Co-funded by the European Union

Freie Universität Bozen
Libera Università di Bolzano
Università Liedia de Bulsan

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Screening Test 8+

Handbuch

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Handbuch soll Sie bei der Durchführung des DiToM 6+ Screenings und bei der Nutzung der Testergebnisse in Ihrem Unterricht unterstützen. Auf den folgenden Seiten finden Sie:

1. eine kurze Einführung in die Ziele und Leitprinzipien des Erasmus+-Projekts DiToM (**Di**agnostic **To**ol in **M**athematics);
2. Hinweise zur Durchführung des DiToM 6+ Screenings;
3. kurze Erläuterungen zu jeder Aufgabe des DiToM 6+ Screenings, einschließlich Hinweisen zu möglichen Förderstrategien für Schüler*innen, deren Screening-Ergebnisse Lernlücken in wichtigen mathematischen Kompetenzen aufzeigen;
4. Anleitungen zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse.

Die Anweisungen und die in Abschnitt 4 beschriebenen Bewertungstabellen können auch separat als einzelne PDF-Dateien unter www.ditom.org heruntergeladen werden.

I. Ziele und Leitprinzipien von DiToM

Das Lernen von Mathematik verläuft kontinuierlich: Neues Wissen baut auf gesichertem Vorwissen auf. Fehlen grundlegende mathematische Ideen und Konzepte, fällt es den Schüler*innen zunehmend schwerer, mathematische Inhalte zu verstehen und zu begreifen, die auf diesem Fundament aufbauen. Sowohl nationale als auch internationale Studien zeigen, dass ein erheblicher Anteil der Schüler*innen bereits in der Grundschule die Mindeststandards in Mathematik nicht erreicht – und aus den oben genannten Gründen fast zwangsläufig auch in der Sekundarstufe weiterhin Schwierigkeiten hat. Alarmierend ist, dass viele junge Menschen ihre Schulpflicht beenden, ohne das grundlegende Niveau an mathematischer Kompetenz erreicht zu haben, das laut OECD für eine „vollständige Teilhabe am gesellschaftlichen Leben" unerlässlich ist.

Um dem entgegenzuwirken, müssen Lehrkräfte zunächst in der Lage sein, mathematische Lernschwierigkeiten zu erkennen – idealerweise frühzeitig und so genau wie möglich. Nur auf dieser Grundlage können gezielte Fördermaßnahmen ergriffen werden. Genau hier setzt das EU-Projekt *„**Di**agnostic **To**ol in **M**athematics" (*DiToM*)* an. In einer Partnerschaft zwischen Deutschland, Frankreich, Griechenland, Kroatien, Italien, Schweden und Spanien wurden fünf miteinander verbundene Screening-Instrumente entwickelt. Diese Tools ermöglichen es Lehrkräften, sich am Ende oder zu Beginn eines Schuljahres einen präzisen Überblick darüber zu verschaffen, welche Schüler*innen Gefahr laufen, in Mathematik zurückzufallen, wenn sie keine gezielten Fördermaßnahmen erhalten.

Die Screenings folgen einem zweijährigen Zyklus:

- **Screening 0+** Beginn der Grundschule
- **Screening 2+** Ende der 2. Klasse / Beginn der 3. Klasse
- **Screening 4+** Ende der 4. Klasse / Beginn der 5. Klasse
- **Screening 6+** Ende der 6. Klasse / Beginn der 7. Klasse
- **Screening 8+** Ende der 8. Klasse / Beginn der 9. Klasse

Was sind die DiToM Screenings und was bewirken sie?

Die fünf Screenings sind paper-and-pencil Tests, die sich auf wichtige mathematische Kompetenzen konzentrieren, die zu Beginn einer Klassenstufe sicher beherrscht werden sollten, damit neue Inhalte mit Verständnis gelernt werden können. Jeder Test kann innerhalb einer Unterrichtsstunde (45 Minuten) mit der gesamten Klasse durchgeführt und mit Hilfe der bereitgestellten Bewertungsinstrumente (siehe Abschnitt V) mit relativ geringem Zeitaufwand ausgewertet werden. Die Ergebnisse geben den Lehrkräften einen ersten strukturierten Überblick darüber, welche Schüler*innen wahrscheinlich zusätzliche Unterstützung benötigen.

Das Wort *„wahrscheinlich"* ist entscheidend: Ein Screening **ersetzt keine individuelle, qualitative Beurteilung des Lernstands** eines Kindes. Es liefert vielmehr erste Anhaltspunkte dafür, welche Strategien oder Lösungsansätze ein Kind möglicherweise verwendet hat. Ein detaillierteres Verständnis erfordert gezielte Beobachtungen und Einzelgespräche unter Verwendung differenzierterer Aufgaben. Das Screening kann jedoch als wertvoller Ausgangspunkt dienen, um zu bestimmen, welche Kinder am meisten von solchen Folgeuntersuchungen profitieren würden.

Was sind „mathematische Schlüsselkompetenzen"?

Wie bereits erwähnt, zeichnet sich die Mathematik in der Schule durch eine *„interne Lernhierarchie"* aus (Wittmann, 2015, S. 199). Dies gilt insbesondere für die Bereiche Arithmetik und Algebra – genau die Bereiche, auf die sich die DiToM-Screenings bewusst konzentrieren. In diesen Bereichen ist es in jeder Lernphase möglich, *Schlüsselkompetenzen* zu identifizieren – Kompetenzen, ohne die weiteres Lernen nicht sinnvoll und nachhaltig stattfinden kann.

Ein Beispiel: Um erfolgreich mit natürlichen Zahlen arbeiten zu können, müssen Kinder diese im Sinne *des Teil-Ganzes-Konzepts* verstehen – ein Entwicklungsprozess, der im ersten Schuljahr abgeschlossen sein sollte. Das Teil-Ganzes-Konzept bedeutet beispielsweise, dass die Zahl sieben als ein Ganzes verstanden wird, das sich aus Teilen zusammensetzt – fünf und zwei, vier und drei, eins und sechs und so weiter. Dieses Verständnis sollte dann automatisch erfolgen: Ein Kind sollte keine bewusste Anstrengung mehr benötigen, um fünf als den fehlenden Teil von sieben zu erkennen, wenn zwei als der andere Teil gegeben ist. Mit anderen Worten: Kinder sollten Zahlen automatisch in Bezug auf ihre Zerlegungen und Beziehungen denken. Diese Kombination aus *Verständnis* und *Automatisierung* ist charakteristisch für viele Schlüsselkompetenzen: Erst wenn bestimmte Fähigkeiten automatisch ablaufen, kann geistige Kapazität freigesetzt werden, um höhere mathematische Herausforderungen anzugehen.

Ob die Schlüsselkompetenz „Zahlen als Zusammensetzungen betrachten" (oder „Zahlenzerlegung") gut verankert ist, lässt sich beispielsweise an den Rechenstrategien eines Kindes erkennen. Ein Kind, das sieben als fünf und zwei betrachtet, löst 7 – 5 mühelos, selbst in der ersten Schulklasse, ohne zu zählen. Kinder, denen diese Kompetenz fehlt, verlassen sich jedoch oft bis weit in die späteren Grundschul- und Sekundarschulklassen hinein auf mühsame, fehleranfällige Zählstrategien. Das Zählen bei Addition und Subtraktion wird schnell unüberschaubar, wenn es um zwei- oder dreistellige Zahlen geht. Solche Kinder haben auch Schwierigkeiten, Beziehungen zwischen Multiplikations-aufgaben zu erkennen – zum Beispiel, dass $9 \cdot 6$ sechs weniger ist als das leicht zu merkende $10 \cdot 6$. Defizite in einer Schlüsselkompetenz (das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen) behindern somit den Erwerb anderer Kompetenzen (Addition, Subtraktion, Multiplikation), die wiederum Voraussetzungen für fortgeschrittenere Fähigkeiten (Division, proportionales Denken usw.) sind.

Diese Kette setzt sich über die Grundschule hinaus fort: Schüler*innen, die Schwierigkeiten mit natürlichen Zahlen haben, werden noch größere Schwierigkeiten mit Brüchen und Dezimalzahlen haben. Algebra baut später auf Erkenntnissen auf, die durch die Arbeit mit den Grundrechenarten in der Grundschule gewonnen werden sollten. Ohne diese Erkenntnisse kann Algebra für Schüler*innen wie ein unentzifferbarer Code erscheinen.

Aus diesem Grund konzentrieren sich die DiToM-Screenings auf Schlüsselkompetenzen – diejenigen, die zu Beginn der Klassenstufen 1, 3, 5, 7 und 9 sicher etabliert sein sollten, damit das weitere mathematische Lernen erfolgreich fortgesetzt werden kann.

Was geschieht nach der Durchführung des DiToM-Screenings?

Mithilfe der in Abschnitt V beschriebenen Auswertungshilfen können Lehrer*innen den Test digital mit Excel oder analog in Papierform auswerten.

Mit Blick auf einzelne Schüler:

Bei DiToM geht es nicht darum, Schüler*innen zu etikettieren. Die Screenings sind **nicht** darauf ausgelegt, Schüler*innen mit „Dyskalkulie" zu identifizieren. Klinische Diagnosen dieser Art gehen nicht auf die Kernfrage ein, die DiToM beantworten möchte: Wie können Lehrer*innen Kinder, die Schwierigkeiten mit grundlegenden Rechenkompetenzen haben, am besten unterstützen? Eine gezielte Unterstützung erfordert ein genaues Verständnis des aktuellen Lernniveaus jedes einzelnen Kindes. DiToM hilft dabei, diejenigen zu identifizieren, für die eine solche detaillierte Bewertung dringend erforderlich ist – nicht mehr, aber auch nicht weniger. Abschnitt III enthält kurze Hinweise dazu, welche Arten von Folgemaßnahmen für jede einzelne Aufgabe hilfreich sein können.

Die in Abschnitt V diskutierten „kritischen Schwellenwerte“ wurden auf der Grundlage von Datenerhebungen mit DiToM-Screenings bei 8.820 Schüler*innen in den sieben Partnerländern ermittelt. Unter Verwendung der Latent-Class-Analyse (siehe Yin, Bezirhan & von Davier, 2025) wurden die Schüler*innen wie folgt gruppiert:

- **Gruppe A:** Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.
- **Gruppe B:** Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.
- **Gruppe C:** Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Es ist wichtig, sich vor Augen zu halten, dass jedes Screening nur eine *Momentaufnahme* darstellt. Manche Schüler*innen hatten vielleicht einfach einen schlechten Tag oder waren abgelenkt, andere haben trotz Vorsichtsmaßnahmen möglicherweise Antworten abgeschrieben. Die Ergebnisse eines Screeningtests sollten daher mit Vorsicht interpretiert werden. Sie sollten immer mit den Beobachtungen aus dem täglichen Unterricht verglichen und als Anstoß für weitere gezielte Beobachtungen und Folgeaufgaben in den kommenden Tagen und Wochen genutzt werden.

Wenn sich herausstellt, dass ein Kind in **Gruppe A** fällt, ist davon auszugehen, dass sich seine mathematischen Schwierigkeiten im Laufe des Schuljahres verschlimmern werden, sofern nicht rechtzeitig wirksame Maßnahmen ergriffen werden. Abschnitt IV kann nur allgemeine Hinweise für solche Maßnahmen geben, die auf den in den einzelnen Aufgaben bewerteten Schlüsselkompetenzen basieren. Für ausführlichere Fördermaßnahmen müssen Lehrer*innen die einschlägige pädagogische Literatur heranziehen.

Auch Kinder der **Gruppe B** benötigen wahrscheinlich in mindestens einigen Bereichen gezielte Unterstützung, um erfolgreich lernen zu können. Es sei daran erinnert, dass alle Screening-Aufgaben Schlüsselkompetenzen bewerten. Das Screening ist bewusst so konzipiert, dass es *keine* Unterscheidung zwischen leistungsstarken Kindern trifft – im Idealfall sollten die meisten Kinder die Aufgaben recht einfach finden.

Daher sollten auch Fehler, die Kinder **der Gruppe C** bei einzelnen Aufgaben machen, ernst genommen werden, da sie auf Lücken in grundlegenden Schlüssel-kompetenzen hinweisen können.

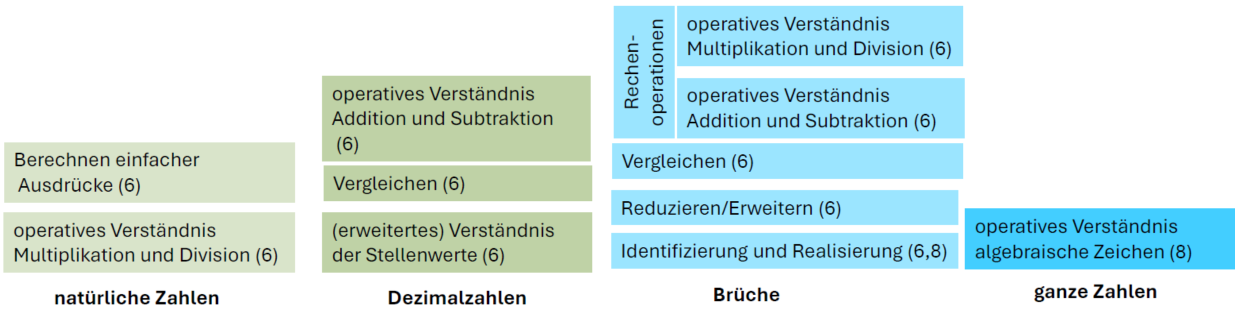
Mit Blick auf die Klasse als Ganzes:

Letzteres gilt insbesondere dann, wenn die Ergebnisse zeigen, dass mehrere Kinder mit demselben Testteil oder derselben Aufgabe Schwierigkeiten hatten. Dies kann darauf hindeuten, dass sie entweder in ihrer bisherigen Schulzeit oder vor der Einschulung nur unzureichend oder nicht gezielt in dieser Kompetenz geübt wurden. In solchen Fällen ist es umso wichtiger, dass diese Lernmöglichkeiten jetzt angeboten werden, auch wenn der Lehrplan bereits zu neuen Inhalten übergegangen ist. Auch hier ist es wichtig, die hierarchische Struktur des Mathematikunterrichts zu berücksichtigen: Jede Stufe hängt vom sicheren Verständnis der grundlegenden Kompetenzen ab, bevor man zur nächsten übergehen kann.

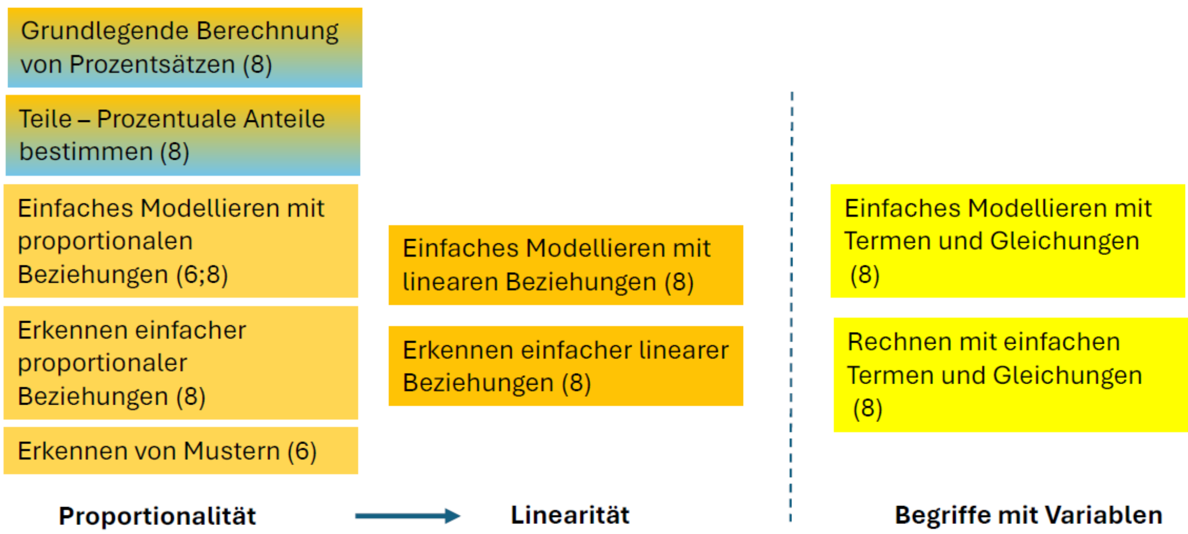
II. Teststruktur der Screenings 6+ und 8+

Die Teststruktur in DiToM basiert auf den Inhaltsbereichen Arithmetik und Algebra. Die hierarchische Struktur der Inhaltsbereiche wird berücksichtigt. Der Testaufbau konzentriert sich auf den Bereich der Zahlenbereichsentwicklung und -erweiterung im Sinne technischer Berechnungen. Das Diagramm zeigt die Teststruktur für die Klassenstufen 6+ und 8+.

Der Screening 6+ Test baut auf den Bausteinen von Screening 4+ auf, die sich auf natürliche Zahlen konzentrieren. Wenn Schüler*innen in der 6. Klasse erhebliche Schwierigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen haben, wird empfohlen, den Test für die Klasse 4+ anzuwenden.



Im Bereich der Algebra wird das strukturelle Verständnis einfacher mathematischer Strukturen in internen sowie externen mathematischen Anwendungen unter den Aspekten Proportionalität und Linearität geprüft. Dies gilt ebenso für Terme mit Zahlen oder Variablen in unterschiedlichen Richtungen in grundlegenden Anwendungssituationen sowie für das Termverständnis, soweit es Teil eines grundlegenden Verständnisses ist.



III. Durchführung des DiToM Tests 8+

Erklären Sie den Schülern den Zweck des Tests und beruhigen Sie sie.

- Der Test wird nicht benotet.
- Er ermöglicht Ihnen, eine Bestandsaufnahme dessen zu machen, was die Schüler*innen wissen und was sie nicht wissen, damit Sie anschließend eine Förderung einleiten können. Daher ist es besonders wichtig, dass die Schüler*innen alleine arbeiten.
- Betonen Sie, wie wichtig es ist, die Übungen zu absolvieren. Je mehr Fragen sie beantworten, desto leichter lassen sich ihre Kenntnisse, Fähigkeiten und Schwierigkeiten erkennen, um ihnen dabei zu helfen, diese zu überwinden.

Aufbau des Tests

- Der Test ist in vier Teile gegliedert, die jeweils aus mehreren Aufgaben bestehen.
- Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander.

Dauer: Für jedes Screening gibt es eine maximale Bearbeitungszeit.

- Die maximale Bearbeitungszeit der Screenings beträgt 42 Minuten.
- Es ist wichtig, den Schüler*innen vor Beginn des Screenings die Dauer des Tests mitzuteilen.

Aufgabenformate

- Offene Aufgaben: Es gibt Platz für die Antwort (entweder in Form von Sätzen oder einer Zahl).
- Geschlossene Aufgaben (Multiple-Choice-Fragen): Es werden mehrere Antworten vorgeschlagen und die Schüler*innen müssen eine davon auswählen. Bitte weisen Sie die Schüler*innen darauf hin, dass sie, wenn sie ihre Multiple-Choice-Antwort ändern möchten, diese Änderungen klar zu kennzeichnen (z.B. indem sie neben der ersten Antwort „Nein” und neben der neuen Antwort „Ja” schreiben).

Weitere Hinweise

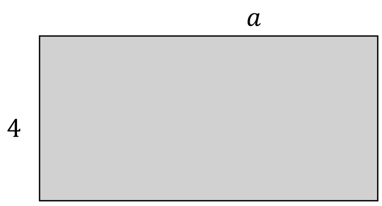
- Taschenrechner sind nicht erlaubt.
- Die Schüler*innen können jeden freien Teil der Seite verwenden, insbesondere um ihre Berechnungen aufzuschreiben.
- Die Schüler*innen können die vier Teile in ihrer eigenen Reihenfolge und in ihrem eigenen Tempo bearbeiten.
- Wenn die Lehrkraft um Hilfe gebeten wird, darf sie keine Hinweise geben, die zur Beantwortung der Aufgaben führen könnten. Das Ziel ist es, die Schwierigkeiten der Schüler*innen zu erkennen.

IV. Erläuterungen und Förderhinweise zu den einzelnen Aufgaben von DiToM 8+

Aufgabe 1.1: Umfang eines Rechtecks

Der **Umfang einer Fläche** ist die Summe der Längen seiner Seiten.

Gib eine Formel für den Umfang (U) des abgebildeten Rechtecks an.



$U =$ 2a + 8

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine formale Schreibweise für den Umfang eines Rechtecks zu erstellen, wenn die Seitenlängen in algebraischer Form angegeben sind. Das Rechteck ist mit den Seitenlängen a und 4 gekennzeichnet, und die Aufgabe verlangt von den Schülern*innen, den Umfang U als allgemeinen Ausdruck auszudrücken, anstatt einen numerischen Wert zu berechnen. Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen verstehen, dass ein Rechteck zwei Paare gleicher Seiten hat, und die folgende Formel anwenden:

	U=2·(a + 4)	U =(a + 4) ·2		
oder gleichwertig:	U=2a + 8	U = 2a + 2 · 4	oder U = a + 4 + a + 4	oder ähnlich

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Diese Aufgabe fördert die Entwicklung des algebraischen Denkens, indem sie die Schüler*innen dazu anregt, Beziehungen zwischen Größen mithilfe von Variablen darzustellen. Bei DiToM ist das Erstellen solcher Formeln unerlässlich, um symbolische Flüssigkeit aufzubauen und funktionale Beziehungen zu verstehen. Es verbindet geometrisches Denken (Umfang) mit algebraischen Ausdrücken und festigt die Verwendung von Variablen als verallgemeinerte Zahlen. Diese Fertigkeit bereitet die Schüler*innen auch auf die spätere Arbeit mit Funktionen, parametrisierten Modellen und dem Lösen von Gleichungen vor.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein sehr häufiges Missverständnis besteht darin, dass die Schüler*innen versuchen, einen numerischen Wert für die mit a bezeichnete Seite zu berechnen – etwa durch direktes Abmessen aus der Zeichnung –, anstatt zu erkennen, dass a eine Variable ist und die Aufgabe eine allgemeine Formel erfordert, nicht ein bestimmtes Ergebnis. Das deutet auf eine Diskrepanz zwischen algebraischer Darstellung und konkreter Berechnung hin.

Darüber hinaus geben einige Schüler*innen die Formel für die Fläche des Rechtecks anstelle des Umfangs an, indem sie beispielsweise $A = a \cdot 4$ oder $A = 4a$ schreiben, wodurch sie die Konzepte von Fläche und Umfang verwechseln. Das deutet entweder auf eine konzeptionelle Verwirrung zwischen den beiden Eigenschaften oder auf Schwierigkeiten beim Extrahieren relevanter Informationen aus dem Text hin. Insgesamt deuten diese Fehler auf Schwächen in folgenden Bereichen hin:

- Verständnis der Rolle von Variablen
- Unterscheidung verschiedener geometrischer Konzepte
- der genauen Interpretation mathematischer Anweisungen

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Schüler*innen profitieren von Übungen, die Aufgaben, bei denen Formeln gefragt sind, klar von solchen unterscheiden, bei denen numerische Ergebnisse gefragt sind. Lehrer*innen können physische ausgeschnittene Rechtecke oder digitale Manipulatives verwenden, bei denen die Schüler*innen die Seiten mit Buchstaben beschriften und um die Form „herumlaufen", um die Gesamtlänge zu zählen. Visuelle Hilfsmittel wie Algebra-Kacheln oder Rahmen zur Berechnung des Umfangs helfen zu veranschaulichen, warum gegenüberliegende Seiten gleich sind und zweimal addiert werden müssen.

Die Förderung verbaler Formulierungen („zweimal die Summe von a und 4") hilft dabei, konkretes Verständnis mit algebraischer Notation zu verbinden. Darüber hinaus können kontrastierende Aufgaben (z. B. „Schreibe eine Formel für den Umfang in Bezug auf die Variable/Unbekannte a" oder „Berechne mit Hilfe der Formel den Wert des Umfangs für $a = 5$") helfen, damit Schüler*innen Anweisungen genau lesen.

Aufgabe 1.2: Verbale Ausdrücke in algebraische Ausdrücke übersetzen

Übersetze jeden Satz in einen mathematischen Term:

a) Die Summe aus 3 und x ___ $3 + x$ ___

b) 3 weniger als x ___ $x - 3$ ___

c) Das Doppelte von a ___ $2a$ ___

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Alltagssprache in algebraische Notation zu übersetzen. Jeder Teil (a–c) präsentiert eine andere verbale Struktur, die einem einfachen symbolischen Ausdruck entspricht. In Teil a) $die\ Summe\ von\ 3\ und\ x$ besteht das Ziel darin, die additive Struktur $3 + x$ zu erkennen. Teil b) $3\ weniger\ als\ x$ prüft, ob die Schüler*innen eine subtraktive Beziehung mit der richtigen Reihenfolge der Operanden $x - 3$ korrekt wiedergeben. Teil c) $das\ Doppelte\ von\ a$ erfordert das Erkennen einer Multiplikation im Term $2a$. Diese Aufgabe kombiniert grundlegende algebraische Konventionen mit sprachlicher Präzision und fordert die Lernenden auf, zwischen natürlicher Sprache und symbolischem Ausdruck zu navigieren.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, fließend zwischen verbalen Beschreibungen und algebraischen Darstellungen zu wechseln, ist grundlegend für die mathematische Kompetenz. Sie unterstützt das Verständnis funktionaler Beziehungen, legt den Grundstein für das Interpretieren und Schreiben von Gleichungen und Formeln und ist für die Modellierung von Problemen unerlässlich. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept ist diese Fähigkeit zentral für den Aufbau eines symbolischen Verständnisses und für die Entwicklung eines sinnvollen Verständnisses von Operationen, das über das reine Auswendiglernen hinausgeht. Schüler*innen, die diesen Übersetzungsprozess beherrschen, sind besser Textaufgaben zu interpretieren und Gleichungen in komplexeren Situationen zu konstruieren.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Diese Aufgabe deckt charakteristische Fehlvorstellungen auf verschiedenen Ebenen auf. In Teil b) $3\ kleiner\ als\ x$ kehren viele Schüler*innen die Reihenfolge fälschlicherweise um und schreiben $3 - x$, wobei sie dies als „$3\ minus\ x$" interpretieren, anstatt als das beabsichtigte $x - 3$. Das deutet auf eine Schwierigkeit hin, die relationale Richtung in verbalen Strukturen zu erkennen. Bei c) ist ein häufiger Fehler die Verwechslung zwischen Quadrat und Verdopplung. Zusammen genommen zeigen diese Fehler, ob die Schüler*innen verbale Strukturen analysieren, die algebraische Syntax beachten und die üblichen mathematischen Konventionen verstehen können.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Um diese Fähigkeit zu stärken, sollte der Unterricht die Struktur der Sprache in Bezug auf die formale Schreibweise betonen. Die explizite Vermittlung von Ausdrücken wie „kleiner als", „größer als", „das Produkt von" und „das Quadrat von" ist unerlässlich, idealerweise mit Kontrastbeispielen. Visuelle Organizer, die Ausdrücke mit algebraischen Formen verbinden, können das Auswendiglernen und das Verständnis der Struktur erleichtern. Schließlich fördert das Ermutigen der Schüler*innen, ihre Ausdrücke zu verbalisieren („x minus 3 bedeutet, dass ich mit x beginne und 3 subtrahiere"), die reflexive Genauigkeit und verbindet die Sprache stärker mit der mathematischen Bedeutung.

Aufgabe 1.3: Aufbau eines Ausdrucks aus einer mehrstufigen schriftlichen Beschreibung

Laura hat 10 Bücher mehr als Jenny.
Kevin hat doppelt so viele Bücher wie Laura.
Die Anzahl der Bücher von Jenny wird mit n bezeichnet.
Kreuze den Term an, mit dem du die Anzahl der Bücher von Kevin berechnen kannst.

- ☐ $10 + n$
- ☐ $10 + n + 2$
- ☑ $2 \cdot (n + 10)$
- ☐ $2 \cdot n + 10$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine zweistufige verbale Beschreibung in einen symbolischen Ausdruck zu übersetzen. Die Aufgabe beschreibt, dass Jenny x Bücher besitzt, Laura 10 mehr als Jenny und Kevin doppelt so viele wie Laura. Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen erkennen, dass Lauras Anzahl als $n + 10$ ausgedrückt wird, und dann die Multiplikation anwenden, um Kevins Gesamtzahl zu ermitteln, was zu dem Ausdruck $2 \cdot (n + 10)$ führt. Das erfordert die Beachtung sowohl der Reihenfolge der Beziehungen als auch der strukturellen Rolle der Gruppierung in algebraischen Ausdrücken (dies geschieht mit Klammern).

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, aus relationalen Beschreibungen symbolische Ausdrücke zu konstruieren, ist grundlegend für die Algebra. Sie zeigt die Fähigkeit eines Schülers, funktionale Abhängigkeiten zu erkennen und sie strukturell auf der Grundlage der Rolle von Klammern zu kodieren. Bei DiToM stellt eine solche Aufgabe eine Schlüsselkompetenz in Mathematik dar, da sie die Koordination mehrerer Größen und Operationen erfordert und den Übergang vom arithmetischen Denken zur algebraischen Verallgemeinerung unterstützt. Durch die Arbeit mit abstrakten Platzhaltern und verschachtelten Operationen beginnen die Schüler, in Beziehungen zwischen Variablen zu denken – ein wesentlicher Schritt in Richtung Modellierung, Gleichungsauflösung und funktionales Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein häufiger Fehler besteht darin, dass Schüler*innen die Struktur vorzeitig vereinfachen, indem sie den Ausdruck $2n + 10$ anstelle des korrekten Ausdrucks $2 \cdot (n + 10)$ angeben, was darauf hindeutet, dass sie die Priorität der Multiplikation gegenüber der Addition nicht berücksichtigt haben. Andere hören möglicherweise nach der ersten Beziehung auf und schreiben einfach $n + 10$, was eher Lauras Bücher als die von Kevin darstellt. Ein häufiges Missverständnis bei $10 + n + 2$ liegt auch darin, „doppelt so viele" als separate Erhöhung statt als Multiplikation zu interpretieren oder die Priorität der Multiplikation gegenüber der Addition zu ignorieren, was zu einer Fehlinterpretation der beabsichtigten Berechnung führen kann. In einigen Fällen verwechseln die Schüler*innen möglicherweise die Zeichen oder den Informationsfluss, was darauf hindeutet, dass sie Schwierigkeiten haben, mehrere relationale Aussagen aus dem Text zu extrahieren oder zu behalten. Diese Schwierigkeiten deuten auf Lücken im strukturellen Verständnis hin, insbesondere bei der Kombination von additivem und multiplikativem Denken in symbolischer Form.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen? Die Schüler*innen profitieren von einer expliziten verbalen Aufschlüsselung der Beziehungen, angeleitet durch Fragen wie „Was hat Laura in Bezug auf Jennys Bücher?“ und „Was macht Kevin mit Lauras Betrag?“ Die Verwendung von Anschauungsmitteln wie Beziehungsdiagrammen, Rechenbaum oder Kästchen hilft, diese Zusammenhänge greifbarer zu machen. Darüber hinaus stärkt das Üben der Übersetzung von verbalen in symbolische Ausdrücke mit einfacheren einstufigen Beziehungen das Selbstvertrauen, bevor mehrere Schritte kombiniert werden.

Der Unterricht sollte auch ausdrücklich auf die Verwendung von Klammern eingehen und Ausdrücke wie $2n + 10$ und $2 \cdot (n + 10)$ mit konkreten Zahlenbeispielen (z. B. mit einer Tabellenkalkulation) gegenüberstellen, um die Auswirkungen der Struktur zu veranschaulichen. Wenn die Schüler*innen dazu ermutigt werden, ihre Überlegungen laut auszusprechen, wird sowohl die operative Logik als auch die algebraische Bedeutung verstärkt.

Aufgabe 1.4: Eine reale Situation in einen algebraischen Ausdruck übersetzen

Eine Gruppe aus 13 Freunden geht ins Kino.
Jeder von ihnen bezahlt eine Eintrittskarte für x € und Popcorn für 3,20 €.

Kreuze an, mit welchem Term man den Preis für die gesamte Gruppe berechnen kann

- ☐ $13 + (x + 3{,}20)$
- ☐ $x \cdot (13 + 3{,}20)$
- ☐ $13 \cdot x + 3{,}20$
- ☑ $13 \cdot (x + 3{,}20)$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen eine schriftliche Situation in einen strukturierten algebraischen Ausdruck übersetzen. Der Kontext wird schriftlich dargestellt: 13 Freunde kaufen jeweils eine Kinokarte für x Euro und geben zusätzlich 3,20 € für Popcorn aus. Die Gesamtkosten für die Gruppe müssen durch einen Ausdruck dargestellt werden, der beide Komponenten – die Variable und die Konstante – kombiniert und die gesamten Einzelkosten mit der Anzahl der Personen multipliziert. Der richtige Ausdruck lautet daher $13 \cdot (x + 3{,}20)$. Um die richtige Lösung auszuwählen, müssen die Schüler*innen sowohl die narrative Struktur verstehen als auch wissen, wie man wiederholte Additionen durch Multiplikation mit Klammern modelliert.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Darstellung kontextbezogener Situationen als algebraische Ausdrücke spiegelt eine Kernkompetenz der mathematischen Modellierung wider. Diese Aufgabe veranschaulicht einen grundlegenden Übergang vom arithmetischen Denken zur algebraischen Strukturierung: Anstatt zu rechnen oder zu schätzen, werden die Schüler*innen aufgefordert, eine Beziehung zu verallgemeinern und darzustellen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept spielt diese Fähigkeit eine zentrale Rolle bei der Entwicklung von funktionalem Denken, Strukturbewusstsein und einem flexiblen Verständnis der Verwendung von Variablen. Sie fördert auch ein tiefes Verständnis von Operationen, Gruppierungen und der Distributivgesetzmäßigkeit – Fähigkeiten, die für die Manipulation von Ausdrücken und Gleichungen unerlässlich sind.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Viele Schüler*innen neigen dazu, die Notwendigkeit von Klammern zu übersehen und Ausdrücke wie $13x + 3{,}20$ zu wählen. Andere kehren möglicherweise die Multiplikation um und wählen $x + 13 \cdot 3{,}20$ oder stellen fälschlicherweise nur einen Teil der Situation dar. Diese ablenkenden Auswahlmöglichkeiten sind bewusst so gestaltet, dass sie bestimmte Fehlvorstellungen aufdecken, zum Beispiel die Nichtanwendung der distributiven Struktur oder die Fehlinterpretation der Modellierung von Kostenwiederholungen in der Algebra.

In einigen Fällen entscheiden sich die Schüler*innen auch für die numerisch einfachste Option, ohne deren Bedeutung zu analysieren, was auf oberflächliches Lesen oder das Verlassen auf Heuristiken anstelle von relationalem Denken hindeutet.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Um das Verständnis der Schüler*innen zu stärken, kann es hilfreich sein, das Szenario anhand von Tabellen, Diagrammen oder Rechenbaum zu visualisieren, wobei beispielsweise in Tabellen pro Person eine Zeile angezeigt und die Kosten spaltenweise summiert werden.

Die explizite Modellierung ähnlicher Aufgaben – wie „Jede Person zahlt x € und y €, wie hoch ist die Gesamtsumme für n Personen?“ – schafft Vertrautheit mit der Aufgabenstruktur. Die Betonung der Verwendung von Klammern durch gesprochene Phrasen „das Ganze pro Person, dann mal 13“ unterstützt die Schüler*innen dabei, verbale Strukturen in algebraische Form zu übertragen. Darüber hinaus können Diskussionen, in denen die gegebenen Optionen verglichen und bewertet werden, was jeder Ausdruck darstellt, den Schüler*innen helfen, Strategien zur Selbstüberprüfung für die Interpretation symbolischer Entscheidungen zu entwickeln. Ermutigen Sie auch die Schüler*innen, die nicht wissen, wie sie beginnen sollen, zunächst mit einer selbst gewählten Zahl zu testen.

Aufgabe 1.5: Strukturierung eines schriftlichen Ausdrucks aus einer mehrstufigen Regel

Die Rechnung besteht aus den folgenden Schritten:

- *Wähle eine Zahl* x
- *Addiere* 4 *zu* x
- *Multipliziere das Ergebnis mit* x

Kreuze an, welcher Term zu den Rechenschritten passt.

- ☐ $8 \cdot x + 4$
- ☐ $x + 4 \cdot 8$
- ☑ $(x + 4) \cdot 8$
- ☐ $(8 \cdot 4) + x$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe sollen die Schüler*innen eine sequenzielle Berechnung darstellen, insbesondere das Ergebnis der Addition von 4 zu x und der anschließenden Multiplikation des Ergebnisses mit 8 symbolisch ausdrücken. Obwohl in der verbalen Anleitung zusätzliche Schritte erwähnt werden, beziehen sich die Antwortmöglichkeiten nur auf diese erste Operationskette. Der richtige Ausdruck in diesem reduzierten Kontext lautet $(x + 4) \cdot 8$, wobei die Schüler*innen die Reihenfolge der Operationen einhalten müssen, indem sie $x + 4$ gruppieren, bevor sie die Multiplikation anwenden.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verstehen und Darstellen der hierarchischen Struktur von Grundrechenarten ist eine grundlegende Fähigkeit in der Algebra. Sie ermöglicht es den Schüler*innen, von der schrittweisen Interpretation arithmetischer Operationen zur Organisation dieser Schritte in einer strukturierten formalen Schreibweise überzugehen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept ist dies Teil der Entwicklung symbolischer Modellierungskompetenzen, insbesondere der Verwendung von Klammern zur Verdeutlichung der Reihenfolge von Grundrechenarten. Das ist nicht nur für die korrekte Auswertung von Ausdrücken entscheidend, sondern auch für den Aufbau von Selbstvertrauen im Umgang mit Formeln und das spätere Lösen von Gleichungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Die Falschantworten werden sorgfältig ausgewählt, um bestimmte strukturelle Missverständnisse aufzudecken. Beispielsweise steht $8 \cdot x + 4$ für den Fehler, die Multiplikation zu früh durchzuführen und dann fälschlicherweise 4 hinzuzufügen, wodurch die beabsichtigte Gruppierung verletzt wird.

Die Wahl $x + 4 \cdot 8$ zeigt lineares Lesen und falsche Prioritäten, wobei die Schüler*innen die Multiplikation vor der Addition ohne Klammern anwenden.

$8 \cdot 4 + x$ ignoriert die Struktur vollständig und deutet auf eine oberflächliche Konzentration auf die beteiligten Zahlen statt auf die Beziehung hin. Diese Antwortmöglichkeiten sind nicht zufällig – sie zeigen an, ob ein Schüler*innen versteht, wie Klammern die Reihenfolge der Grundrechenarten beeinflussen, und ob er mehrstufige verbale Anweisungen strukturell statt sequenziell analysieren kann.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen? Die Unterstützung sollte darauf abzielen, das Bewusstsein der Schüler*innen für Klammern und ihr Verständnis für die Reihenfolge der Grundrechenarten zu stärken. Ein hilfreicher Ansatz besteht darin, die Schüler*innen jeden Schritt verbalisieren zu lassen und dann die Ausdrücke mithilfe von Karten oder Farbcodierungen physisch zu gruppieren. Sie sollten dazu ermutigt werden, Ausdrücke wie $x + 4 \cdot 8$ und $(x + 4) \cdot 8$ mit numerischen Ersetzungen (z. B. $x = 2$) zu vergleichen, um zu testen, ob die Struktur mit der beabsichtigten Bedeutung übereinstimmt. Die Erklärung, warum Klammern in diesem Zusammenhang notwendig sind, fördert das symbolische Denken und hilft den Schüler*innen, über die verfahrensorientierte Übersetzung hinaus zu einem echten Verständnis zu gelangen. Die Schüler*innen können auch damit beginnen, selbst gewählte Zahlen zu testen und ihre Berechnung zu verallgemeinern.

Aufgabe 1.6: Auswerten eines Ausdrucks mit Variablenersetzung

Kreuze das Ergebnis an, wenn du $x = 8$ in den Term $1 + 3x$ einsetzt und berechnest.

- ☑ 25
- ☐ 32
- ☐ 39
- ☐ 48

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, einen algebraischen Ausdruck zu berechnen, indem sie einen gegebenen Wert für die Variable einsetzen und die richtige Reihenfolge der Grundrechenarten anwenden. Konkret erhalten die Schüler*innen den Ausdruck $1 + 3x$ und müssen dessen Wert für $x = 8$ berechnen. Da 3x „$3\ mal\ x$" bedeutet, ist die richtige Vorgehensweise, zuerst zu multiplizieren:

$$1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$$

Die Schüler*innen müssen die Variable korrekt ersetzen und dann die Grundrechenarten in der richtigen Reihenfolge ausführen, wobei sie die Reihenfolge der Grundrechenarten beachten müssen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Ersetzen ist einer der grundlegendsten Prozesse in der Algebra und bildet eine Brücke zwischen symbolischen Ausdrücken und numerischem Denken. Bei DiToM hilft das Auswerten von Ausdrücken durch Ersetzen von Werten dabei, die Rechenfertigkeit, das Verständnis für Symbole und das Vertrauen im Umgang mit Variablen zu entwickeln. Diese Fähigkeiten sind grundlegend für den Umgang mit Funktionen, das Erstellen von Tabellen und Grafiken und das algebraische Lösen von Problemen aus dem Alltag. Außerdem fördert es ein flexibles Verständnis der mathematischen Struktur, insbesondere der Beziehung zwischen Symbolen, Grundrechenarten und ihrer Bedeutung.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Häufige Fehler sind das Missverständnis der Ausdrucksstruktur oder die falsche Anwendung der Reihenfolge der Operationen. Einige Schüler*innen berechnen möglicherweise $1 + (3 + 8) = 12$, weil sie $3x$ fälschlicherweise als $3 + x$ statt als $3\ mal\ x$ lesen.

Andere berechnen $3x$ möglicherweise fälschlicherweise als 38 (durch Verknüpfung von 3 und 8), was eher auf eine symbolische Fehlinterpretation als auf einen Rechenfehler zurückzuführen ist. Schüler, die 32 wählen, haben möglicherweise zuerst 1 zu 8 addiert und dann die Summe mit 3 multipliziert: $(1 + 8) \cdot 3 = 27$ oder den Ausdruck falsch gelesen als $(1 + 3) \cdot 8 = 32$, wodurch unbeabsichtigte Klammern eingefügt wurden.

Die Auswahl von 39 oder 48 kann auf eine falsche Verdopplung, willkürliche Schätzung oder völlige Missachtung der Reihenfolge hindeuten. Diese Ablenkungsmanöver zeigen, ob die Schüler*innen verstehen, wie Variablen in Ausdrücken funktionieren und wie die Reihenfolge der Operationen ohne explizite Klammerung funktioniert.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Der Unterricht sollte den Schwerpunkt darauflegen, algebraische Ausdrücke strukturell und nicht verfahrensmäßig zu lesen. Lehrer*innen können das Lernen unterstützen, indem sie die Schüler*innen dazu ermutigen, Ausdrücke zu verbalisieren „$eins\ plus\ dreimal\ x$“ und diese mit der numerischen Auswertung in Verbindung zu bringen. Die Verwendung von Substitutionstabellen, die jede Operation klar voneinander trennen, hilft, die Struktur zu verdeutlichen. Vergleichsaufgaben, wie z. B. die Auswertung von $1 + 3x$ und $(1 + 3)x$, verdeutlichen, wie Klammern die Bedeutung verändern, während dynamische Tools es den Schüler*innen ermöglichen, verschiedene Werte interaktiv zu testen. Die Vertiefung der Reihenfolge der Grundrechenarten durch strukturierte Übungen, insbesondere in Kontexten ohne Klammern, fördert die langfristige Genauigkeit und Flüssigkeit.

Aufgabe 1.7: Ermitteln der Lösung einer linearen Gleichung

Kreuze die Zahl an, die die Gleichung $7x + 3 = 80$ erfüllt:

- ☐ $x = 7$
- ☐ $x = 8$
- ☐ $x = 10$
- ☑ $x = 11$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe prüft, ob die Schüler*innen das Konzept einer linearen Gleichung verstehen und durch Einsetzen von Werten bestimmen können, ob eine bestimmte Zahl eine Lösung ist. Den Schüler*innen wird die Gleichung $7x + 3 = 80$ vorgelegt und sie werden gebeten, den Wert von x zu ermitteln, der diese Aussage wahr macht. Die richtige Antwort ist $x = 11$, da das Einsetzen dieses Wertes eine wahre Gleichung ergibt:

$7 \cdot 11 + 3 = 80$

Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen nicht nur die Berechnung durchführen, sondern auch verstehen, dass eine Lösung einer Gleichung eine Zahl ist, die beide Seiten ausgleicht.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Verständnis von Gleichungen als Gleichheitsaussagen und das Wissen, wie man sie überprüft, ist für die Algebra grundlegend. Im DiToM-Rahmenkonzept gehört diese Fähigkeit zum Bereich der symbolischen Interpretation und des Gleichheitsdenkens. Sie bereitet die Schüler*innen darauf vor, Gleichungen systematisch zu lösen und zu überprüfen, ob eine mögliche Lösung eine Gleichung erfüllt. Dieses Verständnis unterstützt ein höheres algebraisches Denken und stärkt das Zahlenverständnis durch umgekehrtes Denken und operationelle Kontrolle.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen ersetzen die Werte möglicherweise mechanisch, machen jedoch Rechenfehler bei der Auswertung von $7x + 3$. Andere verstehen möglicherweise die Aufgabe der Gleichung falsch und interpretieren den Ausdruck als Rechenaufgabe statt als bedingte Aussage. Ein häufiger Irrtum ist die Wahl von $x = 10$, einfach weil es „naheliegend erscheint“, was eher auf eine Schätzung als auf logisches Denken hindeutet. Einige wählen möglicherweise $x = 8$ oder $x = 7$ aufgrund von Vermutungen oder unvollständiger Substitution und hören möglicherweise auf, sobald die linke Seite nahe bei 80 liegt. Oder sie ersetzen x durch 7 als Ziffer einer Zahl im Dezimalsystem. Diese Fehler zeigen Lücken im Verständnis der Bedeutung von Gleichheit sowie Schwächen bei Substitutionsverfahren und der rechnerischen Genauigkeit.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Schüler*innen sollten durch Aktivitäten geführt werden, die betonen, was es bedeutet, dass ein Wert eine Gleichung erfüllt. Strukturierte Substitutionstabellen, in denen die Schüler*innen mehrere Werte für eine einzelne Gleichung überprüfen, helfen dabei, Intuition aufzubauen. Lehrer*innen können auch zur verbalen Reflexion anregen („Ist die linke Seite gleich der rechten Seite?“) und neben exakten Berechnungen auch Schätzstrategien fördern.

Aufgabe 1.8: Eine Einkaufssituation in eine Gleichung mit zwei Variablen übersetzen

Maria kauft 2 Kilo Äpfel und 3 Kilo Orangen und gibt 9 Euro aus.

x steht für den Preis für ein Kilogramm Äpfel und
y für den Preis für ein Kilogramm Orangen.

Kreuze die Gleichung an, die die Situation korrekt wiedergibt.

□ $3x + 2y = 9$
☑ $2x + 3y = 9$
□ $2x + 3x = 9$
□ $2y + 3y = 9$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit, eine reale Situation mit zwei veränderlichen Größen in eine lineare Gleichung zu übersetzen. Die Schüler*innen müssen erkennen, dass jedes Produkt „Anzahl der Kilogramm mal Stückpreis" einen Teil der Gesamtausgaben darstellt und dass die Summe dieser Teile dem Gesamtbetrag entsprechen muss. Die Aufgabe erfordert daher: die beteiligten Größen zu identifizieren, die Koeffizienten korrekt zuzuordnen und eine Gleichung aufzustellen, die die additive Struktur des Kontexts widerspiegelt. Diese Fähigkeit basiert auf der Kompetenz, natürliche Sprache in symbolische Sprache zu übersetzen und dabei die zugrundeliegende algebraische Struktur zu erkennen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Fähigkeit, eine Kostensituation mithilfe einer linearen Gleichung zu modellieren, ist ein wichtiger Schritt in der algebraischen Ausbildung. Sie erfordert das Verständnis der Beziehung zwischen Mengen und Preisen, wie sie für Proportionalitätsprobleme typisch ist, und verlangt, einen Ausdruck aus unterschiedlich bedeutenden Termen zu bilden und diese zu kombinieren. Dabei wird die Fähigkeit gefördert, in einem Satz dessen mathematische Struktur zu erkennen.

Im Rahmen des DiToM-Projekts unterstützt diese Art von Aufgabe den Übergang von der reinen Berechnung zur Modellierung und vom rein arithmetischen zu einem stärker beziehungsorientierten Denken. Dies bereitet auf die Lösung von Gleichungssystemen und das Studium linearer Funktionen vor. Die Modellierung mit zwei Variablen – anstatt die im Text enthaltene Information in einer einzigen Unbekannten zusammenzufassen – fordert die Schüler*innen dazu auf, die Beiträge der einzelnen Größen getrennt zu betrachten: Diese kontrollierte Trennung ermöglicht es, klarer zu erkennen, wie jede Variable das Gesamtergebnis beeinflusst, und bereitet auf die Arbeit mit Gleichungssystemen vor.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Die häufigsten Fehler zeigen oft, wo der logische Faden bei der Übersetzung abreißt:

– Vertauschen der Koeffizienten und so $3x + 2y = 9$ erhalten: Dies zeigt, dass die Struktur erkannt, aber die Mengen für Äpfel und Orangen vertauscht wurden.

– Addieren von Größen des gleichen Typs, wie $2x + 3y = 9$ oder $2y + 3y = 9$: Dies weist auf Schwierigkeiten hin, die Rollen der Variablen zu unterscheiden, oder auf ein schwaches Verständnis der Idee des Stückpreises.

– Die Koeffizienten als Preise statt als Mengen auffassen: Der Schüler bzw. die Schülerin könnte glauben, dass $2x$ bedeutet „der Preis ist zweimal x“ anstatt „Menge der Äpfel mal Stückpreis“.

– Falsche Interpretation der algebraischen Sprache, zum Beispiel $2x$ nicht als „zweimal x“, sondern als „zwei Zehner und x Einer“ oder andere, mit der algebraischen Sprache nicht übereinstimmende Deutungen.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Tabellarische Darstellung: Eine einfache Tabelle mit den Spalten „Menge“, „Stückpreis“ und „Kosten“ macht die Bedeutung der Multiplikation von Mengen und Preisen deutlich und geht der Addition voraus.

Die Lehrkraft kann die Schüler*innen mit Leitfragen unterstützen, zum Beispiel: „Wie viel gibt Marta für Äpfel aus? Wie drückst du das mit x aus?“ „Wie viel gibt sie für Orangen aus? Wie drückst du das mit y aus?“ „Was erhältst du, wenn du beide Ausgaben zusammenzählst?“

Eine weitere hilfreiche Strategie besteht darin, korrekte und fehlerhafte Ausdrücke zu vergleichen: Zu besprechen, warum $3x + 2y$ die Situation nicht korrekt darstellt, kann helfen, die Zuordnung zwischen Menge und Koeffizient zu festigen.

Aufgabe 2.1: Lösen eines proportionalen Denkproblems im Alltag

2 kg Kartoffeln kosten 2,40 €. Berechne den Preis für 5 kg Kartoffeln.

Antwort: 6 €

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen multiplikatives Denken anwenden, um ein Proportionalitätsproblem zu lösen, das in einen vertrauten Alltagskontext eingebettet ist. Angenommen, $2\ kg$ Kartoffeln kosten 2,40 €, müssen die Schüler*innen den Preis für $5\ kg$ ermitteln. Dazu müssen sie einen konstanten Preis pro Kilogramm ($1{,}20$ € $pro\ kg$) erkennen und diesen auf eine neue Menge skalieren. Der richtige Ansatz besteht entweder darin, mit Einheitspreisen zu rechnen (2,40 € durch 2 teilen und mit 5 multiplizieren) oder eine Proportion aufzustellen und zu lösen. Oder man interpretiert $5 = 2 + 2 + 1$ und addiert $2{,}40 + 2{,}40 + 1{,}20$. Die Aufgabe testet nicht nur die verfahrensorientierte Fähigkeit, sondern auch das konzeptionelle Verständnis dafür, wie Mengen in direktem Verhältnis zueinander wachsen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Proportionales Denken ist ein Grundpfeiler des mathematischen Denkens. Es ermöglicht den Schüler*innen, reale Zusammenhänge zu interpretieren und zu modellieren, die Skalierungen, Einheitsraten und multiplikative Vergleiche beinhalten. Im DiToM-Rahmenwerk unterstützt diese Art von Aufgabe wichtige Entwicklungsschritte in Richtung funktionales Denken und bereitet die Lernenden auf fortgeschrittene Themen wie lineare Funktionen und Prozentrechnungen vor. Darüber hinaus fördert sie das Zahlenverständnis und die Flexibilität bei der Anwendung verschiedener Strategien auf proportionale Situationen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

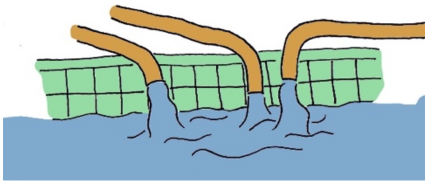
Die Schüler*innen könnten fälschlicherweise additives Denken anwenden, z.B. indem sie „$2\ kg \rightarrow 2{,}40$ € berechnen, also $5\ kg \rightarrow 2{,}40$ € $+\ 5$ €“ oder andere inkonsistente Sprünge, was darauf hindeutet, dass sie die proportionale Struktur nicht verstehen. Andere versuchen möglicherweise, mit 2 zu skalieren und dann zu subtrahieren (z. B. $2\ kg \rightarrow 2{,}40$ €, $4\ kg \rightarrow 4{,}80$ €, und leiten daraus irgendwie $5\ kg$ ab), was auf eine teilweise Anwendung der Strategie ohne die erforderlichen Voraussetzungen hindeuten kann. Einige Lernende schätzen einfach einen Preis, der „vernünftig erscheint”, was eine oberflächliche Vertrautheit mit dem Kontext, aber ein schwaches quantitatives Denken zeigt. Fehler können auch durch ungenaue Berechnungen oder falsche Divisionen entstehen (z. B. Division von 5 durch 2,40 statt umgekehrt). Diese Muster deuten auf Lücken in der Skalierungslogik, im Verständnis der Einheitsrate oder in der Interpretation realer Mengen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung sollte sich darauf konzentrieren, ein starkes intuitives und verfahrensorientiertes Verständnis der Proportionalität aufzubauen. Durch die Verwendung von doppelten Zahlenstrahlen oder Verhältnis-Tabellen können die Schüler*innen Beziehungen visualisieren und schrittweise skalieren. Lehrer*innen können verbale Stützfragen stellen wie „Wie viel kostet $1\ kg$?“ oder „Was passiert, wenn du doppelt so viel kaufst?“ Die Förderung verschiedener Strategien – Einheitsrate, Proportionsaufstellung, schrittweise Skalierung – hilft den Schüler*innen, Flexibilität und Fehlerprüfungsgewohnheiten zu entwickeln. Die Verknüpfung solcher Probleme mit realen Einkaufserfahrungen kann ebenfalls das Engagement und das Verständnis stärken.

Aufgabe 2.2: Lösen einer Aufgabe mit umgekehrter Proportionalität

Ein Schwimmbecken wird mit Schläuchen gefüllt.
Aus jedem Schlauch kommt immer dieselbe Menge Wasser in einer Stunde. Aus Erfahrung weiß man, dass das Becken mit vier Schläuchen in 6 Stunden gefüllt wird.



Wie viele Schläuche braucht man, wenn man das Becken in 2 Stunden füllen möchte?

Antwort: 12 Schläuche

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe beinhaltet ein reales Szenario, in dem die Schüler*innen die Beziehung zwischen Zeit und Menge bei einem Füllvorgang verstehen müssen. Konkret füllen vier identische Wasserhähne einen Pool in 6 Stunden. Die Frage lautet nun: Wie viele Wasserhähne sind erforderlich, um denselben Pool in nur 2 Stunden zu füllen? Um die Aufgabe zu lösen, müssen die Schüler*innen erkennen, dass umso mehr Wasserhähne erforderlich sind, je schneller die Aufgabe erledigt werden muss. Obwohl dies nicht ausdrücklich angegeben ist, handelt es sich um einen Fall von umgekehrter Proportionalität, bei dem eine Größe zunimmt, wenn die andere abnimmt. Eine sinnvolle und leicht verständliche Strategie besteht darin, die bekannten und gewünschten Werte in einer Tabelle oder einem Verhältnisdiagramm zu organisieren:

Anzahl der Wasserhähne	Zeit (in Stunden)
4	6
?	2

Von hier aus können die Schüler*innen folgern, dass, da die Zeit durch 3 geteilt wird (von 6 auf 2 Stunden), die Anzahl der Wasserhähne mit 3 multipliziert werden muss, was zu folgendem Ergebnis führt: $4 \cdot 3 = 12$ Wasserhähne. Diese Strategie betont das relationale Denken und unterstützt einen proportionalen Denkansatz, ohne auf formelhafte oder abstrakte Methoden zurückzugreifen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, Beziehungen zu verstehen, in denen Größen in entgegengesetzte Richtungen interagieren, ist ein wichtiger Aspekt des flexiblen multiplikativen Denkens. Im Gegensatz zu direkten Proportionen erfordern inverse Beziehungen eine andere Art von Strukturbewusstsein. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept hilft die Beherrschung dieser Fähigkeit den Schülern, ihr quantitatives Denken zu erweitern und bereitet sie auf fortgeschrittene Themen wie Arbeitsprobleme, Raten und funktionales Denken vor. Situationen wie diese fördern auch die Fähigkeiten der Schüler, reale Beziehungen mithilfe mathematischer Werkzeuge zu modellieren und zu verstehen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Einige Schüler*innen könnten das Szenario fälschlicherweise als einen Fall direkter Proportionalität interpretieren und davon ausgehen, dass eine Verkürzung der Zeit auch zu einer Verringerung der

Anzahl der Wasserhahndrehungen führen sollte – was möglicherweise zu falschen Antworten wie 1 Drehung oder 2 Drehungen führt.

Andere wenden möglicherweise arithmetische Strategien inkonsistent an oder kehren die Proportionalität um, indem sie die Anzahl der Drehungen dividieren, anstatt sie zu erhöhen.

Ein häufiges Missverständnis besteht darin, die Situation additiv statt multiplikativ zu behandeln (z. B. „2 ist 4 weniger als 6, also 4 Klicks abziehen“). Diese Muster deuten auf eine mangelnde Vertrautheit mit inversen Strukturen und der Rolle der Skalierung in entgegengesetzte Richtungen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen? Der Unterricht kann mit Anschauungsmitteln oder konkreten Beispielen beginnen, die zeigen, wie mehr Menschen oder Geräte, die zusammenarbeiten, eine Aufgabe schneller erledigen können. Die Verwendung von doppelten Zahlenstrahlen oder strukturierten Tabellen wie der oben gezeigten hilft, die multiplikativen Beziehungen deutlich zu machen.

Es ist auch nützlich, gezielte Fragen zu stellen, wie z. B. „Was passiert, wenn du in der Hälfte der Zeit fertig sein musst?“ oder „Wie verändert sich die Zeit, wenn du die Anzahl der Wasserhahndrehungen verdoppelst?“ Die Bereitstellung von paarweisen Vergleichsaufgaben – eine direkte und eine inverse – kann helfen, strukturelle Unterschiede hervorzuheben. Die Schüler*innen sollten dazu angeregt werden, ihre Überlegungen laut zu erklären und verschiedene Lösungswege zu vergleichen.

Aufgabe 2.3: Identifizieren proportionaler Beziehungen in tabellarischen Darstellungen

Überprüfe, ob bei der Tabelle der Preis proportional zur Anzahl der Kuchen ist.
Kreuze an, ob ein proportionaler Zusammenhang zwischen Kuchen und Preis vorliegt oder nicht.

a) Tabelle 1

Anzahl Kuchen	1	2	5
Preis	5	10	50

☐ proportional

☑ nicht proportional

b) Tabelle 2

Anzahl Kuchen	10	20	30
Preis	34	54	64

☐ proportional

☑ nicht proportional

c) Tabelle 3

Anzahl Kuchen	1	5	9
Preis	3	15	27

☑ proportional

☐ nicht proportional

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, tabellarische Daten zu analysieren, um festzustellen, ob zwischen zwei Größen ein proportionales Verhältnis besteht. In jeder der drei Tabellen sollen die Lernenden untersuchen, ob das Verhältnis zwischen den Spalten durch einen konstanten Multiplikationsfaktor beschrieben werden kann, der das bestimmende Merkmal der direkten Proportionalität ist. Die Schüler*innen müssen ein Kreuz setzen, wenn die Tabelle direkt proportional ist.

Um diese Aufgabe erfolgreich zu lösen, hier einige Beispiele:

- Überprüfen, ob die Quotienten (z. B. $y : x$) über alle Zeilen hinweg konstant sind.
- Überprüfen, ob die „Kreuzmultiplikation“ gleichwertige Produkte ergibt.
- Überprüfen, ob eine konsistente Regel wie „mit 3 multiplizieren” oder „verdoppeln” gilt.

Diese Form der Analyse erfordert die Berücksichtigung der numerischen Struktur und der zugrunde liegenden multiplikativen Muster, nicht nur der oberflächlichen Merkmale.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis proportionaler Beziehungen ist ein grundlegender Bestandteil des funktionalen und algebraischen Denkens. Im DiToM-Rahmenwerk unterstützt diese Aufgabe die Entwicklung des relationalen Denkens, insbesondere das Erkennen von Strukturen in Daten. Die Fähigkeit, zu bestimmen, ob eine Beziehung proportional ist, bildet eine wesentliche Grundlage für die Interpretation linearer Funktionen, Skalierungsprobleme und grafischer Darstellungen. Sie fördert auch die Flexibilität beim Arbeiten mit verschiedenen Darstellungsformen – Tabellen, Grafiken, verbalen Beschreibungen und Gleichungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen behandeln Beziehungen möglicherweise als proportional, wenn sie oberflächliche Zunahmen feststellen (z. B. „beide Zahlen werden größer“), ohne die Konstanz des Verhältnisses zu überprüfen. Andere vergleichen möglicherweise absolute Unterschiede anstelle von Verhältnissen und verwechseln dabei additives mit multiplikativem Denken. Wenn beispielsweise beide Werte um 2 zunehmen, könnten Schüler*innen fälschlicherweise auf Proportionalität schließen. Fehler können auch durch unachtsames Rechnen entstehen (z. B. durch falsche Division oder das Überspringen von Werten).

Diese Muster spiegeln unterentwickelte Fähigkeiten im Vergleich durch Multiplikation, in der Interpretation von Verhältnissen und in der symbolischen Verallgemeinerung wider. In einigen Fällen könnten Schüler*innen eine nicht proportionale Tabelle aufgrund einfach aussehender Zahlen falsch klassifizieren oder alle Tabellen überkreuzen, um eine Analyse zu vermeiden. Solche Tendenzen unterstreichen die Notwendigkeit stärkerer Strukturierungsstrategien und mehr Selbstvertrauen bei der Überprüfung.

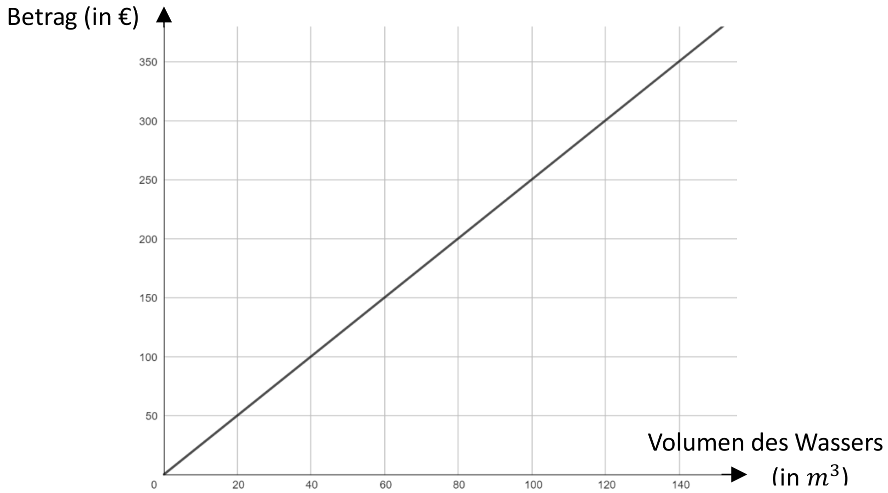
Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Eine wirksame Unterstützung umfasst die Bereitstellung von Hilfsmitteln für die Schüler*innen, mit denen sie die Proportionalität systematisch überprüfen können, z. B. durch die Berechnung von Verhältnissen Zeile für Zeile, die Verwendung von Einheitsratenanalysen oder Anschauungsmittel wie doppelte Zahlenstrahlen.

Lehrer*innen können vorführen, wie man Ergebnisse verbal erklärt („Da $6 : 2 = 3$ und $9 : 3 = 3$ ist, ist das Verhältnis konstant“) und die Schüler*innen dazu ermutigen, bei der Analyse von Tabellen Checklisten zu verwenden. Paarweise Diskussionsaufgaben, bei denen die Schüler*innen verteidigen, ob eine Tabelle proportional ist oder nicht, können das logische Denken vertiefen. Die Verknüpfung von Tabellen mit realen proportionalen Szenarien (z. B. Rezepte, Preise, Geschwindigkeiten) hilft, das Verständnis zu festigen und den Transfer zu fördern.

Aufgabe 2.4: Arbeiten mit Grafiken in einem proportionalen Kontext

Auf dem Diagramm ist folgendes zu sehen:

- *Volumen des Wassers (in m^3) auf der x-Achse*
- *Betrag (in €) auf der y-Achse*



a) Bestimme, wie viele m^3 Wasser man für 200 € bekommt.

Antwort: 80 m³ m^3

b) Bestimme den Preis für 300 m^3 Wasser.

Antwort: 750 € €

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese zweiteilige Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, ein lineares Diagramm zu interpretieren und anzuwenden, das eine proportionale Beziehung darstellt.

In Teil a) besteht die Aufgabe darin, einen Wert direkt aus dem Diagramm abzulesen: Es muss ermittelt werden, wie viele Kubikmeter Wasser für 200 € erhältlich sind.

In Teil b) muss die Schüler*in den Preis für 300 m³ Wasser bestimmen – einen Wert, der über den sichtbaren Bereich des Diagramms hinausgeht – und muss daher auf der Grundlage der im Diagramm beobachteten Änderungsrate berechnen. Die Schlüsselkompetenz besteht darin, die grafische Veranschaulichung mit dem zugrunde liegenden proportionalen Denken zu verbinden und zwischen dem Lesen des Diagramms und der modellbasierten Extrapolation zu unterscheiden.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Lesen und Interpretieren von Diagrammen ist eine zentrale mathematische Kompetenz. Diese Aufgabe schlägt eine Brücke zwischen der visuellen Dateninterpretation und dem funktionalen Denken. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept fördert diese Art von Aufgabe die folgenden Fähigkeiten: Verständnis der Steigung als Rate, Verwendung eines Diagramms als Entscheidungshilfe, Übersetzung zwischen grafischen, numerischen und verbalen Darstellungen. Darüber hinaus unterstützt diese

Fähigkeit Kompetenzen im Bereich der mathematischen Modellierung, insbesondere beim Erkennen, wann Daten durch proportionales Denken statt durch Schätzungen erweitert werden müssen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
In Teil a) könnten die Schüler*innen die Achsen falsch lesen (z. B. Werte aufgrund ungewohnter Skalierung falsch ausrichten) oder zwischen Punkten falsch interpolieren. Wenn sie missverstehen, dass der Graph eine kontinuierliche Beziehung darstellt, beziehen sie sich möglicherweise nur auf beschriftete Gitterwerte und überspringen Zwischenpunkte.

In Teil b) könnten einige Schüler*innen versuchen, visuell zu extrapolieren, obwohl der Graph bei $140\,m^3$ endet, was zu ungenauen oder spekulativen Antworten führt. Andere erkennen möglicherweise die lineare Struktur nicht und greifen auf Vermutungen oder irrelevante Strategien zurück. Ein weiterer typischer Fehler ist die Fehlinterpretation der Steigung – beispielsweise die Annahme, dass sie nichtlinear ansteigt oder sich außerhalb des sichtbaren Bereichs unvorhersehbar verändert. Diese Schwierigkeiten können auf Verständnislücken in Bezug auf proportionales Wachstum, lineare Extrapolation oder Konventionen zum Lesen von Graphen (wie gleiche Skalierung und Ausrichtung der Gitterlinien) zurückzuführen sein.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Eine gezielte Unterstützung sollte mit abgestützten Übungen zum Lesen von Grafiken beginnen, die die Schüler*innen dazu anleiten, die Werte auf beiden Achsen korrekt auszurichten, konstante Raten zu erkennen und Lineale oder Pauspapier zu verwenden, um die Orientierung beizubehalten.

Bei der Extrapolation (Teil b) sollte der Unterricht den Schwerpunkt darauflegen, wie man die Einheitsrate aus der Grafik ermittelt (z. B. $1\,€\,pro\,m^3$; $5\,€\,pro\,20\,m^3$) und diese Beziehung dann numerisch oder über in einer Tabelle zu erweitern. Die Lehrkräfte könnten die Schüler*innen auch dazu ermutigen, in Worten auszudrücken, „was der Graph aussagt“ (z. B. „pro 20 Kubikmeter steigen die Kosten um $50\,€$“), um so die verbal-numerisch-visuellen Verbindungen zu verstärken. Der Vergleich des Graphen mit der entsprechenden Gleichung oder der Verhältnis-Tabelle stärkt ebenfalls den flexiblen Zugang zur zugrunde liegenden Struktur.

Aufgabe 2.5: Lösen einer Divisionsaufgabe im Alltag

In einem Lagertank befinden sich 810 Liter Wasser.
Jeden Tag werden 30 Liter Wasser aus dem Tank entnommen.

Berechne, nach wie vielen Tagen der Tank leer sein wird.

Antwort: Nach 27 Tagen

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit, eine Divisionsaufgabe in einem zeitbasierten Kontext zu lösen, bei der eine Gesamtmenge (810 Liter Wasser) mit einer konstanten täglichen Rate (30 Liter pro Tag) verbraucht wird. Die Frage lautet, wie viele gleiche tägliche Entnahmen erforderlich sind, bis der Speichertank vollständig leer ist. Dazu muss die Division als „wie oft passt 30 in 810" oder gleichwertig interpretiert werden:

$810 : 30 = 27\,Tage$

Diese Interpretation erfordert ein Verständnis der wiederholten Subtraktion (oder Addition) über einen bestimmten Zeitraum hinweg und die Fähigkeit, einen realen Vorgang in eine symbolische Operation zu übersetzen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Im Rahmen des DiToM-Modells unterstützt diese Aufgabe Schlüsselkompetenzen im Bereich des multiplikativen Denkens, des funktionalen Denkens und der grundlegenden algebraischen Strukturierung. Die Schüler*innen müssen die zugrunde liegende Regelmäßigkeit („30 Liter pro Tag") erkennen und auf einen wiederholten Prozess übertragen. Dies stärkt auch das Verständnis von Raten, Zeitmodellierung und der Interpretation der Division in nicht-räumlichen, prozessorientierten Kontexten. Ein solches Denken bildet die Grundlage für das spätere Lernen in den Bereichen lineare Funktionen, Wachstumsmuster und Differenzengleichungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
In der Praxis gehen viele Schüler*innen die Aufgabe mit den folgenden Strategien an:

- Wiederholte Subtraktion: Immer wieder 30 von 810 subtrahieren und die Schritte zählen.
- Wiederholte Addition: Jedes Mal 30 addieren, bis 810 erreicht ist, dann die Anzahl der Schritte zählen.
- Schätzfehler: Springen zu plausibel klingenden Zahlen wie 30 oder 25.
- Rechenfehler bei der Durchführung der schriftlichen Division oder Verwechslung von Dezimalstellen.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Unterstützung sollte sich darauf konzentrieren, den Schüler*innen zu helfen, ein internes Modell der gleichmäßigen Aufteilung über die Zeit hinweg zu entwickeln. Visuelle Hilfsmittel wie in gleiche Teile unterteilte Balken, Zahlenstrahlen oder Kalender können das Verständnis erleichtern. Lehrer*innen können die Schüler*innen dazu ermutigen, die Situation mit Divisionsgleichungen darzustellen und zu erklären, was jede Zahl bedeutet. Die Verbindung dieses Problems mit alltäglichen Routinen (z. B. täglicher Wasserverbrauch, Mahlzeitenportionen, Tagesbudget) kann die Vertrautheit erhöhen. Die Betonung strategischer Gruppierungen, wie z. B. die Aufteilung in 10-Tage-Einheiten ($10 \cdot 30 = 300$), fördert effizientes Denken und die Kontrolle der Schätzung

Aufgabe 2.6: Kombination von fixen und variablen Kosten im Alltag

Sven hat 15 Freunde zu seiner Geburtstagsfeier eingeladen.

Er muss 50 € für den Partyraum bezahlen und zusätzlich 10 € für jeden eingeladenen Freund.

Wie viel muss Sven für seine Geburtstagsfeier insgesamt bezahlen?

Antwort: __200__ €.

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, grundlegende algebraische Modelle und Grundrechenarten im Alltag mit festen und variablen Kosten anzuwenden. Den Schüler*innen wird mitgeteilt, dass Sven 50 € für ein Spielzimmer und zusätzlich 10 € für jeden eingeladenen Freund ausgibt. Die Aufgabe besteht darin, die Gesamtkosten für die Geburtstagsfeier zu ermitteln.

Die erwartete Strategie lautet:

1. Berechnen der variablen Kosten: $15\ Freunde \cdot 10\ € = 150$
2. Die Fixkosten hinzufügen: $150\ € + 50\ € = 200\ €$ Gesamtkosten

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Diese Aufgabe bildet eine wichtige Grundlage für funktionales Denken und frühe Algebra, insbesondere für das Konzept linearer Modelle. Bei DiToM unterstützt sie die Entwicklung mathematischer Modellierungsfähigkeiten, der operativen Flüssigkeit und der Interpretation symbolischer Ausdrücke in angewandten Situationen. Das Verständnis des Unterschieds zwischen festen und variablen Komponenten ist für viele reale Kontexte zentral, beispielsweise für die Budgetierung, Preisgestaltung und Ressourcenplanung. Darüber hinaus stärkt diese Aufgabe die Fähigkeit der Schüler, mehrstufige Probleme zu strukturieren, was ein wesentliches Merkmal der mathematischen Problemlösung auf mittlerem Niveau ist.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiger Fehler besteht darin, dass die Schüler*innen nur die variablen Kosten berechnen und die Fixkosten weglassen. Das zeigt ein unvollständiges Verständnis der Aufgabenstruktur, bei der nur eine Komponente (oft die am einfachsten zu berechnende) berücksichtigt wird. Andere Schüler*innen kehren möglicherweise die Schritte um (z. B. 50 € von 150 € subtrahieren) oder missverstehen die Rolle der einzelnen Zahlen. Einige multiplizieren möglicherweise fälschlicherweise alle Werte miteinander oder versuchen unnötige Grundrechenarten, was auf ein schwaches Verständnis der Aufgabenstellung hindeutet. Diese Fehler deuten auf Defizite beim Lesen mehrstufiger Aufgaben, beim Zuordnen realer Größen zu Grundrechenarten und beim Integrieren verschiedener numerischer Komponenten in eine einzige kohärente Lösung hin.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Lehrer*innen können die Lernenden unterstützen, indem sie die Aufgabe visuell strukturieren, z. B. mithilfe einer Tabelle mit zwei Zeilen (fixe und variable Kosten) oder indem sie die Gesamtkosten als Balken in zwei Teile unterteilt darstellen. Durch explizites Unterrichten und Üben der Struktur „Gesamt = fix + variabel" in verschiedenen Kontexten kann Vertrautheit mit linearen Modellen aufgebaut werden.

Aufgabe 3.1: Umrechnung eines Bruchs in einen Prozentsatz

Kreuze an, welcher Prozentsatz dem Bruch $\frac{3}{5}$ entspricht.

- ☐ 0,6%
- ☐ 6%
- ☐ 35%
- ☑ 60%

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler, einen bekannten Bruch (drei Fünftel) in einen Prozentsatz umzuwandeln. Um sie zu lösen, müssen die Schüler*innen die Beziehung zwischen Brüchen und Prozentsätzen verstehen und erkennen, dass:

$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\ \%$ $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\ \%$

Dazu muss entweder zuerst der Bruch in eine Dezimalzahl umgewandelt werden (durch Division des Zählers durch den Nenner) und dann mit 100 multipliziert werden, oder es müssen bekannte Bruch-Prozent-Äquivalenzen angewendet werden. Die Aufgabe erfordert somit sowohl Rechenfertigkeiten als auch ein konzeptionelles Verständnis von proportionalen Darstellungen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Umrechnung zwischen Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten ist in vielen Situationen des täglichen Lebens grundlegend (z. B. bei der Interpretation von Statistiken, Rabatten oder Datenvergleichen). Im Rahmen des DiToM-Modells fördert diese Fähigkeit das Verständnis rationaler Zahlen, die Flexibilität im Umgang mit Zahlen und die symbolische Übersetzung. Sie bereitet die Schüler*innen auf Aufgaben vor, die Prozentwachstum, Vergleiche und proportionales Denken in der Algebra und Datenkompetenz beinhalten. Die Beherrschung dieses Bereichs stärkt auch das Selbstvertrauen beim Umgang mit verschiedenen Darstellungen von Teilen und Ganzem, was in allen Bereichen der Mathematik entscheidend ist.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Viele Schüler*innen behandeln den Bruch fälschlicherweise als Dezimalzahl oder verwechseln die Rollen von Zähler und Nenner. Zum Beispiel:

- Die Auswahl von 0,6 % deutet darauf hin, dass die Schüler*innen 0,6 fälschlicherweise als bereits vorhandene Prozentzahl interpretieren.
- Die Wahl von 6 % ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass die Dezimalstelle einmal falsch verschoben wurde.
- 35 % kann aus einer Verwechslung von drei Fünfteln resultieren.

Diese Fehler deuten auf eine Verwirrung zwischen relativen Werten, der Verschiebung von Dezimalstellen und der Bedeutung von Prozent („pro Hundert“) hin. Sie zeigen, dass ein besseres Verständnis dafür erforderlich ist, wie Brüche auf die hundertbasierte Skala der Prozentsätze abgebildet werden.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen? Lehrer*innen können die Lernenden unterstützen, indem sie Anschauungsmittel (z. B. $100er$-Gitter, Kreisdiagramme) verwenden, um zu zeigen, wie Brüche wie $\frac{3}{5}$ dann 60 schraffierten Quadraten von 100 Quadraten insgesamt entsprechen. Strukturierte Aktivitäten, bei denen häufig verwendete Referenzbrüche wiederholt in Prozent umgerechnet werden (wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$), können Vertrautheit schaffen und das Verständnis festigen.

Die Aufforderung an die Schüler*innen, immer zuerst in eine Dezimalzahl umzuwandeln und dann mit 100 zu multiplizieren, bietet eine zuverlässige Routine. Zahlenstrahlen und Prozentbalken können das Verständnis für äquivalente Darstellungen weiter vertiefen. Mündliche Erklärungen („Drei von fünf entspricht wie vielen von hundert?“) helfen, das proportionale Denken zu festigen.

Aufgabe 3.2: Berechnung einer prozentualen Steigerung

Ein Preis von 30 € wird um 50% erhöht. Kreuze den Preis nach der Erhöhung an.

- ☐ 80 €
- ☑ 45 €
- ☐ 35 €
- ☐ 15 €

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe prüft, ob die Schüler*innen in der Lage sind, eine prozentuale Erhöhung eines gegebenen Basiswerts richtig zu interpretieren und anzuwenden. Der Ausgangswert beträgt 30 und die Anweisung lautet, diesen Wert um 50 % zu erhöhen. Um zur richtigen Lösung zu gelangen, müssen die Schüler*innen berechnen, wie viel $50\ \%\ von\ 30$ sind, und diesen Wert dann zum ursprünglichen Betrag addieren.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Fähigkeit, prozentuale Erhöhungen zu berechnen und zu interpretieren, ist sowohl im Alltag als auch in fortgeschrittenen mathematischen Kontexten eine Kernkompetenz. Sie ist unerlässlich, um Veränderungen bei Preisen, Bevölkerungswachstum, Finanzzinsen und statistischen Vergleichen zu verstehen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept unterstützt prozentuales Denken die Entwicklung von funktionalem Denken, proportionalem Denken und der Integration multiplikativer Strukturen über verschiedene Kontexte hinweg. Diese Aufgabe stärkt insbesondere die Flexibilität der Schüler*innen beim Wechsel zwischen additiver und multiplikativer Interpretation von Prozenten und trägt zu ihrer Fähigkeit bei, Verallgemeinerungen vorzunehmen und strukturbasiertes Denken auf zunehmend abstrakte Probleme anzuwenden.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiges Missverständnis, das in den Antworten der Schüler*innen zu beobachten ist, ist die Verwechslung von absoluten Werten und relativen Prozentwerten. Einige Schüler*innen addieren fälschlicherweise $50\ zu\ 30$ statt $50\ \%\ von\ 30$ und kommen so zu einer falschen Antwort von 80. Das deutet auf ein Missverständnis der grundlegenden Natur von Prozenten als relative Maßeinheit hin. Eine andere Gruppe von Schüler*innen könnte 15 als Antwort wählen, weil sie die Aufgabe fälschlicherweise so interpretieren, dass lediglich $50\ \%\ von\ 30$ gefragt sind, anstatt den gesamten erhöhten Wert zu berechnen. Es ist auch möglich, dass die Schüler*innen die Formulierung der Aufgabe falsch lesen oder falsch interpretieren und davon ausgehen, dass es sich um eine Subtraktions- oder Differenzaufgabe handelt, oder dass sie sich eher auf ihre Intuition als auf strukturierte Berechnungen verlassen. Solche Antworten offenbaren Lücken im konzeptionellen Verständnis, in der Verfahrenssicherheit und im Leseverständnis. Sie können auch auf eine unzureichende Verinnerlichung von Prozentrechnungen als skalierbare multiplikative Prozesse und auf einen Bedarf an mehr angeleiteter Übung bei der Unterscheidung zwischen Teil, Ganzem und Wachstumsrate hinweisen.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Lehrkräfte können eine Hilfestellung bieten, indem sie reale Situationen modellieren, in denen Prozentsteigerungen natürlich vorkommen – wie Preisaufschläge, Lohnerhöhungen oder Bevölkerungswachstum – und so abstrakte Konzepte anhand konkreter Beispiele veranschaulichen.

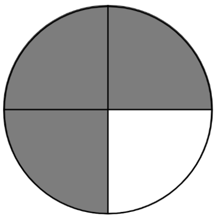
Visuelle Hilfsmittel wie Prozentbalken oder doppelte Zahlenstrahlen können den Schüler*innen helfen, sich vorzustellen, wie eine Steigerung um 50 % die ursprüngliche Menge vergrößert.

Eine klare Anleitung zur Unterscheidung zwischen Basis, Prozentsatz und Ergebnis innerhalb eines strukturierten Rahmens kann Verwirrung vermeiden und ein solideres Verständnis fördern. Darüber hinaus trägt die Verwendung sowohl additiver (z. B. „$50\ \%$ finden und dann addieren") als auch multiplikativer Strategien (z. B. „mit $1{,}5$ multiplizieren") und die Ermutigung der Schüler*innen, die Ergebnisse durch Schätzungen zu überprüfen, dazu bei, die strategische Flexibilität zu fördern.

Aufgabe 3.3: Interpretieren von Kreisdarstellungen und Umrechnen in Prozent

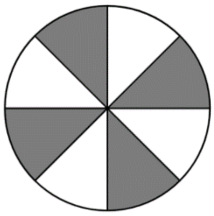
Ein Teil des Kreises ist farbig.
Gib den eingefärbten Anteil des Kreises in Prozent an

a)



Anteil des Kreises: ___75___%

b)



Anteil des Kreises: ___50___%

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Teile eines Ganzen anhand einer visuellen Darstellung – in diesem Fall ein in gleiche Sektoren unterteilter Kreis – zu interpretieren und diese Teile in Prozentzahlen umzuwandeln. Die Aufgabe besteht aus zwei Teilen:

Teil a) zeigt einen Kreis, der in vier gleiche Sektoren unterteilt ist, von denen drei schraffiert sind.

Teil b) zeigt einen Kreis, der in acht gleiche Sektoren unterteilt ist, wobei jeder zweite Sektor schraffiert ist, sodass vier von acht Sektoren schraffiert sind.

In beiden Fällen erfordert die richtige Lösung das Erkennen des schraffierten Anteils des Kreises und dessen Umrechnung in einen Prozentsatz. Diese Aufgabe beinhaltet die Umwandlung visueller Mengen in rationale Zahlen oder Brüche und anschließend in Prozentangaben, wodurch die Kompetenz im Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen unter Beweis gestellt wird.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Umrechnung zwischen Anschauungsmitteln, Brüchen und Prozenten ist eine zentrale Fähigkeit in der Mathematikausbildung. Sie fördert ein tieferes Verständnis von Teil-Ganzes-Verhältnissen, proportionalem Denken und Schätzen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept stärken Aufgaben wie diese die konzeptionelle Flexibilität und die Fähigkeit, mathematische Darstellungen miteinander zu verknüpfen – ein entscheidendes Merkmal der mathematischen Kompetenz. Die Fähigkeit ist auch in Alltagskontexten von großer Bedeutung, beispielsweise bei der Interpretation von Diagrammen, Statistiken und Datenvisualisierungen, in denen Teil-Ganzes-Verhältnissen oft visuell eingebettet und in Prozentzahlen ausgedrückt sind.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiger Fehler, der in beiden Teilen der Aufgabe beobachtet wird, ist, dass die Schüler*innen zwar erkennen, wie viele Teile schattiert sind, diese Zahl dann aber fälschlicherweise als Prozentsatz angeben. In Teil a) könnten die Schüler*innen beispielsweise mit 3 antworten, weil drei von vier Teilen schattiert sind – wobei sie die Anzahl mit dem entsprechenden Prozentsatz verwechseln. Ähnlich schreiben die Schüler*innen in Teil b) oft 4, weil vier von acht Sektoren schattiert sind, und übersehen

dabei, dass der Bruch $\frac{4}{8}$ in einen Prozentsatz umgewandelt werden muss. Diese Fehler spiegeln eine oberflächliche Verarbeitung der visuellen Daten wider, bei der die Schüler*innen die schattierten Segmente zählen, aber die konzeptionelle Umwandlung in Prozent nicht vollständig durchführen. Ein weiteres häufiges Problem besteht darin, dass die Schüler*innen die Regelmäßigkeit in Teil b) möglicherweise nicht erkennen, da die abwechselnd schattierten Sektoren den unmittelbaren visuellen Eindruck von „der Hälfte“ verschleiern. Daher schätzen einige aufgrund des unregelmäßigen Musters fälschlicherweise weniger als $50\ \%$ an. Diese Fehler deuten darauf hin, dass stärkere Fähigkeiten bei der Verknüpfung konkreter und abstrakter Darstellungen erforderlich sind, insbesondere bei der Umrechnung zwischen Zahlen, Brüchen und Prozenten.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Um die Schüler*innen beim Erlernen dieser Fertigkeit zu unterstützen, können Lehrer*innen strukturierte Anschauungsmittel wie 100er-Gitter, Kreisdiagramme oder Bruchbalken einsetzen, um deutlich zu zeigen, wie Bruchteile mit Prozenten zusammenhängen. Wenn die Schüler*innen dazu angehalten werden, zunächst den Bruch zu benennen (z. B. $3\ von\ 4$), bevor sie ihn in einen Prozentsatz umrechnen, wird der Zwischenschritt verdeutlicht. Hilfreich ist auch, mit bekannten Referenzbrüchen (z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$) und den entsprechenden Prozentsätzen zu üben. Lehrer*innen können diesen Prozess laut vorführen: „Es gibt 4 gleiche Teile und 3 sind schraffiert. Das sind also drei Viertel. Wie viel sind drei Viertel in Prozent?“ Aktivitäten, bei denen Anschauungsmittel, Brüche, Dezimalzahlen und Prozentzahlen miteinander in Verbindung gebracht werden, können ebenfalls das Verständnis für verschiedene Darstellungsformen stärken.

Aufgabe 3.4: Rechnen mit negativen Zahlen

Bestimme die fehlende Zahl.

a) $12 - (-5) = \underline{\ 17\ }$

b) $11 \cdot \underline{(-4)} = -44$

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe konzentriert sich auf die Fähigkeit der Schüler*innen, die Auswirkungen von Addition, Subtraktion und Multiplikation mit negativen Zahlen zu verstehen. Sie müssen die Aufgabe unter Berücksichtigung der korrekten Interpretation der Vorzeichen (+ und −) berechnen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Verständnis des Verhaltens negativer Zahlen bei grundlegenden Grundrechenarten ist für die Beherrschung der Algebra unerlässlich. Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen die bekannte Vorzeichenregel anwenden und dabei die Fähigkeit entwickeln, vorzeichenbehaftete Ausdrücke nicht nur anhand von Verfahren, sondern auch auf der Grundlage ihres Strukturverständnisses im Kopf zu manipulieren. Im Rahmen des DiToM-Konzepts fördert diese Aufgabe das Symbolverständnis, die strukturelle Flexibilität und das konzeptionelle Denken über Grundrechenarten und Größenordnungen – grundlegende Elemente für das Lösen von Gleichungen, das Verstehen von Funktionsverhalten und das Auswerten algebraischer Ausdrücke.

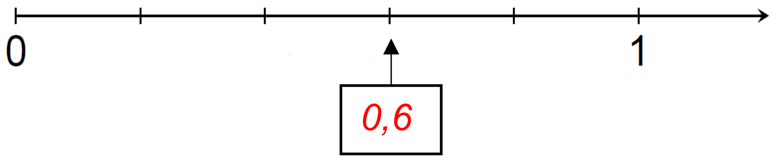
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
In Teil a subtrahieren viele Schülerinnen fälschlicherweise $5\,von\,12$ und interpretieren die Subtraktionszeichen falsch. In Teil b fügen einige Schüler*innen möglicherweise eine positive ganze Zahl ein, ohne die Vorzeichenregel für die Multiplikation zu berücksichtigen. Alternativ verbinden einige die Subtraktion möglicherweise nur mit „kleineren" Ergebnissen und versäumen es, strukturell zu argumentieren. Solche Fehler deuten auf ein fragiles Verständnis der Rechenregeln mit negativen Zahlen hin, insbesondere in Fällen mit verschachtelten Vorzeichen oder Klammern. Sie zeigen auch, ob die Schüler*innen in der Lage sind, von einem Ergebnis rückwärtszudenken – eine wesentliche Fähigkeit in der Algebra.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Schüler*innen profitieren von Aufgaben, die Vorzeichen-Kombinationen (z.B. $(+)(+), (+)(-), (-)(+), (-)(-)$) explizit mit Anschauungsmitteln wie Zahlengerade oder farbigen Zählsteinen kontrastieren. Lehrer*innen können strukturierte Satzmuster vorgeben, z. B. „Das Subtrahieren einer negativen Zahl ist dasselbe wie …", und den Lernenden helfen, Grundrechenarten zu verbalisieren. Wenn die Schüler*innen Beispiele erstellen, bei denen sie die Vorzeichen bewusst variieren und das Ergebnis beobachten, kann dies dazu beitragen, die Muster zu verinnerlichen. Insbesondere in Teil b hilft die Einführung des Multiplikationsdreiecks ($Faktor\ 1\ x\ Faktor\ 1\ =\ Produkt$) und das Rückwärtsrechnen vom Produkt den Schüler*innen, fehlende Vorzeichen logisch abzuleiten. Letztendlich kann regelmäßiges Üben von Umkehraufgaben – vom Ergebnis zum Eingabewert – ein solideres algebraisches Denken aufbauen.

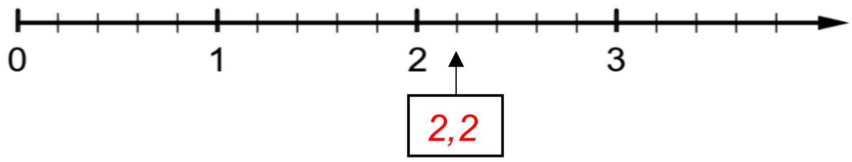
Aufgabe 3.5: Symbolische Darstellung von Zahlen auf einem Zahlenstrahl

Schreibe die gesuchte Zahl, die am Zahlenstrahl markiert ist, in das Kästchen.

a)



b)



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe zielt auf die Fähigkeit der Schüler*innen ab, eine in Teilintervalle unterteilte Zahlengerade zu interpretieren und eine Bruch- oder Dezimalzahl entsprechend ihrer relativen Position zwischen 0 und 1 (oder darüber hinaus) zu platzieren. Die Schüler*innen müssen die Unterteilungen der Zahlengeraden analysieren, die Einheit bestimmen und die richtige Bruch- oder Dezimalzahl identifizieren, die einen bestimmten Punkt markiert. Dies erfordert ein Verständnis von Brüchen als Zahlen mit Größenordnungen und nicht nur als Teil-Ganzes-Beziehungen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, Brüche auf einem Zahlenstrahl zu lokalisieren, ist eine wichtige mathematische Schlüsselkompetenz, da sie eine Verlagerung des Verständnisses von Brüchen als Teile von Objekten hin zu Brüchen als Zahlen auf einer kontinuierlichen Skala widerspiegelt. Diese räumliche Interpretation von Brüchen bildet die Grundlage für das Vergleichen, Ordnen und Rechnen mit Brüchen. Im Rahmen von DiToM gelten die Schätzung und Positionierung auf dem Zahlenstrahl als starke Indikatoren für konzeptionelle Klarheit. Untersuchungen (z. B. Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) zeigen, dass Schüler*innen, die die metrische Struktur der Zahlengeraden verstehen, später eher Erfolg in Arithmetik, Algebra und Geometrie haben. Darüber hinaus bietet die Zahlengerade ein einheitliches Modell, das den Übergang zwischen natürlichen Zahlen, Brüchen, Dezimalzahlen und negativen Zahlen unterstützt.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Schüler*innen verlassen sich oft auf das Zählen von Markierungen und gehen dabei von einer Dezimalunterteilung der Einheit aus, anstatt über die Größe des Bruchteils nachzudenken. Beispielsweise interpretieren sie vier Teilungen fälschlicherweise als „Viertel", unabhängig davon, ob das Ganze in gleiche Teile unterteilt ist oder nicht. Ein weiterer häufiger Fehler ist die falsche Platzierung des Bruchteils – z. B. die falsche Platzierung von $3/4$ bei $2/3$ aufgrund mangelnder proportionaler Argumentation. Einige Schüler*innen raten möglicherweise aufgrund ihrer visuellen Intuition, anstatt den durch die Unterteilungen implizierten Nenner zu berechnen. In fortgeschritteneren Varianten können Schüler*innen Schwierigkeiten haben, wenn die Zahlengerade nicht bei 0 beginnt oder wenn unechte Brüche oder gemischte Zahlen beteiligt sind. Diese Fehler deuten auf eine unzureichende Integration von Größe, Notation und Struktur hin. Es gibt auch Schüler*innen, die eine falsche Dezimalzahl als Lösung angeben.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen? Um die Schüler*innen zu unterstützen, ist es unerlässlich, Zeit in den Aufbau eines soliden mentalen Modells der Zahlenreihe zu investieren, das Brüche und Dezimalzahlen umfasst. Lehrer*innen können interaktive Hilfsmittel wie Faltstreifen, Bruchlineale und digitale Zahlenreihen einsetzen, um das proportionale Denken zu fördern. Der Unterricht sollte sich darauf konzentrieren, wie man die Größe eines Einheitsintervalls bestimmt, wie man Bruchteile zählt und wie man diese Schritte mit dem geschriebenen Symbol in Verbindung bringt. Der Vergleich verschiedener Brüche auf derselben Linie hilft dabei, die relationale Größe und Äquivalenz zu verfestigen. Brückenaktivitäten – wie das Zeichnen von Brüchen auf einer Linie, das anschließende Schreiben in symbolischer Form und umgekehrt oder das Herstellen von Beziehungen zu den Schüler*innen bereits bekannten ikonischen Darstellungen (z. B. Kreisanteile) – stärken die repräsentativen Verbindungen.

Aufgabe 3.6: Rechnen mit Brüchen – Grundrechenarten

Berechne:

a) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \underline{\frac{7}{5}}$

b) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{5}{8}}$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\frac{2}{5}}$

d) $\frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \underline{\frac{3}{4}}$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe bearbeiten die Schülerinnen vier Teilaufgaben a) – d), in denen drei Grundrechenarten mit Brüchen vorkommen. Teilaufgabe a) prüft die Addition gleichnamiger Brüche, Teilaufgabe b) die Addition mit unterschiedlichen Nennern. Teilaufgabe c) testet die Multiplikation, während d) den Umgang mit dem Kehrwert bei der Division prüft. Der Schwierigkeitsgrad steigt stufenweise an, sodass erkennbar wird, ob die Schülerinnen die Rechenregeln flexibel anwenden und sicher zwischen den Rechenarten unterscheiden können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das sichere Rechnen mit Brüchen gehört zu den zentralen Grundlagen der Sekundarstufe. Wer diese Fertigkeit beherrscht, kann Brüche in vielfältigen Kontexten nutzen – beim Arbeiten mit Termen und Gleichungen, in der Prozent- und Zinsrechnung oder bei Proportionalitätsaufgaben. Die Aufgabe zeigt, ob Schüler*innen Brüche nach starren Rezepten bearbeiten oder die Struktur der Bruchrechnung verstanden haben. Durch die Kombination einfacher Einstiegsaufgaben mit anspruchsvolleren Beispielen wird deutlich, ob sie beim Wechsel der Rechenart in fehlerhafte Muster zurückfallen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein verbreiteter Fehler ist die Behandlung nach dem Schema „Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner". So entsteht bei a) etwa $\frac{7}{10}$, weil $3 + 4$ und $5 + 5$ gerechnet wird. Bei b) wird oft ohne gemeinsamen Nenner addiert oder fehlerhaft erweitert. In der Multiplikationsaufgabe wird teilweise nur die Zähler multipliziert oder Vorgehensweisen aus der Addition übertragen. Bei der Divisionsaufgaben d) zeigt sich häufig, dass das Konzept „Teilen durch einen Bruch" nicht verstanden ist: Statt mit dem Kehrwert zu arbeiten, wird „Zähler durch Zähler" gerechnet. Fehlende oder falsche Kürzungen weisen zudem auf Unsicherheiten bei äquivalenten Brüchen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Zunächst sollten die verschiedenen Rechenarten klar gegeneinander abgegrenzt werden. Gemeinsam mit den Schüler*innen kann erarbeitet werden, was bei Addition/Subtraktion, Multiplikation und Division jeweils zu tun ist. Eine Gegenüberstellung typischer Beispiele hebt die Besonderheit des gemeinsamen Nenners und die Rolle des Kehrwerts hervor.

Ergänzend sollten Brüche mit Anschauungsmitteln wie Bruchstreifen, Kreisdiagrammen oder dem Zahlenstrahl verknüpft werden. Besonders wirksam ist es, typische Fehlstrategien explizit zu thematisieren und durch Gegenbeispiele zu widerlegen. Wenn das Verständnis vorhanden ist, benötigen viele Kinder Übung zur schrittweisen Automatisierung – zunächst mit gleichnamigen Brüchen, dann mit unterschiedlichen Nennern, weiter mit Multiplikation und schließlich mit Division. Alltagsnahe Kontexte wie das Teilen von Pizzen helfen, die Bruchrechnung an bedeutungsvolle Situationen anzubinden. Sinnvoll ist außerdem, vor dem Rechnen abzuschätzen, ob das Ergebnis größer oder kleiner als 1 bzw. als der Ausgangswert sein wird – so werden grobe Fehler leichter erkannt.

Aufgabe 3.7: Vergleich zwischen Zahlen in Dezimaldarstellung und Brüchen

Kreuze **alle Zahlen** an, die kleiner als $\frac{1}{10}$ sind!

- ☑ $0{,}01$
- ☐ $0{,}10$
- ☑ $0{,}001$
- ☐ 0,101

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe prüft die Fähigkeit, Dezimalzahlen zu vergleichen und verschiedene Darstellungen derselben rationalen Zahl zu verknüpfen. Um korrekt zu antworten, müssen die Schülerinnen und Schüler das Stellenwertsystem sicher beherrschen, den Wert der Dezimalstellen als Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. unterscheiden sowie die unterschiedlichen Darstellungen rationaler Zahlen (dezimal und als Bruch) und die Regeln für den Wechsel zwischen diesen Formen verstehen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, rationale Zahlen in verschiedenen Darstellungen zu vergleichen, ist grundlegend für das Mathematiklernen, da sie die Basis für das Verständnis des Stellenwertsystems im Dezimalsystem bildet und diese Einsicht sowohl mit dem Bruch- als auch mit dem Dezimalsystem verbindet. Die korrekte Zuordnung von Dezimalstellenwerten und deren Verknüpfung mit Bruchdarstellungen ist wichtig, um ein solides Zahlenverständnis auch für sehr kleine Werte zu entwickeln – nützlich für den Umgang mit Größen, Proportionen, Prozent- und Rundungsaufgaben. Außerdem stärkt die Fähigkeit, Brüche und Dezimalzahlen zu verknüpfen, die operative Flexibilität und bereitet auf weiterführende mathematische Inhalte wie den Umgang mit rationalen Zahlen in komplexeren Kontexten vor.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Die häufigsten Fehler betreffen das falsche Verständnis des Stellenwerts von Dezimalstellen, oft verursacht durch Unsicherheiten im Umgang mit dem Stellenwertsystem. Manche Schülerinnen und Schüler könnten beispielsweise meinen, dass $0{,}10$ größer als $0{,}1$ ist, weil sie Dezimalzahlen als zwei natürliche Zahlen betrachten – eine vor und eine nach dem Komma. Diese Fehlvorstellung führt dazu, $10\ und\ 1$ zu vergleichen, statt 10 Hundertstel und ein Zehntel zu erkennen, und daraus zu schließen, dass $0{,}10$ größer ist als $0{,}1$, weil 10 größer als 1 ist. Ein weiterer häufiger Fehler ist die Annahme, dass $0{,}101$ kleiner als $0{,}1$ sei, weil die erste Zahl mehr Dezimalstellen hat und Schülerinnen und Schüler denken könnten: „Je weiter die Stellen vom Komma entfernt sind, desto kleiner ist ihr Wert“, wobei sie sich nur auf die Anzahl der Stellen und nicht auf deren Wert beziehen.

Welche Art von Unterstützung könnte man geben, wenn sich bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Um Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe zu unterstützen, sind visuelle Darstellungen hilfreich, um die Beziehungen zwischen Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln usw. zu verdeutlichen. Dazu kann man die Lernenden bitten, ein A4-Blatt in zehn gleich große Teile zu teilen und eines dieser Teile wiederum zu unterteilen, sodass Hundertstel und in einem weiteren Schritt

Tausendstel derselben Einheit entstehen. Auch Millimeterpapier kann in diesem Zusammenhang sinnvoll sein – vorzugsweise jedoch erst nach der beschriebenen Erkundungsarbeit, bei der die Schülerinnen und Schüler die Unterteilungen selbst vornehmen. Darüber hinaus ist gezielte Arbeit am Stellenwert durch den Vergleich verschiedener Darstellungen auf dem Zahlenstrahl hilfreich, wobei durch schrittweises „Hineinzoomen" in einen bestimmten Wertebereich (z.B. $zwischen\ 0\ und\ 1$) jeweils neue Dezimalstellen sichtbar werden. Dies unterstützt das Verständnis und beugt typischen Fehlern vor. Schließlich kann das Verbalisieren durch Aussagen wie „$0{,}01$ bedeutet ein Hundertstel" oder „$0{,}001$ bedeutet ein Tausendstel" das Verständnis für den Stellenwert weiter stärken.

V. Hinweise zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse

Um Ihnen bei der Auswertung der Testergebnisse zu helfen, stehen Ihnen verschiedene Tools zum Download zur Verfügung unter:
ditom.org/en/tests-en:

1. Wenn Sie die Tests manuell auswerten möchten, bieten wir Ihnen folgende Hilfsmittel an:

Die folgende Skala liefert erste Anhaltspunkte dafür, in welchen Bereichen die Schüler*innen am wahrscheinlichsten Punkte erzielen:

$\boldsymbol{n \leq 8}$ **Punkte → Gruppe A:** Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.

$\boldsymbol{9 \leq n \leq 17}$ **Punkte → Gruppe B:** Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.

$\boldsymbol{n \geq 18}$ **Punkte → Gruppe C:** Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Punktebereich	**Das können Schüler*innen in dieser Klasse bereits**
$\boldsymbol{n \leq 8}$	natürliche Zahlen auf dem Zahlenstrahl eintragen, natürliche Zahlen vergleichen, grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit natürlichen Zahlen, grundlegende Multiplikations- und Divisionsaufgaben mit natürlichen Zahlen
$\boldsymbol{9 \leq n \leq 17}$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: erweiterte Grundrechenaufgaben mit natürlichen Zahlen, Grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Dezimalzahlen, Brüche als Teil eines Ganzen verstehen, grundlegende Aufgaben zum Lösen von Gleichungen können bearbeitet werden
$\boldsymbol{n \geq 18}$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: zeigen ein adäquates Bruchzahl- und Dezimalzahlverständnis, Kompetenz zum Modellieren von Textaufgaben, Verständnis von ganzen Zahlen, erweiterte Aufgaben zum Lösen von Gleichungen können bearbeitet werden

2. Eine weitere Möglichkeit ist die Auswertung der Ergebnisse in Excel auf Ihrem Computer. Zu diesem Zweck können Sie Folgendes herunterladen:

   Eine **vorprogrammierte Excel-Datei** mit zwei Arbeitsblättern, zwischen denen Sie über die Registerkarten unten links wechseln können. Geben Sie im Arbeitsblatt mit dem Titel „qualitativ" einfach in die entsprechende Spalte für jedes Kind die Zahlen ein, die das Kind in seinem Testheft als Antworten in jeder Teilaufgabe eingetragen hat. Wenn ein Lernender eine Aufgabe leer gelassen hat, geben Sie bitte 999 ein. In der Exceltabelle ist in der ersten Zeile ein Beispiel angegeben. Wenn Sie mit der Eingabe der Daten fertig sind, wechseln Sie zum Arbeitsblatt „Auswertung". Das Programm erstellt Ihnen eine Auswertung Ihrer eingetragenen Daten.

Die „kritischen Punkteschwellen" für DiToM 8+ und wie man sie interpretiert

Wie in Abschnitt I erläutert, dient DiToM nicht dazu, Kinder zu kategorisieren. Bitte lesen Sie dazu die Erläuterungen zu den Zielen und Leitprinzipien von DiToM.

Dort finden Sie auch eine detailliertere Erläuterung der „kritischen Punkteschwellen", die auf der Grundlage von Pilotversuchen mit DiToM (für Version 8+, mit 2346 Schüler*innen aus den sieben Partnerländern des Projekts) unter Verwendung der statistischen Methode der Latent Class Analysis (Yin et al. 2025) ermittelt wurden. Diese Methode ermöglicht es, Kinder anhand ihrer Gesamtpunktzahl in DiToM 8+ modellbasiert einer der folgenden drei Gruppen zuzuordnen:

Punktzahlbereich	**Gruppe**
0 bis 8	A – Anzeichen für weitreichende Schwierigkeiten in mehreren Schlüsselbereichen
9 bis 17	B – Anzeichen für Schwierigkeiten in einigen Schlüsselbereichen
ab 18	C – Keine Anzeichen für größere Schwierigkeiten in Schlüsselbereichen

Eine abschließende Anmerkung mit Verweis auf Abschnitt I: Beachten Sie, dass ein Screening nur eine Momentaufnahme liefert. Die Ergebnisse sollten daher mit Ihren eigenen Beobachtungen und Erfahrungen im Unterricht verglichen und gegebenenfalls als Ausgangspunkt für Folgeinterviews mit einzelnen Kindern verwendet werden – um Ihr Verständnis zu vertiefen, zu verfeinern oder zu erweitern und gegebenenfalls Ihre Schlussfolgerungen zumindest teilweise anzupassen.

VI. Literaturhinweise

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). *Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Entwicklung und Bewertung eines Screening-Instruments zur Früherkennung von Risikoschülern im Mathematikunterricht der unteren Sekundarstufe*. In Proceedings of EDULEARN25 Conference. Palma, Spanien.

Greer, B. (1992). Multiplikation und Division als Modelle von Situationen. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbuch zur Forschung über Mathematikunterricht und -lernen* (S. 276–295). New York: Macmillan.

Lamon, S. J. (2007). Rationale Zahlen und proportionales Denken. In F. K. Lester Jr. (Hrsg.), *Zweites Handbuch zur Forschung über Mathematikunterricht und -lernen* (S. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Arithmetik: Grundschule* (8. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics, 106*(3), 447–469.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). Eine integrierte Theorie der Entwicklung von ganzen Zahlen und Brüchen. *Kognitive Psychologie, 62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 909–918.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Information Age.

Vlassis, J. (2004). Das Minuszeichen verstehen oder Flexibilität in Bezug auf „Negativität" entwickeln. *Lernen und Unterrichten, 14*(5), 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012