e glossario del Progetto ArAl. Sintab Edizioni.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. Educational Studies in Mathematics, 106(3), 447–469.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Navarra, G. (2022). Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante. Utet.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation in young children. Child Development, 76(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Lortie Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. Journal of Educational Psychology, 107(3), 909–918.

Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. ZDM, 46(1), 45–58.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students additive and multiplicative reasoning skills. Cognition and Instruction, 28(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester Jr. (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 557–628). Information Age.