Co-funded by
the European Union

Freie Universität Bozen
Libera Università di Bolzano
Università Liedia de Bulsan

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Manuale del docente
Screening test 6+

Questo progetto è stato finanziato con il sostegno della Commissione Europea. La presente pubblicazione riflette esclusivamente le opinioni degli autori e la Commissione non può essere ritenuta responsabile per l'uso che potrebbe essere fatto delle informazioni in essa contenute.

Indice

I. Introduzione

L’apprendimento della matematica si fonda su prerequisiti essenziali: in assenza di basi solide, gli studenti incontrano difficoltà nella comprensione dei nuovi argomenti. Il fatto che molti di loro non raggiungano gli standard minimi in matematica compromette la riuscita del percorso scolastico futuro e rende quindi necessario adottare strumenti pratici per una valutazione rapida dello stato di apprendimento, così da poter offrire un supporto mirato. Il Progetto europeo “Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)”, sviluppato grazie alla collaborazione tra diversi Paesi europei, ha messo a punto cinque strumenti di screening volti ad aiutare gli insegnanti a individuare i bisogni specifici della propria classe nei momenti chiave delle transizioni educative.

Gli screening possono essere somministrati con cadenza biennale nei principali momenti di transizione del percorso scolastico:

1. fine della scuola dell’infanzia / inizio della classe prima della scuola primaria;
2. fine della classe seconda della scuola primaria / inizio della classe terza della scuola primaria;
3. fine della classe quarta della scuola primaria / inizio della classe quinta della scuola primaria;
4. fine della classe prima della scuola secondaria di primo grado / inizio della classe seconda della scuola secondaria di primo grado;
5. fine della classe terza della scuola secondaria di primo grado / inizio della classe prima della scuola secondaria di secondo grado.

Ma che cos’è, più in dettaglio, uno screening?

Uno screening è una prova di valutazione che può essere somministrata all’intera classe nel corso di una singola lezione. I suoi risultati forniscono una prima panoramica strutturata dei concetti matematici fondamentali già consolidati e delle aree in cui i singoli studenti potrebbero necessitare di ulteriore supporto.

È importante sottolineare che lo screening non sostituisce una valutazione individuale, di tipo qualitativo, orientata all’analisi dei processi di pensiero matematico dello studente.

Lo screening rappresenta piuttosto un punto di partenza: i risultati ottenuti possono essere successivamente approfonditi attraverso osservazioni mirate, interviste e interventi di sostegno.

Perché è utile?

- Fornisce una rapida panoramica: evidenzia quali abilità fondamentali sono consolidate e in quali ambiti è opportuno prevedere un ripasso o un approfondimento.
- Permette un supporto mirato: consente di individuare gli studenti che potrebbero incontrare difficoltà nel raggiungimento degli standard minimi di matematica di base e di organizzare interventi tempestivi.
- Supporta le decisioni diagnostiche: i risultati dello screening offrono una prima indicazione chiara degli studenti che potrebbero beneficiare di ulteriori approfondimenti diagnostici (ad esempio analisi dettagliate dei compiti o colloqui successivi).
- Facilita le transizioni tra i livelli scolastici: orienta l’attenzione sulle abilità chiave nei passaggi cruciali del percorso educativo.

I test di screening sono progettati per un utilizzo in classe, con modalità di somministrazione e criteri di correzione chiaramente definiti. Gli insegnanti ricevono un quadro sintetico dei risultati della propria classe, corredato da indicazioni sugli studenti che richiedono ulteriori approfondimenti in specifiche aree. Su questa base è possibile pianificare interventi mirati di revisione o di consolidamento.

Il presente manuale offre una guida essenziale all’utilizzo dello strumento di screening, illustrandone finalità, struttura, tipologie di quesiti, criteri di valutazione, modalità di somministrazione e interpretazione dei dati, nonché suggerimenti operativi per il successivo intervento didattico.

L’obiettivo è mettere a disposizione dell’insegnante uno strumento di screening pratico, affidabile e di facile utilizzo, in grado di fornire un orientamento rapido, richiamare l’attenzione su eventuali difficoltà e supportare concretamente un intervento efficace, affinché il maggior numero possibile di studenti possa apprendere la matematica con sicurezza, consapevolezza e fiducia nelle proprie capacità.

II. Che cosa si intende per “abilità matematiche chiave”

Lo sviluppo di test diagnostici richiede una solida base teorica. Nel caso di test di screening brevi, somministrati all’intera classe, ciò implica la necessità di concentrarsi su quelle abilità senza le quali i contenuti disciplinari successivi non possono essere appresi in modo significativo. Seguendo la posizione classica di Gagné e Briggs, ogni nuovo apprendimento si fonda su un insieme minimo di prerequisiti indispensabili: è a questo insieme che si fa riferimento con il termine *competenze matematiche chiave*.

In assenza di tali prerequisiti, l’appropriazione efficace dei nuovi contenuti risulta poco probabile o comunque difficoltosa. In matematica, infatti, gli apprendimenti si strutturano in modo gerarchico e cumulativo; per questo motivo, le attività didattiche devono necessariamente basarsi su ciò che è già consolidato.

Comprensione concettuale: competenze, concetti, abilità e abilità chiave

Nel Progetto DiToM si distingue tra competenze e abilità, concetti che nella pratica didattica risultano strettamente interconnessi. Le competenze riguardano la capacità di agire in modo consapevole in contesti matematici, mentre le abilità fanno riferimento alla prestazione concreta dello studente.

Le abilità chiave, considerate prerequisiti fondamentali per gli apprendimenti futuri, costituiscono il fulcro dello screening, con particolare attenzione agli ambiti dell’aritmetica e dell’algebra, in virtù della loro rilevanza gerarchica e trasversale all’interno della matematica.

Esempi utili per chiarire il concetto di abilità chiave

Livello della scuola primaria: eseguire addizioni in modo strutturato
La risoluzione del quesito $25 + 7$ richiede più che un conteggio passo per passo. Una solida consapevolezza operativa si manifesta quando gli studenti riconoscono relazioni *parte–tutto* (per esempio, 25 e 7 come parti di un intero), scompongono i numeri in modo flessibile (per esempio, $7 = 5 + 2$) e procedono per completamento, basandosi sul raggiungimento della decina successiva (per esempio, $25 + 5 = 30$; poi $30 + 2 = 32$). In questo esempio, concetti (valore posizionale, uguaglianza), competenze (calcolo flessibile, giustificazione del procedimento) e abilità (addizione strutturata) agiscono in sinergia. In assenza di questa abilità chiave, l’accesso ai livelli successivi – quali contesti numerici più ampi o strategie di calcolo più efficienti – risulta significativamente più difficoltoso.

Livello della scuola secondaria di primo grado: gestire l’estensione dei domini numerici
Un solido senso operativo dei numeri naturali (scomposizione, uso delle operazioni inverse, riferimenti al valore posizionale e alla retta dei numeri) costituisce un prerequisito fondamentale per il trasferimento del senso del numero e delle procedure acquisite ai numeri in notazione decimale e alle frazioni (per esempio addizione e sottrazione, approssimazione, stima), consentendo di superare gli ostacoli epistemologici implicati nell’apprendimento dei concetti matematici (Brousseau, 1997).
Lacune in queste abilità chiave conducono spesso a un lavoro prevalentemente procedurale, privo di una comprensione autentica, che a sua volta ostacola il passaggio alle espressioni algebriche, alle equazioni e alle relazioni funzionali. Ciò mette in evidenza il carattere predittivo delle abilità aritmetiche chiave rispetto allo sviluppo delle competenze algebriche.

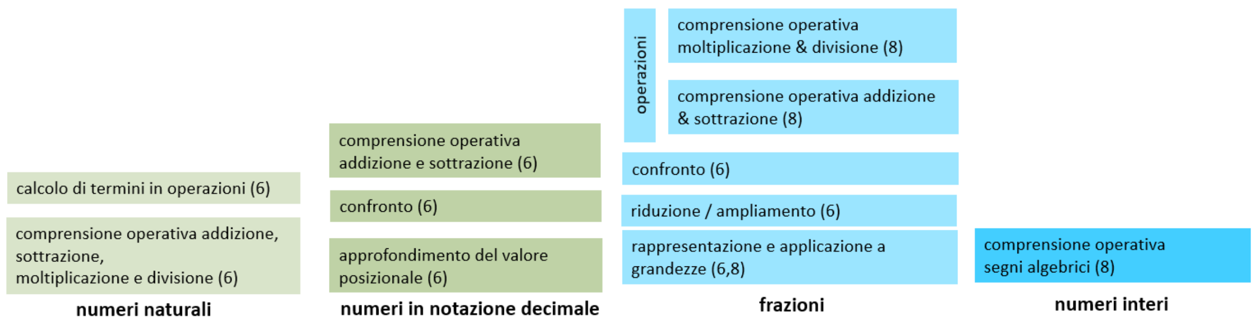
L’accertamento del possesso delle abilità chiave è integrato nei test al fine di:

- tenere conto dei prerequisiti necessari per il passaggio al livello di apprendimento successivo;
- utilizzare compiti strettamente legati ai contenuti, e quindi osservabili attraverso attività brevi;
- fornire agli insegnanti indicazioni su quali studenti necessitino di approfondimenti e di supporto, rilevando precocemente i prerequisiti fondamentali per garantire un apprendimento solido e duraturo.

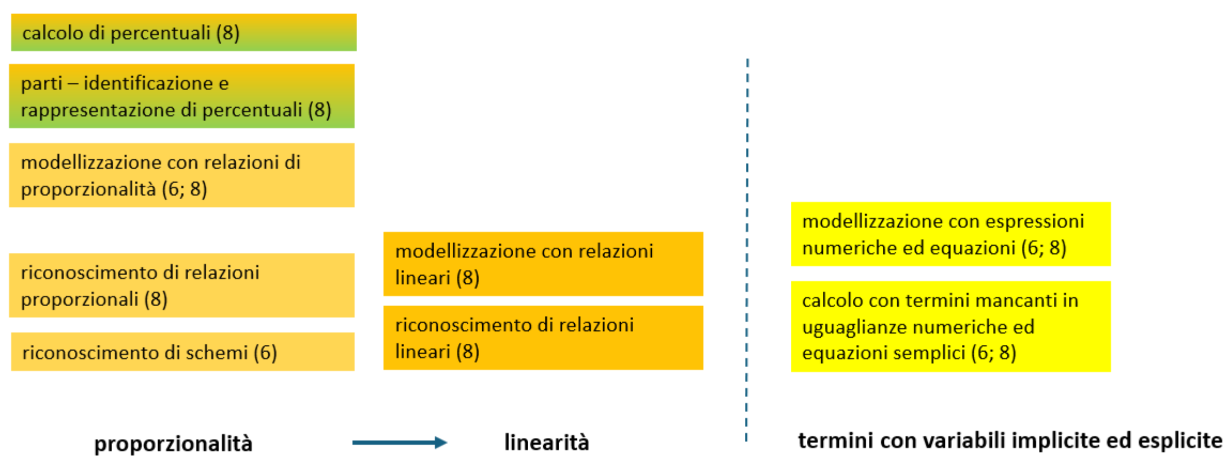
Nel nostro approccio, ogni ambito di contenuto è caratterizzato da specifiche abilità chiave, che possono rappresentare punti di criticità in momenti diversi del percorso di apprendimento, anche al termine di un'unità didattica, quando una determinata abilità risulta necessaria per proseguire efficacemente. Lo sviluppo delle abilità chiave prosegue dunque attraverso i diversi gradi scolastici; individuare tempestivamente eventuali prerequisiti mancanti diventa pertanto essenziale affinché gli studenti possano continuare a costruire conoscenze in modo significativo e consapevole.

III. Struttura dei test di Screening 6+ e 8+

La struttura del test DiToM si basa sui contenuti di aritmetica e algebra, tenendo conto dell'organizzazione gerarchica di questi ambiti del sapere matematico. La costruzione del test si concentra in particolare sull'area dello sviluppo e dell'estensione del campo numerico, inteso come ambito del calcolo tecnico. In questo contesto, le procedure di calcolo vengono affrontate sia in forma non algoritmica sia algoritmica, ma sempre a partire da una comprensione concettuale di base.
Il diagramma sottostante illustra la struttura del test in quest'area per gli screening 6+ e 8+. Il test di screening 6+ si fonda sugli elementi essenziali dello screening 4+, che si concentra sui numeri naturali; nello screening 6+, tali contenuti vengono ripresi e trattati in modo più articolato.
Qualora gli studenti all'inizio della classe prima della scuola secondaria di primo grado (screening 6+) manifestino difficoltà significative nell'ambito dei numeri naturali, è consigliabile fare riferimento al test previsto per la classe quarta della scuola primaria (screening 4+).



Nell'ambito dell'algebra e della pre-algebra viene valutata la comprensione di strutture matematiche semplici, sia in applicazioni interne alla matematica sia in contesti applicativi esterni, con particolare attenzione agli aspetti di proporzionalità e di linearità. Analogamente, vengono prese in considerazione espressioni contenenti numeri o variabili in diverse tipologie di contesti di base, così come la comprensione dei termini algebrici, nella misura in cui essa costituisce parte integrante di una comprensione matematica fondamentale.



IV. Somministrazione del test DiToM

- **Indicazioni generali**
    - Spiegare agli studenti lo scopo del test e rassicurarli.
    - Il test non è valutato con un voto.
    - Serve a fare il punto su ciò che gli studenti sanno già e su ciò che non sanno ancora, al fine di poter predisporre misure di supporto adeguate.
    - È particolarmente importante che gli studenti lavorino individualmente.
    - È utile sottolineare l'importanza di completare tutti i quesiti: più risposte vengono fornite, più sarà facile individuare conoscenze, abilità e difficoltà, e quindi offrire un aiuto mirato per superare queste ultime.

- **Struttura del test**
    - Il test è suddiviso in tre parti, ciascuna composta da diversi quesiti.
    - I quesiti sono indipendenti tra loro; pertanto, il mancato completamento di un quesito non pregiudica la riuscita dei successivi.

- **Durata**

  È prevista una **durata massima stimata per ciascuna parte**:

  Screening 6+: massimo 45 minuti
  – 15 minuti per la sezione di pre-algebra (parte I);
  – 10 minuti per la sezione di proporzionalità (parte II);
  – 20 minuti per la sezione di calcolo aritmetico (parte III).

  Screening 8+: massimo 40 minuti
  – 15 minuti per la sezione di pre-algebra (parte I);
  – 10 minuti per la sezione di proporzionalità (parte II);
  – 15 minuti per la sezione di calcolo aritmetico (parte III).

  È importante comunicare in anticipo la durata di ciascuna parte e informare gli studenti che, al termine di ogni sezione, devono fermarsi e attendere il segnale dell'insegnante prima di procedere con la parte successiva. L'insegnante interromperà chi non ha terminato, al fine di garantire a tutti lo stesso tempo a disposizione; è opportuno ribadire che non è grave non aver completato un quesito.

- **Formato degli esercizi**
    - Esercizi a risposta aperta: prevedono uno spazio in cui scrivere la risposta, che può consistere in un numero o in una breve frase.
    - Esercizi a risposta chiusa (scelta multipla): vengono proposte più opzioni e, salvo diverse indicazioni nel testo, lo studente deve sceglierne una sola. In caso di modifica della risposta, lo studente deve scrivere "No" accanto alla risposta iniziale e "Sì" accanto a quella nuova.

- **Modalità di risposta**
    - Non è consentito l'uso della calcolatrice.
    - Gli studenti possono utilizzare le parti bianche del fascicolo come foglio di appoggio, in particolare per effettuare calcoli.

- **Interazioni durante il test**
    - In caso di richieste di aiuto, l'insegnante non deve fornire indicazioni che possano orientare la risposta. Lo scopo del test è rilevare le difficoltà degli studenti, non guidarli verso la soluzion

V. Presentazione dei quesiti

Quesiti 1.1 e 1.2: Individuare i termini mancanti in un’addizione o sottrazione

1.1. Scrivi i numeri mancanti negli spazi lasciati vuoti.

a) $37 + \underline{45} = 82$

b) $\underline{699} + 90 = 789$

1.2. Scrivi i numeri mancanti negli spazi lasciati vuoti.

a) $88 - \underline{51} = 37$

b) $\underline{78} - 55 = 23$

Soluzioni:

1.1.

a) Prima soluzione: il numero mancante può essere interpretato come “82 meno 37”, calcolando la differenza $82 - 37 = 45$.

Seconda soluzione: per completamento da 37 a 82. Da 37 a 40 manca 3. Da 40 a 80 manca 40. Da 80 a 82 manca 2. $3 + 40 + 2 = 45$.

b) Prima soluzione: ragionando sui valori posizionali si riconosce che si può partire da 790, invece che da 789, sottranedo 90 e ottenendo 700, e sottraendo infine 1: $789 = 790 - 1$; $790 - 90 = 700$; $700 - 1 = 699$.

Seconda soluzione: il numero mancante può essere individuato ragionando sui singoli valori posizionali; partendo dalle unità: quale numero devo aggiungere a 0 per ottenere 9? Devo aggiungere 9, quindi 9 unità. Quanto devo aggiungere a 9 per ottenere 8? Devo aggiungere 9, riportando una decina al valore posizionale successivo. Quindi 9 decine. Quanto devo aggiungere al riporto di 1 per arrivare a 7? Devo aggiungere 6. Quindi 6 centinaia.

1.2.

a) Prima soluzione: il numero mancante può essere interpretato come “88 meno 37”, calcolando la differenza $88 - 37 = 51$.

Seconda soluzione: per completamento da 37 a 88. Da 37 a 40 manca 3. Da 40 a 80 manca 40. Da 80 a 88 manca 8. $3 + 40 + 8 = 51$.

b) Prima soluzione: il nuemro mancante può essere determinato riconoscendo l’operazione inversa: per ottenere il minuendo in una sottrazione (numero mancante), devo addizionare sottraendo (55) e differenza (23); quindi $55 + 23 = 78$.

Seconda soluzione**:** il numero mancante può essere individuato ragionando sui singoli valori posizionali; partendo dalle unità: da quale numero devo partire se sottraendo 5 ottengo 3? Da 8. Proseguendo con le decine: da quale numero devo partire se sottraendo 5 ottengo 2?

Abilità chiave valutata con questo quesito
Questi quesiti mirano a valutare la comprensione della relazione strutturale tra addizione e sottrazione. Nei quattro item, agli studenti viene chiesto di determinare un numero mancante in un'operazione additiva, ad esempio completando "37 + ___ $= 82$" oppure "88 – ___ $= 37$". Per risolvere correttamente questi quesiti, gli studenti devono riconoscere i ruoli dei termini noti e incognti e muoversi con flessibilità tra le due operazioni inverse. Devono interpretare le uguaglianze additive non come semplici istruzioni di calcolo, ma come relazioni parte–tutto (per l'addizione) o come relazioni di differenza/distanza (per la sottrazione). Inoltre, devono riconoscere il segno di uguaglianza come una relazione di equivalenza tra due espressioni.

Questa capacità di leggere e manipolare le uguaglianze additive in termini di equazioni, in modo strutturale, costituisce una componente essenziale di una comprensione aritmetica profonda ed è necessaria per affrontare con successo contenuti matematici più avanzati.

Perché questa abilità è un'abilità chiave
Comprendere e utilizzare in modo flessibile la relazione inversa tra addizione e sottrazione costituisce una competenza fondamentale per lo sviluppo del pensiero matematico. Tale comprensione rappresenta la base per concetti essenziali quali la compensazione, la trasformazione di espressioni, il calcolo mentale strategico e la comprensione della sottrazione come distanza sulla retta numerica. Essa è inoltre un prerequisito per concetti più avanzati legati alla pre-algebra, alle equazioni, alle relazioni funzionali e alla manipolazione di espressioni.

Secondo il quadro teorico del Progetto DiToM, abilità di questo tipo sono considerate abilità chiave poiché la loro assenza o debolezza può ostacolare, o addirittura impedire, i progressi successivi. Gli studenti che interpretano correttamente uguaglianze del tipo "$37 +$ ___ $= 82$" come "$82 - 37$" dimostrano non solo una padronanza procedurale, ma soprattutto una forma di ragionamento matematico di tipo strutturale.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito
Gli studenti che non hanno ancora interiorizzato la relazione tra addizione e sottrazione tendono a manifestare errori ricorrenti, spesso riconducibili a misconcezioni tipiche.

Un errore frequente consiste nel trattare tutte le equazioni come addizioni da svolgere "in avanti": ad esempio, di fronte a un'espressione del tipo "88 – ___ $= 37$", alcuni studenti possono erroneamente addizionare 88 e 37 oppure tentare la sottrazione nell'ordine sbagliato. Molti studenti interpretano inoltre il segno di uguaglianza come un invito a "scrivere il risultato", piuttosto che come l'espressione di una relazione tra due quantità equivalenti. Alcuni tentano di individuare il numero mancante facendo ricorso a fatti numerici memorizzati, senza considerare la struttura dell'uguaglianza; in altri casi, gli studenti applicano immediatamente procedure scritte, come la sottrazione in colonna, anche quando la situazione richiederebbe piuttosto un ragionamento concettuale sulla distanza o sul completamento al valore noto.

Comportamenti di questo tipo indicano una comprensione strutturale ancora limitata delle operazioni additive e una ridotta flessibilità nel passaggio dall'addizione alla sottrazione.

Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito
Per rafforzare la comprensione della relazione tra addizione e sottrazione è utile rendere esplicite le famiglie di fatti numerici correlati, ad esempio: "$37 + 45 = 82$", "$82 - 45 = 37$", "$82 - 37 = 45$", mettendo in evidenza la reversibilità dell'operazione.

È efficace incoraggiare gli studenti a verbalizzare il proprio ragionamento (per esempio: “Qual è il numero che, aggiunto a 37 dà 82?” oppure “Quanto manca da 37 per arrivare a 82?”), in modo da favorire l’interiorizzazione del significato della sottrazione come differenza e dell’addizione come completamento.

È inoltre utile variare sistematicamente la posizione del valore incognito (all’inizio, al centro o alla fine dell’uguaglianza) per consolidare una comprensione flessibile della struttura delle espressioni additive.

Per gli studenti in difficoltà è consigliabile ricorrere a rappresentazioni visive, quali la retta dei numeri, i modelli a barre e i diagrammi parte–tutto, che rendono esplicita la relazione tra somma, parti e differenza. Tali rappresentazioni supportano la comprensione della sottrazione come distanza e dell’addizione come combinazione di quantità.

Quesito 1.3: Individuare il del termine mancante in una moltiplicazione o divisione

Scrivi i numeri mancanti negli spazi lasciati vuoti.

a) $3 \cdot \underline{42} = 126$ c) $54 : \underline{9} = 6$

b) $172 = 4 \cdot \underline{43}$ d) $\underline{81} : 3 = 27$

Soluzioni:

a) Prima soluzione: il numero mancante può essere interpretato come "126 diviso per 3", calcolando il quoziente $126 : 3 = 42$.
Seconda soluzione: si osserva che $120 = 3 \cdot 40$ e $126 = 120 + 6$. Rimane $6 = 3 \cdot 2$. Il risultato 126 si ottiene calcolando $40 + 2 = 42$.

b) Prima soluzione: il numero mancante può essere interpretato come il risultato della divisione "172 diviso per 4", calcolando il quoziente $172 \div 4 = 43$.

Seconda soluzione: si osserva che $160 = 4 \cdot 40$ e $172 = 160 + 12$. Rimane $12 = 4 \cdot 3$. Il risultato 172 si ottiene calcolando $40 + 3 = 43$.

c) Il numero mancante può essere interpretato come il risultato di $54 \div 6$ oppure come il numero che completa l'uguaglianza $6 \cdot \_\_ = 54$. Richiamando i fatti numerici di base, la risposta è 9.

d) Prima soluzione: il numero mancante è "tre volte più grande di 27", cioè $3 \cdot 27 = 81$.

Seconda soluzione: procedendo per tentativi, con 90 si ottiene il quoziente 30, che è di 3 più grande di 27. Il quoziente 3 si ottiene da 9 diviso per 3, quindi si deve sottrarre 9; il risultatp 27 si ottiene da $90 - 9 = 81$.

Abilità chiave valutata con questo quesito

Questo quesito è finalizzato a valutare la comprensione della relazione strutturale tra moltiplicazione e divisione. Nei quattro item proposti, agli studenti viene chiesto di determinare un numero mancante in un'operazione di moltiplicazione o di divisione, ad esempio completando espressioni del tipo "$3 \cdot \_\_ = 126$" oppure "$172 = 4 \cdot \_\_$". Per risolvere correttamente questi quesiti, gli studenti devono individuare il ruolo dei numeri noti e dell'incognita e muoversi con flessibilità tra operazioni inverse. Ciò implica interpretare le equazioni non soltanto come istruzioni di calcolo, ma come relazioni parte–tutto, in cui una quantità deriva dal moltiplicare o dal dividere due grandezze, e riconoscere il segno di uguaglianza come espressione di una relazione di equivalenza.

Perché questa abilità è un'abilità chiave

Riconoscere e utilizzare con sicurezza la relazione inversa tra moltiplicazione e divisione costituisce una competenza fondamentale per il successivo apprendimento matematico. Tale comprensione rappresenta la base per il ragionamento su rapporti, proporzioni, espressioni algebriche e relazioni funzionali.

Secondo il quadro teorico del Progetto DiToM, abilità di questo tipo sono classificate come abilità matematiche chiave, poiché la loro assenza può ostacolare, o addirittura bloccare, i progressi futuri. Gli studenti che interpretano un'uguaglianza in modo strutturale — comprendendo, ad esempio, che "$3 \cdot \_\_ = 126$" implica "$126 \div 3$" — dimostrano non soltanto un richiamo procedurale, ma un autentico ragionamento matematico.

Sviluppare questa abilità sin dalle prime fasi dell'apprendimento favorisce una padronanza più solida delle rappresentazioni simboliche e della risoluzione di problemi a più passaggi nella scuola secondaria.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Gli studenti che non hanno ancora interiorizzato la relazione tra moltiplicazione e divisione tendono a manifestare errori ricorrenti. Un errore frequente consiste nell'interpretare tutte le equazioni come richieste di moltiplicazione "in avanti", anche quando è necessaria l'operazione inversa. Ad esempio, di fronte a un'espressione del tipo "$172 = 4 \cdot$ __", alcuni studenti possono erroneamente calcolare "$172 \cdot 4$" invece di procedere con la divisione. Altri studenti individuano la risposta facendo affidamento sul recupero di fatti numerici dalla memoria, senza considerare la struttura dell'uguaglianza. Una difficoltà ulteriormente diffusa riguarda la comprensione del segno di uguaglianza, interpretato come un semplice "invito a calcolare" piuttosto che come l'espressione di una relazione di equivalenza tra due quantità. In alcuni casi, gli studenti ricorrono a procedure di calcolo complesse o eccessivamente elaborate, come la divisione in colonna o scomposizioni non funzionali (ad esempio $126 = 120 + 6 = 3 \times 40 + 3 \times 2$ o $126: 3 = 40 + 2 = 42$), laddove sarebbe invece più appropriato un ragionamento strategico basato sulle relazioni tra i numeri.

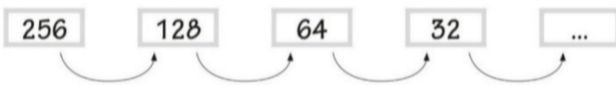
Tali comportamenti indicano una comprensione strutturale ancora debole e una fluency concettuale limitata.

Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito

È importante rendere esplicita la connessione tra fatti numerici correlati, ad esempio: "$6 \cdot 4 = 24$", "$24 : 4 = 6$", "$24 : 6 = 4$", così da evidenziare l'invertibilità delle operazioni. Incoraggiare gli studenti a verbalizzare il proprio ragionamento (ad esempio: "Qual è il numero che, moltiplicato per 4, dà 172?") favorisce una più profonda interiorizzazione concettuale. È inoltre utile variare sistematicamente la posizione dell'incognita (all'inizio, al centro o alla fine dell'equazione) per consolidare una comprensione flessibile della struttura dell'uguaglianza. Per supportare gli studenti che incontrano difficoltà con questo concetto, è consigliabile ricorrere a rappresentazioni visive quali array, modelli a barre o diagrammi di raggruppamento, che rendono visibili le strutture moltiplicative (Polotskaia & Savard, 2021). Tali rappresentazioni aiutano a comprendere come una quantità possa essere composta da parti uguali o scomposta in esse, riflettendo rispettivamente le operazioni di moltiplicazione e di divisione.

Quesito 1.4: Individuare una regola in una sequenza numerica

Qual è la regola che consente di proseguire la sequenza di numeri?



Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

□ Sottrarre 32

□ Sottrarre 128

□ Dividere per 4

□ Dividere per 2

Soluzione

Gli studenti possono iniziare verificando quali delle opzioni proposte risultano corrette, applicandole ai primi tre numeri della sequenza. Ad esempio, partendo dal numero 256:

$256 - 32 = 224$ → *non è uguale a 128, quindi questa opzione non è corretta*;

$256 - 128 = 128$ → *corrisponde al secondo elemento della sequenza, quindi potrebbe essere corretto;*

$256 \div 4 = 64$ → *non è uguale a 128, quindi questa operazione non è corretta*;

$256 \div 2 = 128$ → *corrisponde al secondo elemento della sequenza, quindi potrebbe essere corretto.*

Si testano ora le due opzioni non errate (sottrazione di 128 e divisione per 2) con il secondo numero, cioè 128. Si ottiene $128 - 128 = 0$ e $128 : 2 = 64$. Solo la seconda operazione è in accordo con la sequenza. La regola rimanente (divisione per 2) è confermata dal terzo numero: $64 : 2 = 32$.

In alternativa, gli studenti possono calcolare e confrontare le differenze e i rapporti tra numeri consecutivi:

$256 - 128 = 128\,,\qquad 128 - 64 = 64\,,\qquad 64 - 32 = 32$

$256 : 128 = 2\,,\qquad 128 : 64 = 2\,,\qquad 64 : 32 = 2$

In entrambi i casi, la regola corretta è “dividere per 2”.

Abilità chiave valutata con questo quesito
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di individuare e descrivere la regola sottostante a una sequenza numerica. Nell’esempio proposto $(256, 128, 64, 32, \ldots)$, è richiesto di riconoscere una progressione geometrica, in cui ciascun numero si ottiene dividendo il precedente per due. Il quesito propone diverse opzioni di risposta e chiede di individuare quale regola (ad esempio “sottrarre 32” o “dividere per 2”) descriva correttamente la sequenza. L’abilità centrale oggetto di valutazione è il riconoscimento di strutture moltiplicative. Tale abilità va oltre la mera conoscenza procedurale, in quanto richiede la capacità di individuare schemi, di ragionare in modo strutturale e di attivare forme di pensiero pre-algebrico.

Perché questa abilità è una abilità chiave

La capacità di riconoscere regolarità nelle sequenze numeriche costituisce un'abilità matematica chiave, in quanto rappresenta la base per concetti più avanzati quali funzioni, algebra e ragionamento proporzionale. Gli studenti in grado di individuare la regola sottostante a una sequenza risultano meglio preparati a generalizzare e a utilizzare rappresentazioni simboliche nelle fasi successive dell'apprendimento matematico. Secondo la ricerca in didattica della matematica (ad esempio Kieran, 2018; Radford, 2013), il riconoscimento di schemi favorisce lo sviluppo di una della struttura numerica è considerata essenziale per orientarsi nei processi di crescente astrazione che caratterizzano la matematica nella scuola secondaria. Inoltre, la comprensione di sequenze geometriche — come il dimezzamento — costituisce una base importante per l'interpretazione di relazioni esponenziali, concetto che gli studenti incontreranno negli anni successivi.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Un fraintendimento frequente consiste nell'interpretare la sequenza come additiva anziché moltiplicativa. Alcuni studenti possono ipotizzare che i numeri diminuiscano di una quantità fissa e scegliere l'opzione "sottrarre 32" perché la differenza tra 64 e 32 sembra confermare questa regola, pur non risultando valida per i passaggi precedenti. Tale errore rivela una misconcezione di tipo lineare, comune negli studenti che non hanno ancora piena familiarità con trasformazioni di tipo moltiplicativo.

Altri studenti possono selezionare una risposta in modo casuale, senza verificare la coerenza della regola su più termini della sequenza, evidenziando un ragionamento non sistematico. Infine, gli studenti che non hanno ancora interiorizzato la relazione inversa tra divisione e moltiplicazione possono non riconoscere "dividere per 2" come struttura ricorrente.

Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito

Gli studenti che incontrano difficoltà nel riconoscere schemi numerici ricorrenti traggono beneficio da attività strutturate che mettano esplicitamente a confronto relazioni additive e moltiplicative. L'utilizzo di supporti visivi — quali catene numeriche, diagrammi ad albero o tabelle — può aiutarli a individuare come i valori cambiano da un passaggio all'altro. Attività che richiedono di generare sequenze in maniera autonoma a partire da una regola assegnata (ad esempio: "crea una sequenza in cui ogni numero è la metà del precedente") rafforzano la consapevolezza dei modelli e la comprensione operativa. L'insegnante può inoltre incoraggiare la verbalizzazione del ragionamento (ad esempio: "Come cambia il numero da 256 a 128?"), favorendo lo sviluppo della metacognizione e rendendo esplicite le strategie utilizzate. Nel tempo, il collegamento di tali schemi a contesti reali — come la piegatura di un foglio o il raddoppio di una popolazione batterica — può contribuire a consolidare la comprensione delle progressioni geometriche, rendendo più tangibili concetti che altrimenti rimarrebbero astratti.

Quesito 1.5: Applicare le regole di priorità delle operazioni

Calcola e scrivi il risultato sulla riga vuota.

$14 + 2 \cdot 3 =$ 20

Soluzione

Si nota che la moltiplicazione ha la priorità sull'addizione. Si calcola prima il prodotto: $2 \cdot 3 = 6$ poi si effettua l'addizione: $14 + 6 = 20$. In un unico passaggio: $14 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$.

Abilità chiave valutata con questo quesito
Questo quesito verifica la comprensione della convenzione relativa all'ordine delle operazioni, in particolare la priorità della moltiplicazione rispetto all'addizione. Gli studenti sono chiamati a interpretare correttamente ed eseguire il calcolo "$14 + 2 \cdot 3$" , applicando la regola secondo cui la moltiplicazione deve essere effettuata prima dell'addizione. Ciò richiede non soltanto un'abilità di tipo procedurale, ma anche una consapevolezza della struttura gerarchica delle operazioni aritmetiche. Il quesito va dunque oltre la semplice applicazione di regole e valuta la capacità di analizzare e strutturare correttamente un'espressione numerica, competenza cruciale in vista dell'accesso al linguaggio e al pensiero algebrico.

Perché questa abilità è un'abilità chiave
Comprendere l'ordine delle operazioni rappresenta un prerequisito fondamentale per lavorare con espressioni aritmetiche complesse e, successivamente, con espressioni algebriche. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, la capacità di calcolare espressioni a più passaggi secondo le convenzioni matematiche è considerata un'abilità chiave, poiché costituisce la base del ragionamento simbolico e delle abilità generali di problem solving.

Gli studenti che interiorizzano queste regole sono in grado di interpretare le espressioni in modo affidabile, manipolare i termini con sicurezza ed evitare errori comuni. Tale abilità risulta essenziale non solo nel contesto del calcolo numerico, ma anche nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni e nello studio delle funzioni nelle fasi successive dell'apprendimento matematico.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito
Un errore tipico consiste nell'eseguire i calcoli da sinistra a destra senza rispettare la gerarchia delle operazioni — ad esempio, addizionando prima $14 + 2 = 16$ e poi moltiplicando per 3, ottenendo 48. Questo errore rivela una tendenza lineare nel calcolo e una mancata comprensione concettuale della priorità operativa.

Altri segnali d'allarme includono esitazioni o il ricorso a strategie informali (come "faccio prima quello che è scritto per primo"), che indicano l'applicazione dell'ordine di lettura naturale anziché della struttura matematica dell'espressione. Alcuni studenti possono inoltre inserire parentesi in modo inappropriato, manifestando insicurezza rispetto all'organizzazione delle espressioni numeriche.

Anche quando il risultato finale risulta corretto, se viene ottenuto attraverso tentativi o intuizioni casuali piuttosto che mediante un ragionamento strutturato, ciò può celare lacune concettuali ancora presenti.

Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito
Un intervento mirato dovrebbe iniziare rendendo visibile la struttura delle espressioni, ad esempio attraverso l'uso di colori, parentesi o modelli visivi che evidenzino i diversi raggruppamenti. L'insegnante può modellare la risoluzione passo per passo, invitando gli studenti a verbalizzare il proprio ragionamento (ad esempio: "Prima moltiplico 2 per 3 perché la moltiplicazione ha la precedenza sull'addizione; poi aggiungo 14." Analogamente, il confronto tra rappresentazioni iconiche di differenti metodi di calcolo può aiutare a distinguere e comprendere le priorità operative. Lavorare su diverse tipologie di espressioni — con e senza parentesi — contribuisce a chiarire quando e

perché l'ordine delle operazioni è determinante. Infine, discutere strategie errate e analizzare le ragioni per cui conducono a risultati non corretti favorisce una comprensione più profonda e consapevole.

Un lavoro regolare su quesiti di questo tipo, accompagnato da una riflessione strutturata consente di consolidare la comprensione delle regole e di rafforzare la fiducia degli studenti nella gestione dei calcoli a più passaggi.

Quesito 1.6: Tradurre un testo scritto in un'espressione numerica

Tommaso segue queste istruzioni:

Il numero 4 è addizionato al numero 5

Il risultato è moltiplicato per 8

Quale delle seguenti espressioni può usare Tommaso per ottenere il risultato corretto?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

- ☐ $5 + 4 \cdot 8$
- ☑ $(5 + 4) \cdot 8$
- ☐ $5 + (4 \cdot 8)$
- ☐ $5 \cdot 8 + 4$

Soluzione

La prima istruzione, "il numero 4 viene addizionato a 5", può essere espressa come $5 + 4$. La seconda istruzione, "il risultato viene moltiplicato per 8", richiede che l'intera espressione $5 + 4$ venga moltiplicata per 8. Non è sufficiente scrivere $5 + 4 \cdot 8$, poiché tale espressione moltiplica solo il 4 per 8. Le parentesi attorno a $5 + 4$ garantiscono che la somma dei due termini venga moltiplicata per 8. La risposta corretta è quindi: $(5 + 4) \cdot 8$. Poiché l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni commutative, sono accettabili anche le seguenti varianti equivalenti: $(4 + 5) \cdot 8$, $8 \cdot (5 + 4)$, $8 \cdot (4 + 5)$.

Se lo studente fornisce una di queste risposte, deve essere in grado di riconoscere che è equivalente a $(5 + 4) \cdot 8$.

Abilità chiave valutata con questo quesito

Questo quesito valuta la capacità di interpretare una breve sequenza verbale che descrive due operazioni consecutive — prima un'addizione, poi una moltiplicazione — e di tradurre tale sequenza in un'espressione simbolica. Non è richiesto di calcolare il risultato, ma di riconoscere la rappresentazione corretta della sequenza di istruzioni. Poiché il linguaggio naturale e l'espressione simbolica che la traduce in linguaggio matematico non sono semanticamente equivalenti (Vergnaud, 1983), lo studente deve riconoscere l'ordine delle operazioni implicito nella frase e costruire di conseguenza il termine (ad esempio $(4 + 5) \cdot 8$). L'abilità chiave è quindi la traduzione dal linguaggio naturale alla notazione formale, includendo l'uso corretto delle parentesi per mantenere la struttura e la priorità delle operazioni.

Perché questa abilità è un'abilità chiave

La capacità di rappresentare simbolicamente informazioni verbali o contestuali è centrale per la competenza matematica. Nell'ambito del Progetto DiToM, questa abilità è considerata chiave poiché consente agli studenti di passare tra diversi registri rappresentativi — verbale, simbolico, iconico e operativo — sviluppando così il cosiddetto *senso della struttura* (Kieran & Martínez-Hernández, 2022). Tale competenza è essenziale non solo in aritmetica, ma anche in algebra, dove è frequente dover costruire o interpretare espressioni a partire da problemi testuali, diagrammi o situazioni quotidiane. Una padronanza precoce di questa abilità favorisce lo sviluppo del pensiero funzionale, della flessibilità nella risoluzione di problemi e della padronanza dei modelli matematici.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Un errore comune consiste nel costruire l'espressione in ordine errato, ad esempio interpretando correttamente "4 viene aggiunto a 5" come "$4 + 5$", ma applicando poi la moltiplicazione in modo scorretto: $4 + (5 \cdot 8)$. Ciò riflette difficoltà nel riconoscere la sequenza operativa espressa nella frase in linguaggio naturale. Altri studenti potrebbero ignorare la necessità delle parentesi, scrivendo "$4 + 5 \cdot 8$", che porta a un ordine di operazioni errato e a un risultato errato, se calcolato. Altri ancora potrebbero concentrarsi solo sull'ultima operazione e pensare direttamente "$9 \cdot 8 = 72$", eludendo il quesito di traduzione simbolica. Questi comportamenti potrebbero essere segnali di lacune nella comprensione procedurale e difficoltà nel coordinare linguaggio e struttura matematica.

Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito
Per sostenere gli studenti in quest'ambito è importante promuovere una comprensione completa della sequenza di calcolo, tenendo conto della struttura e della priorità delle operazioni. L'insegnante potrebbe modellare la costruzione di un termine a partire da una frase pronunciata e utilizzare organizzatori visivi (p.e. diagrammi di flusso) per aiutare gli studenti a comprendere la sequenza corretta delle operazioni. Sottolineare il ruolo delle parentesi nel raggruppamento delle operazioni evita interpretazioni errate. Attività di classe che prevedono la traduzione tra il linguaggio naturale e quello simbolico, in entrambe le direzioni, rafforzano la flessibilità rappresentativa. Nel tempo, incoraggiare gli studenti a spiegare verbalmente il significato dell'espressione ("prima addiziono, poi moltiplico") aiuta a consolidare la comprensione della struttura simbolica.

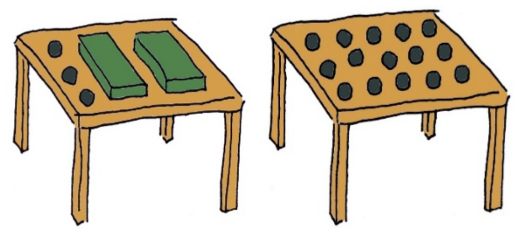
Quesito 1.7: Eguagliare quantità individuando una quantità incognita

L'immagine a destra mostra delle palline e delle scatole, poste su due tavoli.

Ogni scatola contiene lo stesso numero di palline.

Su ciascun tavolo c'è lo stesso numero di palline.

Tavolo 1 Tavolo 2



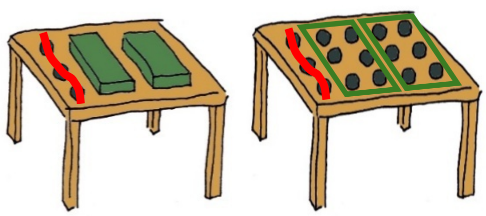
Quante palline ci sono in ogni scatola?

Risposta: 6

Soluzione

Questo quesito può essere risolto con metodi formali o informali.

Prima soluzione: si possono rimuovere tre palline da ciascun tavolo e raggruppare le 12 palline rimanenti sul Tavolo 2 in due gruppi dello stesso numero (cioè 6 palline per gruppo).



Questo ragionamento può essere supportato dai calcoli: $15 - 3 = 12$ e $12 : 2 = 6$. Si noti che il processo di rimozione e raggruppamento può essere eseguito visivamente, mentalmente o per calcolo scritto.

Seconda soluzione: si può procedere per tentativi successivi, finché i due tavoli presentano lo stesso numero totale di palline. Questo ragionamento può essere condotto mentalmente oppure sintetizzato in una tabella:

Numero di biglie in una scatola	3	4	5	6 ✓
Totale sul Tavolo 1	9	11	13	15
Totale sul Tavolo 2	15	15	15	15

Terza soluzione (formale): si introduce una variabile, ad esempio x, per rappresentare il numero di biglie in una scatola, e si esprime la situazione con un'equazione $2x + 3 = 15$ che può essere risolta con metodi algebrici. Tuttavia, una tale formalizzazione non è generalmente utilizzata dagli studenti di questo livello scolastico, che molto probabilmente tenderanno a ragionare in modo più concreto o visivo.

Abilità chiave valutata con questo quesito

Questo quesito valuta la capacità degli studenti di interpretare una rappresentazione visiva di una relazione parte–tutto basata sull'uguaglianza. Gli studenti osservano due tavoli, ciascuno contenente una configurazione di palline visibili e scatole chiuse (ognuna con lo stesso numero sconosciuto di palline). L'obiettivo è dedurre il numero di palline per scatola a partire dal fatto che i due tavoli contengono lo stesso numero totale di palline. Ciò significa che gli studenti devono eguagliare mentalmente le quantità sui due lati e trovare l'incognita — una forma di risoluzione informale di equazioni, basata sul concetto di equilibrio. Il quesito valuta quindi il ragionamento strutturale, il pensiero pre-algebrico e la capacità di interpretare l'equivalenza in un contesto non simbolico.

Perché questa abilità è una abilità chiave
Comprendere il concetto di uguaglianza rappresenta un precursore fondamentale del ragionamento algebrico. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, questa abilità è considerata chiave perché attiva la comprensione dell'equivalenza e della sostituzione — idee centrali sia in aritmetica, sia in algebra. Quando gli studenti ragionano sul fatto che due configurazioni diverse devono rappresentare la stessa quantità totale, esprimono un pensiero relazionale, anziché limitarsi a un calcolo diretto (Radford, 2014). Questa abilità favorisce successivamente la competenza nella risoluzione di equazioni, nelle trasformazioni di bilanciamento e nel lavoro con incognite in forma simbolica. Inoltre, quesiti di questo tipo, non simbolici, offrono un ponte concettuale per gli studenti che stanno ancora acquisendo fiducia nelle rappresentazioni formali, permettendo loro di accedere al significato matematico attraverso la struttura visiva.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito
Gli studenti che incontrano difficoltà potrebbero non riconoscere l'equivalenza tra le quantità rappresentate sui due tavoli. Un errore tipico consiste nel contare solo le palline visibili, ignorando quelle contenute nelle scatole, oppure nell'attribuire un valore fisso e arbitrario (ad esempio: "ogni scatola ha 10 palline"). Altri studenti possono riconoscere la necessità di mantenere un equilibrio, ma sbagliare i calcoli o il ragionamento, magari indovinando il numero di palline per scatola senza verificare se il numero totale sui due tavoli coincide. In altri casi gli studenti potrebbero descrivere semplicemente l'immagine senza fare un tentativo di inferire la quantità nascosta. Questi comportamenti indicano lacune nella comprensione strutturale, in particolare nella capacità di considerare l'incognita come una quantità da determinare a partire dai dati noti.

Strategie di supporto per studenti con difficoltà in questo quesito
Gli studenti traggono beneficio dall'uso di materiali manipolativi che rendano concreto il concetto di equivalenza, anche come preparazione ai gradi successivi (dove si affrontano i numeri relativi). L'insegnante può utilizzare contesti narrativi per favorire la comprensione e il coinvolgimento, ad esempio: "Entrambi i bambini hanno ricevuto lo stesso numero di palline — quante sono dentro alla scatola?" Disegnare e etichettare diagrammi in cui gli studenti scrivono equazioni del tipo $3 + x = 7$, eventualmente lasciando vuoto lo spazio dell'incognita, può aiutare a collegare il ragionamento visivo alla rappresentazione simbolica. La pratica ripetuta nel riconoscere insiemi uguali ma composti in modo diverso rinforza la nozione di equivalenza e favorisce il passaggio dal ragionamento additivo al pensiero funzionale iniziale. Come sempre, è importante che gli studenti siano incoraggiati a spiegare il proprio ragionamento e a verificare se il valore proposto mantiene l'equilibrio tra le due configurazioni.

Quesito 2.1: Rappretare e interpretare di frazioni equivalenti

a) Colora il secondo cerchio in maniera tale che rappresenti una frazione equivalente a quella rappresentata nel primo cerchio.

b) Scrivi l'uguaglianza corrispondente usando le frazioni

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{6}}$$

Soluzione

La parte colorata del cerchio a destra deve rappresentare la stessa proporzione parte-tutto di quella del cerchio a sinistra. Poiché la proporzione parte-tutto nel cerchio a sinistra è $1:3$, la proporzione nel cerchio a destra deve essere $2:6$. (Questa conclusione può essere motivata intuitivamente: se dividiamo una torta rotonda in sei fette invece che in tre, avremo bisogno del doppio delle fette per ottenere la stessa quantità di torta.) Possiamo anche procedere formalmente estendendo la frazione come segue:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Abilità chiave verificata con questo quesito
Questo quesito si focalizza sulla capacità di riconoscere e costruire frazioni equivalenti attraverso due registri rappresentativi: prima quello iconico (colorando parti di un cerchio) e poi quello simbolico (scrivendo un'uguaglianza frazionaria). Nella parte (a), agli studenti è richiesto di completare una rappresentazione visiva colorando il cerchio con lo stesso rapporto mostrato nel primo cerchio. Nella parte (b), gli studenti devono esprimere questa relazione come identità matematica utilizzando le frazioni. L'abilità fondamentale verificata è la coordinazione tra la comprensione dell'equivalenza tra la rappresentazione iconica, visiva, del rapporto parte-tutto e la sua rappresentazione formale, e la sua espressione sotto forma di uguaglianza di frazioni equivalenti.

Perché questa è un'abilità chiave
La comprensione delle frazioni equivalenti rappresenta una pietra miliare nella comprensione dei numeri razionali e costituisce quindi un'abilità matematica fondamentale. Essa forma la base concettuale per le operazioni con le frazioni, il ragionamento proporzionale, i concetti di rapporto e l'equivalenza algebrica. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, riconoscere che frazioni dall'aspetto diverso possono rappresentare la stessa quantità è considerato essenziale per sviluppare flessibilità nel pensiero numerico. Gli studenti devono comprendere che una frazione propria non rappresenta solo un numero, ma anche una relazione tra una parte e un tutto — e che tale relazione rimane costante anche quando numeratore e denominatore vengono divisi o moltiplicati per lo stesso numero

diverso da zero. Le attività che combinano i livelli visivo e simbolico favoriscono una comprensione più profonda e sostengono la transizione verso un ragionamento più astratto nell'apprendimento matematico successivo.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Gli studenti potrebbero colorare un numero errato di parti nel secondo cerchio — ad esempio, focalizzandosi sul numero delle parti colorate anziché sul loro rapporto rispetto al numero totale di parti. Ciò rivela una strategia basata sul conteggio piuttosto che sul pensiero relazionale, indicando che vedono il numeratore come un numero statico e non come parte di un tutto.

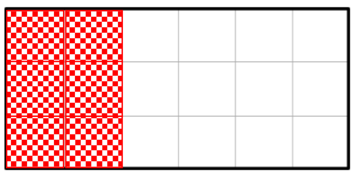
Nella parte (b), gli studenti potrebbero copiare la frazione data senza trasformarla, scrivere frazioni non equivalenti (ad esempio raddoppiando solo il numeratore) o invertire numeratore e denominatore. Alcuni potrebbero omettere il segno di uguaglianza, se il quesito fosse proposto in una variante in cui questo è stato intenzionalmente ommesso, segnalando incertezza riguardo alle convenzioni della notazione frazionaria. Questi potrebbero essere segnali di una comprensione concettuale fragile e di un'esperienza limitata nel collegare rappresentazioni visive e simboliche.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Per costruire una solida comprensione delle frazioni equivalenti, gli studenti dovrebbero lavorare regolarmente con materiali manipolativi e modelli visivi — come cerchi, barre o tessere frazionarie — per osservare e creare parti uguali in diverse suddivisioni. È importante porre l'accento sull'identificazione di quante parti su quante costituiscono la stessa proporzione e su come il numero delle parti colorate e quello delle parti totali cambino "in parallelo". L'insegnante potrebbe guidare gli studenti nella verbalizzazione del processo di riduzione o ampliamento, ad esempio: "Ho raddoppiato il numero delle parti e ho raddoppiato quelle colorate." Questo aiuta a interiorizzare la struttura moltiplicativa che sta alla base dell'equivalenza. Attività ponte — come colorare, poi scrivere, poi spiegare verbalmente — risultano particolarmente efficaci nel consolidare il legame tra immagini visive ed equivalenze frazionarie espresse in forma simbolica.

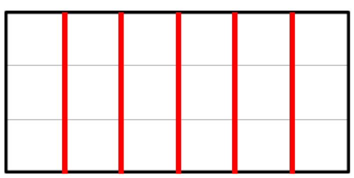
Quesito 2.2: Rappresentare una frazione di un rettangolo

Colora $\frac{2}{6}$ del rettangolo.

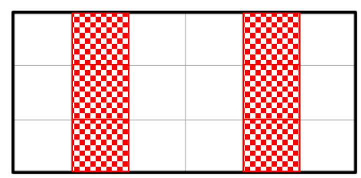


Soluzione

La soluzione illustrata sopra si basa sulla suddivisione del rettangolo in sei parti equivalenti (colonne) e sulla selezione di due di queste parti.

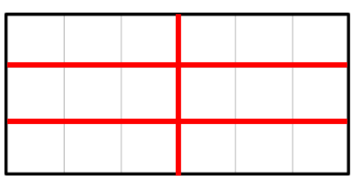


Esempio di un’altra possibile risposta corretta:

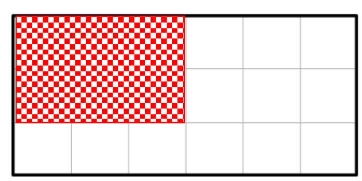


Naturalmente, qualsiasi coppia di queste sei parti può essere colorata per ottenere una soluzione corretta.

Esistono anche altri modi per suddividere il rettangolo in sei parti uguali, ad esempio:

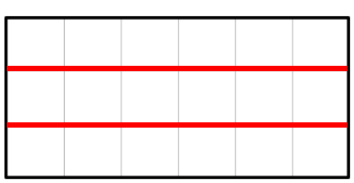


Un’altra risposta corretta:

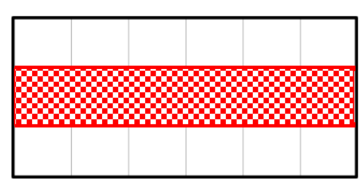


Qualsiasi risposta che colori 6 quadratini su un totale di 18 quadratini è corretta.

È inoltre corretto interpretare $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e colorare una parte su tre.



Un’altra risposta corretta:



Abilità chiave verificata con questo quesito
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di costruire una rappresentazione visiva di una frazione data, colorando una parte specificata di una superficie rettangolare. Agli studenti è richiesto di individuare il numero corretto di parti equivalenti e di colorare il numero di parti corrispondente al numeratore, riconoscendo al contempo che il numero totale delle parti corrisponde al denominatore. Ciò implica interpretare la frazione come operatore su una grandezza, in questo caso sull’area — cioè utilizzare una frazione per definire quale porzione di un intero viene

considerata. Il compito richiede una suddivisione accurata, una corretta stima spaziale e un ragionamento proporzionale.

Perché questa è un'abilità chiave

La costruzione visiva di una frazione rappresenta un passaggio fondamentale nello sviluppo del pensiero relazionale e proporzionale, nonché un ponte tra la conoscenza informale e quella formale delle frazioni. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, questa abilità è considerata essenziale poiché sostiene la comprensione successiva dell'equivalenza, dell'addizione e sottrazione di frazioni e del ragionamento sulle aree in geometria. Rappresentare le frazioni mediante un modello visivo, come un rettangolo, rafforza inoltre la comprensione che le frazioni non riguardano soltanto insiemi discreti (come biglie o gettoni), ma anche quantità e superfici continue. Gli studenti che sanno passare con flessibilità dalla notazione frazionaria ai modelli visivi tendono a sviluppare concetti numerici più profondi e connessi, risultando meglio preparati al lavoro astratto in algebra.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Gli errori più comuni includono il colorare un numero errato di parti, spesso a causa di errori di conteggio o di una scorretta identificazione del numero totale di suddivisioni. Alcuni studenti potrebbero colorare parti non equivalenti tra loro, violando così il requisito che le parti frazionarie debbano avere la stessa area. Altri possono colorare in modo casuale, senza stabilire alcuna relazione con la frazione data, indicando una mancata comprensione del rapporto parte-tutto. In alcuni casi, gli studenti potrebbero ignorare il denominatore e limitarsi a contare le unità (per esempio, colorando due parti indipendentemente dal numero totale). Tali comportamenti evidenziano difficoltà nel coordinare la frazione simbolica con il modello visivo e nel comprendere il vincolo strutturale che definisce una rappresentazione frazionaria valida.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Il supporto mirato dovrebbe includere attività manipolative con strisce frazionarie, piegature di carta o modelli di area basati su griglie. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a suddividere le figure in parti equivalenti prima di applicare l'operatore (ad esempio: "Colora 3 parti su 4 uguali"). È utile proporre esempi e controesempi — ad esempio, rettangoli con parti non equivalenti — per chiarire cosa costituisce una rappresentazione corretta o errata di una frazione. Collegare le attività di colorazione con la scrittura simbolica e la spiegazione verbale ("Ho diviso in 6 parti uguali e ne ho colorate 4, quindi sono quattro sesti") favorisce l'integrazione tra rappresentazioni. È importante che l'insegnante proponga forme visive e modalità di suddivisione in parti equivalenti diversi per aiutare gli studenti a generalizzare a superare possibili misconcezioni dovute a rappresentazioni stereotipiche.

Quesito 2.3: Ragionare in termini di proporzionalità in un contesto quotidiano

2 chilogrammi di patate costano 5 euro. Qual è il prezzo di 6 chilogrammi di patate?

Scrivi la soluzione sulla riga vuota.

Risposta: ___15___ euro.

Soluzione

Lo studente che riconosce che 6 kg rappresentano una quantità tripla rispetto a 2 kg può concludere che 6 kg dovrebbero costare tre volte tanto quanto 2 kg. Pertanto, il prezzo per 6 kg è $3 \cdot 5 = 15$.

Un tale ragionamento proporzionale può essere supportato da una notazione semi-formale come:

$$\begin{array}{l} 2\text{ kg} \longrightarrow 5\text{ €} \\ 6\text{ kg} \longrightarrow ?\text{ €} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} 2\text{ kg} \arrow[d, bend right=60, "\cdot 3"'] & \longrightarrow & 5\text{ €} \arrow[d, bend left=60, "\cdot 3"] \\ 6\text{ kg} & \longrightarrow & ?\text{ €} \end{tikzcd}$$

Oppure, in modo più formale:

$$\frac{5}{2} = \frac{?}{6} \quad \left(\text{o} \quad \frac{?}{6} = \frac{5}{2} \quad \text{o} \quad \frac{6}{2} = \frac{?}{5} \quad \text{o} \quad \frac{?}{5} = \frac{6}{2}\right)$$

Abilità chiave verificata con questo quesito

Questo quesito valuta la capacità degli studenti di applicare il ragionamento moltiplicativo per risolvere un problema proporzionale che coinvolge prezzi e quantità. Il contesto — determinare il prezzo di 6 chilogrammi di patate sapendo che 2 chilogrammi costano 5 euro — richiede agli studenti di riconoscere e mantenere un rapporto costante tra quantità e prezzo. Per risolvere correttamente il problema, gli studenti devono o moltiplicare la coppia quantità-prezzo per il fattore 3, oppure calcolare il prezzo unitario (prezzo per chilogrammo) e poi moltiplicare per la quantità (kg).

L'abilità verificata consiste nella comprensione e nell'applicazione di strutture moltiplicative nelle relazioni funzionali, che costituisce una base fondamentale per i problemi modellizzabili con i concetti di rapporto, proporzione e percentuale, anche nella matematica dei livelli scolastici successivi.

Perché questa è un'abilità chiave

Il ragionamento proporzionale è una delle competenze matematiche fondamentali nell'istruzione secondaria. Secondo il quadro di riferimento del Progetto DiToM, la capacità di identificare e gestire relazioni costanti — come "$2\,kg \rightarrow 5$ €" estesa a "$6\,kg \rightarrow ?$ €" — è essenziale non solo in aritmetica, ma anche in algebra, nella comprensione funzionale, nella geometria, nelle scienze e nella risoluzione di problemi quotidiani. Gli studenti che padroneggiano tali relazioni moltiplicative sono in grado di generalizzare in diversi contesti e di scegliere in modo flessibile strategie efficaci (ad esempio, raddoppiare, dimezzare, ragionare sul prezzo unitario). Inoltre, la transizione dal confronto additivo al confronto moltiplicativo rappresenta un salto evolutivo nella comprensione matematica che costituisce la base per l'apprendimento futuro delle funzioni lineari e dei modelli proporzionali.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Gli errori più comuni includono il ricorso a un ragionamento additivo, ad esempio supporre che se 2 kg costano 5 €, allora 6 kg debbano costare $5 + 4 = 9$ €. Ciò riflette una mancata comprensione della natura moltiplicativa della relazione. Alcuni studenti possono moltiplicare 5 direttamente per 6, ottenendo 30 €, fraintendendo il significato dei numeri coinvolti. Altri potrebbero avere difficoltà nel coordinare le unità di misura — confondendo chilogrammi ed euro — oppure limitarsi a stimare in modo approssimativo. Questi errori indicano lacune nella comprensione strutturale e una limitata esperienza con il ragionamento basato sui rapporti. Gli studenti che non esplicitano la propria strategia o che si affidano a tentativi ed errori spesso non possiedono un modello concettuale stabile di proporzionalità.

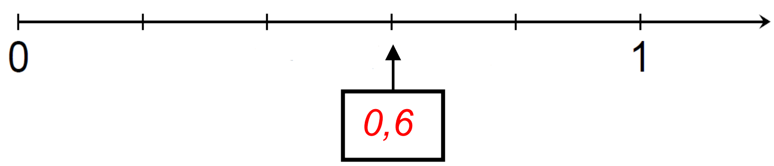
Forme di supporto che possono essere offerte agli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Gli studenti traggono beneficio da problemi contestualizzati che coinvolgono denaro, ricette o misure, in cui le strutture proporzionali emergono naturalmente. L'insegnante dovrebbe modellizzare esplicitamente strategie come il ragionamento sul prezzo unitario ("Se 2 kg costano 5 €, allora 1 kg costa $2{,}50$ €…") oppure il ragionamento su scala di fattori ("6 kg sono 3 volte 2 kg, quindi il prezzo è $3 \cdot 5$ €"). Supporti visivi come le rette numeriche doppie, le tabelle di proporzione e i modelli a barre possono rendere più comprensibile la relazione moltiplicativa. È inoltre utile, nelle discussioni in classe, mettere a confronto strategie additive e moltiplicative per evidenziarne le diverse implicazioni. Incoraggiare gli studenti a spiegare e giustificare il proprio ragionamento favorisce lo sviluppo metacognitivo e approfondisce la comprensione delle strutture proporzionali.

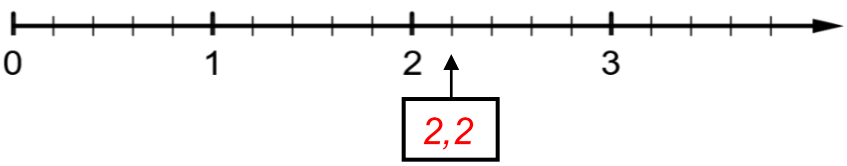
Quesito 3.1: Rappresentare numeri sulla retta dei numeri

Scrivi nella casella vuota il numero corrispondente alla posizione sulla retta dei numeri.

a)



b)

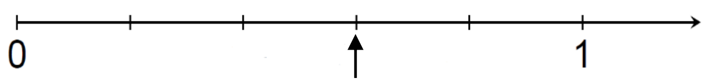


Soluzione

Due possibili strategie:

1. Contare il numero di “passi”, cioè sottointervalli, da 0 a 1;
2. Effettuare dei tentativi con una sequenza di numeri decimali (o frazioni) compresi tra 0 e 1.

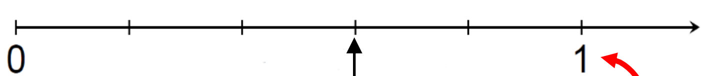
Prima soluzione per l’item a): nel dettaglio, la prima strategia può essere applicata contando 5 passi da 0 a 1.



# passi:	1	2	3	4	5
frazioni:	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{3}{5}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
decimali:	0,2	0,4	$\boxed{0{,}6}$	0,8	1,0

Seconda soluzione: una’altra possibilità consiste nel provare con 0,1 per la prima posizione a destra dello 0.

Questa scelta, 0,1, porta a 0,5, che non corrisponde a 1 sulla retta dei numeri. Modificando in 0,2 il valore di partenza, si ottiene 1,0, che invece corrisponde correttamente a 1 sulla retta dei numeri.



prova:	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
correzione:	0,2	0,4	$\boxed{0{,}6}$	0,8	1,0

Abilità chiave verificata con questo quesito

Questo quesito mira a valutare la capacità degli studenti di interpretare la retta dei numeri suddivisa in sottointervalli e di collocare correttamente una frazione o un numero decimale in base alla sua posizione relativa tra 0 e 1 o tra 2 e 3. Gli studenti devono analizzare le suddivisioni sulla retta, determinare l'unità e identificare la frazione o il numero corretto, espresso in notazione decimale, che rappresenta un punto dato. Ciò richiede la comprensione delle frazioni come numeri che esprimono una grandezza, e non solo come relazioni parte-tutto. Il quesito valuta inoltre la capacità di coordinare rappresentazioni simboliche e spaziali dei numeri razionali.

Perché questa è un'abilità chiave

Essere in grado di collocare le frazioni su una linea dei numeri è un'abilità matematica fondamentale, poiché riflette il passaggio dalla concezione delle frazioni come parti di oggetti alla loro interpretazione come numeri su una scala continua. Questa interpretazione spaziale delle frazioni costituisce la base per confrontarle, ordinarle e operare con esse. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, la stima e la collocazione sulla linea dei numeri sono considerate indicatori forti di chiarezza concettuale. Le ricerche (ad esempio, Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) mostrano che gli studenti che comprendono la struttura metrica della linea dei numeri hanno maggiori probabilità di successo nell'aritmetica, nell'algebra e nella geometria successive. Inoltre, la linea dei numeri offre un modello unificato che supporta il passaggio dai numeri naturali alle frazioni, ai decimali e ai numeri negativi.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

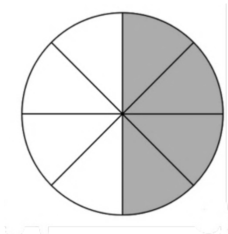
Gli studenti spesso si affidano al conteggio delle tacche sulla retta dei numeri, supponendo una suddivisione decimale dell'unità, invece di ragionare sulla dimensione frazionaria. Per esempio, potrebbero interpretare quattro suddivisioni come "quarti", indipendentemente dal fatto che l'intervallo totale sia effettivamente suddiviso in parti della stessa lunghezza o meno. Un altro errore comune consiste nel collocare la frazione in una posizione errata — ad esempio, posizionare $\frac{3}{4}$ al posto di $\frac{2}{3}$ — a causa di una mancanza di ragionamento proporzionale. Alcuni studenti potrebbero basarsi sull'intuizione visiva anziché individuare il denominatore determinato dalle suddivisioni. Nelle varianti più avanzate, gli studenti potrebbero incontrare difficoltà quando la linea dei numeri non inizia da 0 o quando sono coinvolte frazioni improprie o numeri misti. Questi errori indicano un'integrazione insufficiente tra grandezza, notazione e struttura. Potrebbero esserci anche studenti che forniscono come risposta un numero decimale errato; si veda a questo proposito il Quesito 3.4, che affronta tale problematica.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Per sostenere gli studenti, è essenziale dedicare tempo alla costruzione di un solido modello mentale della linea dei numeri che includa frazioni e numeri decimali. Gli insegnanti possono utilizzare strumenti interattivi come strisce pieghevoli, righelli frazionari e linee numeriche digitali per sviluppare il ragionamento proporzionale. L'insegnamento esplicito dovrebbe concentrarsi su come determinare la dimensione di un'unità, come contare le suddivisioni frazionarie e come collegare questi passi al simbolo scritto. Confrontare diverse frazioni sulla stessa retta aiuta a rafforzare la comprensione della grandezza relativa e dell'equivalenza. Attività ponte — come disegnare frazioni su una retta, poi scriverle in forma simbolica e viceversa, o collegarle a rappresentazioni iconiche già note agli studenti (ad esempio, diagrammi circolari) — rafforzano le connessioni tra le rappresentazioni. La verbalizzazione frequente ("Questo è il terzo segmento su quattro, quindi è tre quarti") favorisce l'interiorizzazione della struttura.

Quesito 3.2: Scegliere la frazione che rappresenta una parte di un cerchio

Quale parte del cerchio è colorata?



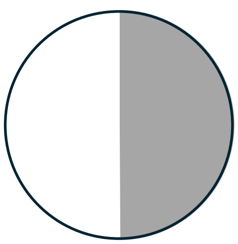
☑ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{8}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$

Soluzione

Nell'immagine originale ci sono 4 parti colorate su un totale di 8 parti. La frazione corrispondente è:

$$\frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}$$

Un'altra possibilità è quella di ignorare le linee di suddivisione e interpretare la parte colorata come metà dell'intero cerchio.



Abilità chiave verificata con questo quesito

Questo quesito mira a valutare la capacità degli studenti di identificare una frazione a partire da una rappresentazione visiva parte–tutto e di selezionare la corretta rappresentazione simbolica della frazione tra più alternative. Nell'immagine, un cerchio è suddiviso in otto parti uguali e quattro di queste sono colorate. La frazione corretta è quindi $\frac{4}{8}$, che corrisponde a $\frac{1}{2}$. Tuttavia, gli studenti non devono solo riconoscere questa relazione, ma anche distinguerla da distrattori plausibili ma errati, come $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ o persino $\frac{8}{4}$. L'abilità fondamentale valutata è la coordinazione tra la comprensione visiva, numerica e strutturale delle frazioni.

Perché questa è un'abilità chiave

Saper interpretare le frazioni a partire da modelli visivi e collegarle correttamente alle rappresentazioni simboliche è una competenza di base nella comprensione dei numeri razionali. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, questo quesito riguarda il concetto di frazione come rapporto tra parte e tutto, concetto centrale per lo sviluppo di abilità più avanzate come l'equivalenza, le operazioni con le frazioni e la proporzionalità. È importante notare che il quesito ricorre a un distrattore che rappresenta un errore concettuale molto frequente: $\frac{8}{4}$ è numericamente maggiore dell'intero, pur contenendo gli stessi numeri al numeratore e al denominatore (solo invertiti). Riconoscere questa discrepanza richiede più che un semplice conteggio visivo: implica la comprensione della struttura, della scala e del significato della frazione.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Il distrattore $\frac{8}{4}$ è particolarmente attraente perché contiene i due numeri presenti nell'immagine — 8 parti in totale e 4 di esse colorate — ma ne inverte l'ordine. La scelta di $\frac{1}{8}$ o $\frac{1}{4}$ può indicare una misconcezione del concetto di proporzione, espressa tramite il conteggio solo delle parti colorate o tramite la mancata considerazione del totale. Alcuni studenti possono scegliere frazioni familiari, come $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2}$, senza analisi approfondita. Tutti questi comportamenti rappresentano segnali di una comprensione fragile o incompleta delle frazioni, in particolare riguardo al coordinamento parte–tutto e all'interpretazione simbolica.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Gli studenti traggono beneficio da attività manipolative con rappresentazioni circolari e rettangolari, come per esempio fogli di carta piegati o da piegare, attraverso le quali possono fisicamente dividere e colorare parti di un intero. L'insegnante potrebbe sottolineare i ruoli del numeratore e del denominatore mediante verbalizzazioni coerenti, ad esempio: "4 parti colorate su 8 parti uguali: sono quattro ottavi, e lo scrivo così: $\frac{4}{8}$." Esercizi di abbinamento tra modelli visivi e diverse espressioni frazionarie, comprese quelle maggiori di 1, aiutano gli studenti a distinguere frazioni proprie, improprie ed equivalenti. Incoraggiare gli studenti a spiegare perché una frazione come $\frac{8}{4}$ non può rappresentare una quantità inferiore a un intero favorisce il pensiero critico e la consapevolezza strutturale. Mettere in evidenza gli errori comuni attraverso discussioni guidate (per esempio: "Perché qualcuno potrebbe pensare che $\frac{8}{4}$ sia corretto?") aiuta a rendere esplicite le misconcezioni e ad affrontarle in modo mirato.

Quesito 3.3: Individuare il termine incognito in un'uguaglianza di rapporti

Scrivi il numero mancante nella casella vuota.

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Soluzione

Prima soluzione
Una possibile soluzione si basa sul riconoscimento che si tratta di due frazioni equivalenti e sull'ampliamento della frazione $\frac{1}{3}$, moltiplicando il numeratore e il denominatore per 3, ottenendo $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$.

Seconda soluzione
Una seconda soluzione potrebbe basarsi sul riconoscimento che si tratta di un'uguaglianza di rapporti e che questi esprimono delle divisioni: $1 : 3 = \_\_ : 9$.
3 è il triplo di 1, quindi 9 è il triplo del termine cercato; dato che $9 : 3 = 3$, la soluzione è 3.

Terza soluzione
Una terza soluzione potrebbe basarsi su "regole" note dal calcolo delle proporzioni e applicate in maniera più o meno meccanica: il prodotto del numeratore della prima per il denominatore della seconda è uguale al prodotto del denominatore della prima per il numeratore della seconda: $1 \cdot 9 = 3 \cdot \_\_$, da cui $9 = 3 \cdot \_\_$ e quindi il termine mancante è 3. È tuttavia poco probabile che venga fornita una soluzione di questo tipo se non si sono ancora affrontate in aula le proporzioni.

Abilità chiave verificata con questo quesito
Questo quesito mira a valutare la comprensione della struttura dei rapporti e delle proporzioni, in particolare la capacità di interpretare un'uguaglianza tra rapporti come relazione moltiplicativa tra grandezze, senza fare riferimento a un supporto visivo o a un contesto applicativo concreto. Agli studenti viene richiesto di determinare il termine incognito nell'equazione "$1 : 3 = \_\_ : 9$", riconoscendo che i due rapporti devono rappresentare la stessa relazione.

Per risolvere correttamente l'esercizio, gli studenti devono individuare il fattore di trasformazione che collega il primo rapporto al secondo (in questo caso, il passaggio da 3 a 9) e applicare lo stesso fattore al numeratore corrispondente. Devono quindi comprendere la proporzione non come una formula da applicare meccanicamente, ma come una relazione strutturale fondata su moltiplicazioni e divisioni coordinate.

Questa flessibilità nel ragionamento proporzionale è un indicatore di maturazione concettuale e rappresenta un passaggio essenziale verso contenuti più avanzati, come percentuali, riduzioni in scala, funzioni lineari e relazioni algebriche.

Perché questa è un'abilità chiave
La capacità di interpretare e manipolare proporzioni e rapporti è considerata un'abilità chiave perché costituisce un fondamento del pensiero proporzionale, uno degli snodi concettuali più importanti nel passaggio dalla matematica aritmetica alla matematica pre-algebrica e algebrica.

Secondo il quadro teorico del Progetto DiToM, la comprensione dei rapporti come relazioni moltiplicative — e non additive — è cruciale per sviluppare concetti come scala, intensità, tassi, pendenze e funzioni lineari. La difficoltà in quest'area può ostacolare profondamente l'apprendimento futuro, poiché il pensiero proporzionale sostiene una vasta gamma di contenuti della scuola secondaria.
Gli studenti che interpretano correttamente "$1:3 = \_\_:9$" come mantenimento di un fattore costante, identificando che "$3 \rightarrow 9$" corrisponde a "$\times 3$" e quindi "$1 \rightarrow 3$", dimostrano di aver interiorizzato una comprensione relazionale dei rapporti, andando oltre il semplice calcolo procedurale.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito
Gli studenti che non hanno sviluppato una solida comprensione dei rapporti tendono a ricorrere a strategie additive inappropriate. Un errore comune è considerare la proporzione come una differenza da mantenere costante ("$3 \rightarrow 9$ aumenta di 6, quindi $1 \rightarrow 7$"), confondendo relazioni additive e relazioni moltiplicative.

Un'altra difficoltà frequente è applicare in modo errato le operazioni inverse: alcuni studenti dividono uno dei termini invece di moltiplicarlo, oppure applicano il fattore di scala solo a un elemento della proporzione.

Inoltre, può emergere una comprensione debole del concetto di rapporto, interpretato come semplice coppia di numeri, senza coglierne il significato relazionale.

Talvolta gli studenti tentano approcci procedurali intuitivi, come cercare numeri "che stanno bene" nella proporzione, o applicare formule memorizzate ("prodotto incrociato") senza comprenderne il senso. Questi comportamenti sono indicatori di una scarsa consapevolezza strutturale del rapporto e di un pensiero ancora aritmetico anziché moltiplicativo-relazionale.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito
Per sostenere gli studenti è utile rendere esplicita la natura moltiplicativa del rapporto, ad esempio mostrando la relazione tra più di due rapporti equivalenti:

"$1:3 = 2:6 = 3:9 = 4:12$".

Rappresentazioni visive come diagrammi o modelli a barre o tabelle di proporzionalità aiutano a rendere evidente il fattore di scala comune.

È efficace invitare gli studenti a verbalizzare il loro ragionamento ("Con quale numero moltiplico 3 per ottenere 9? Allora devo fare la stessa cosa con 1"), così da consolidare l'idea di trasformazioni coordinate.

Infine, è utile proporre esercizi con l'incognita in posizioni diverse (numeratore o denominatore, primo o secondo rapporto) per rinforzare la flessibilità nella comprensione delle proporzioni e prevenire un approccio puramente procedurale.

Quesito 3.4: Confrontare una frazione impropria con dei numeri naturali

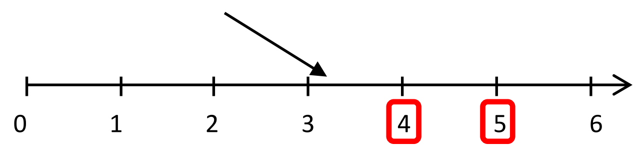
Segna con una crocetta **tutti** i numeri che sono maggiori di $\frac{10}{3}$.

☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☑ 5

Soluzione

Prima soluzione: Si calcola $\frac{10}{3} = 3{,}33\ldots$ oppure scomponendo $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$. Tra i numeri naturali $2, 3, 4, 5$, solo 4 e 5 sono maggiori di $3,\overline{3}$.

Seconda soluzione: Collocare $\frac{10}{3}$ su una linea dei numeri (come frazione, come numero misto $3\frac{1}{3}$, oppure come $3{,}33\ldots$) e confrontarne la posizione con le posizioni di $2, 3, 4, 5$.



Abilità chiave verificata con questo quesito

Questo quesito valuta la capacità degli studenti di confrontare una frazione non unitaria maggiore di 1 ($\frac{10}{3}$) con diversi numeri naturali. Gli studenti devono identificare tutti i numeri dell'insieme $\{2, 3, 4, 5\}$ che sono maggiori di $\frac{10}{3}$. Poiché $\frac{10}{3}$ è uguale a $3 + \frac{1}{3}$, cioè approssimativamente 3,3, la soluzione corretta consiste nel selezionare sia 4 che 5. È importante notare che l'item è considerato corretto solo se entrambi i valori vengono selezionati e nessuna opzione errata viene contrassegnata.

Perché questa è un'abilità chiave

Confrontare frazioni con numeri interi è un'abilità matematica fondamentale, poiché collega gli insiemi dei numeri razionali e dei numeri naturali, contribuendo allo sviluppo di un modello coerente di retta dei numeri. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, tale confronto favorisce la comprensione della grandezza delle frazioni, la capacità di stima e la transizione tra rappresentazioni frazionarie, decimali e miste. La capacità di determinare se una frazione è maggiore o minore di un numero naturale è essenziale per sviluppare flessibilità nell'interpretazione delle rappresentazioni numeriche. Inoltre, questa abilità è necessaria per svolgere con successo compiti che coinvolgono misurazioni, riduzioni o ingrandimenti in scala — ambiti in cui i confronti tra numeri razionali e naturali si verificano regolarmente.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Gli studenti possono commettere errori nella trasformazione di $\frac{10}{3}$, per esempio stimandolo come 2 o 5, e quindi fornire risposte errate selezionando le caselle. Una misconcezione comune consiste nel considerare separatamente numeratore e denominatore — ad esempio, supporre che $\frac{10}{3}$ sia minore di 4 perché "3 è più grande di 1". Alcuni studenti potrebbero selezionare solo un'opzione corretta (ad esempio 4), non comprendendo l'istruzione del quesito o non riconoscendo che esistono più risposte corrette. Altri potrebbero selezionare tutti i numeri maggiori di 3, basandosi su fatti memorizzati o su una strategia per tentativi. Questi errori rivelano una scarsa familiarità con le frazioni improprie e difficoltà nel ragionare in modo flessibile tra diverse rappresentazioni (per esempio, convertire $\frac{10}{3}$ in $3\frac{1}{3}$).

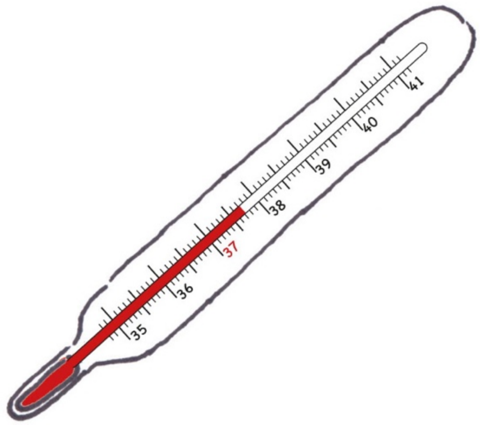
Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Gli studenti potrebbero beneficiare di esercizi di trasformazione di frazioni improprie in numeri misti e di confronto tra frazioni improprie e numeri naturali o misti.

Strumenti visivi come la retta dei numeri o strisce frazionarie possono aiutare a chiarire la posizione di una frazione rispetto ai numeri di riferimento. L'insegnante potrebbe guidare gli studenti a esprimere le frazioni improprie in forma di numero misto (per esempio $\frac{10}{3}$ come $3\frac{1}{3}$) al fine di facilitare la stima e il confronto. Esercizi che richiedono un ragionamento espresso a parole ("$\frac{10}{3}$ è maggiore o minore di 4?") e spiegazioni argomentate (ad esempio giustificare perché 3 non è corretto) promuovono la chiarezza concettuale. Nei quesiti con più risposte corrette, è inoltre utile sottolineare l'importanza della comprensione delle consegne — ossia come interpretare con precisione e completezza le istruzioni del tipo "seleziona **tutte** le risposte corrette".

Quesito 3.5: Leggere una grandezza su una scala decimale

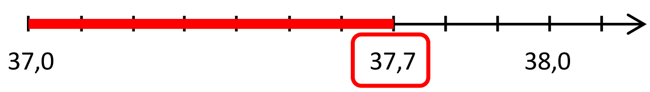
Scrivi la temperatura misurata in °C.



Risposta: 37,7 °C

Soluzione

Il termometro è graduato in decimali (unità: grado Celsius). Facendo un confronto con una retta dei numeri si ha:



Abilità chiave verificata con questo quesito

Questo quesito valuta la capacità degli studenti di interpretare e leggere numeri decimali su una scala graduata, inserita in un contesto reale (un termometro). Agli studenti viene mostrato un termometro analogico con tacche in gradi Celsius e una colonna di liquido rosso che sale fino a un livello specifico: $37{,}7\ °C$. Per rispondere correttamente al quesito, gli studenti devono determinare la temperatura rappresentata graficamente ed esprimerla in notazione decimale. L'abilità fondamentale valutata è la capacità di leggere e interpretare con precisione quantità decimali su una scala metrica continua in un contesto quotidiano.

Perché questa è un'abilità chiave

Nel quadro teorico del Progetto DiToM, l'interpretazione delle misurazioni su scale lineari rappresenta un'abilità matematica fondamentale, poiché integra la comprensione del valore posizionale, la stima della grandezza e il ragionamento metrico. L'interpretazione dei numeri decimali è essenziale nei contesti quotidiani — temperatura, denaro, lunghezza, peso — e costituisce la base per lavori successivi su percentuali, frazioni e funzioni. Inoltre, la lettura di scale in contesti autentici sostiene la competenza matematica funzionale, poiché gli studenti devono attribuire significato a strumenti di misura graduati utilizzati in ambito sanitario, scientifico o nella vita di tutti i giorni. Il collegamento tra informazione visiva e rappresentazione numerica rafforza la capacità di associare quantità continue a simboli numerici con precisione.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Alcuni studenti potrebbero avere difficoltà a interpretare le suddivisioni più piccole della scala, soprattutto se gli intervalli rappresentano decimi (passi di 0,1) invece di numeri interi. Gli errori più comuni includono: arrotondare al numero intero più vicino (ad esempio scrivere 38 invece di 37,7); omettere la virgola decimale (scrivere 377); contare in modo errato le tacche, a causa di una scarsa familiarità con la struttura decimale; interpretare in modo errato il valore di ogni intervallo (ad esempio supporre che la distanza tra 37 e 38 sia divisa in 5 parti invece che in 10). Questi errori derivano spesso da una comprensione insufficiente del valore posizionale, da una scarsa padronanza dei numeri decimali o da un'esperienza limitata nell'interpretazione di scale di misura.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Gli studenti potrebbero trarre beneficio da un'esposizione ripetuta a strumenti di misura graduati, come termometri, righelli e cilindri graduati. L'insegnante potrebbe modellizzare il modo di analizzare gli intervalli, determinare l'ampiezza delle unità e contare in avanti utilizzando i decimi. L'uso di pellicole trasparenti o marcatori colorati per seguire visivamente il livello del liquido può migliorare l'allineamento percettivo. Gli studenti dovrebbero lavorare su quesiti di lettura e scrittura di numeri decimali in situazioni contestualizzate, sostenuti da modelli di retta dei numeri che facilitino il collegamento tra pensiero simbolico e visivo. L'enfasi sulla precisione linguistica (ad esempio: *"tre decimi in più di trentasette"*) contribuisce a rafforzare la chiarezza concettuale sul valore posizionale dei decimali. Infine, esercizi mirati di confronto tra valori come 37,7, 37,8 e 38,0 aiutano a sviluppare una discriminazione fine tra quantità decimali vicine.

Quesito 3.6: Confrontare numeri in notazione decimale

Quale tra i seguenti numeri è il maggiore?

Metti una crocetta nella casella corrispondente alla risposta corretta.

☑ 3,33 ☐ 3,303 ☐ 3,03 ☐ 3,3

Soluzione

I quattro numeri possono essere rappresentati come segue:

$3{,}33 \quad = 3 + 0{,}3 + 0{,}03$

$3{,}303 = 3 + 0{,}3 + 0{,}003$

$3{,}03 \quad = 3 + 0{,}03$

$3{,}3 \quad\; = 3 + 0{,}3$

Confrontando le coppie di numeri, risulta evidente che il numero più grande è 3,33.

Abilità chiave verificata con questo quesito
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di confrontare e ordinare numeri in notazione decimale, in particolare quando sono molto vicini tra loro e differiscono per il numero di cifre decimali. Gli studenti devono determinare quale tra i quattro numeri decimali (3,33, 3,303, 3,03, 3,3) è il più grande. Per risolvere correttamente il quesito, è necessario comprendere che il valore posizionale determina la grandezza del numero, non il numero di cifre né la "lunghezza apparente" della parte decimale. Il quesito verifica in modo specifico la precisione nell'interpretazione della retta dei numeri fino ai centesimi e millesimi, nonché la capacità di riconoscere che 3,33 è maggiore di 3,303, nonostante quest'ultimo abbia più cifre.

Perché questa è un'abilità chiave
Confrontare numeri in notazione decimale è un'abilità matematica fondamentale, poiché riflette la comprensione del valore posizionale nel sistema decimale oltre i numeri interi. Nel quadro teorico del Progetto DiToM, tale competenza è cruciale per sviluppare abilità di stima, di misura e di *numeracy* in contesti reali (ad esempio prezzi, interpretazione di dati).

Il confronto tra numeri in notazione decimale sostiene inoltre l'apprendimento successivo in ambiti come percentuali, algebra e contesti scientifici. Il quesito riflette il modo in cui gli studenti ragionano sulla grandezza relativa e se si concentrano sul valore effettivo anziché su aspetti superficiali, come il numero di cifre o la lunghezza visiva della parte decimale. Questa abilità costituisce una base fondamentale sia per il calcolo mentale, sia per l'interpretazione di dati tabulari o grafici.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito
Un errore concettuale frequente è credere che i numeri decimali più "lunghi" siano più grandi — ad esempio, scegliere erroneamente 3,303 perché ha tre cifre decimali. Altri studenti potrebbero confrontare solo la prima cifra dopo la virgola e trascurare le successive, ad esempio supponendo che $3{,}3 > 3{,}33$ perché 3,3 ha una sola cifra decimale. Oppure, al contrario, potrebbero ritenere che $3{,}3 < 3{,}33$ perché confrontano le parti decimali come se fossero numeri naturali: "$3{,}3 < 3{,}33$ perché 3 è minore di 33". In questo caso si avrebbe una risposta corretta, ma comunque basata su una misconcezione che potrebbe ostacolare in maniera significativa il futuro percorso scolastico in matematica. Alcuni studenti potrebbero avere difficoltà ad allineare mentalmente le posizioni decimali quando i numeri hanno lunghezze diverse. Entrambi questi errori indicano una comprensione fragile del valore posizionale, in

particolare nella distinzione tra decimi, centesimi e millesimi. Essi possono anche riflettere una scarsa esperienza con confronti tra numeri decimali molto vicini, in cui le strategie intuitive non sono sufficienti.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a utilizzare tabelle del valore posizionale per allineare e confrontare le cifre decimali una per una. L'insegnante potrebbe modellizzare strategie come l'aggiunta di zeri finali per uniformare il numero di cifre decimali (ad esempio confrontando $3{,}300, 3{,}330, 3{,}303$). Strumenti visivi come la retta dei numeri con marcatori decimali, blocchi in base dieci o griglie decimali possono rafforzare la comprensione delle grandezze decimali. È fondamentale sottolineare che "più cifre non significano necessariamente più valore". Esercizi di ragionamento ("Quale numero è maggiore e perché?") e giochi di stima su denaro, lunghezze o volumi possono contribuire a consolidare la capacità di confronto in contesti significativi.

Quesito 3.7: Individuare gli addendi mancanti in un'uguaglianza con numeri in notazione decimale

Scrivi i numeri mancanti negli spazi vuoti.

a) $1{,}8 + \underline{3{,}5} = 5{,}3$

b) $\underline{1{,}49} + 0{,}51 = 2$

Soluzione

Una possibile soluzione per il punto a): il numero mancante può essere interpretato attraverso una sottrazione:

$$\_\_\_ = 5{,}3 - 1{,}8 = 3{,}5$$

Un'altra soluzione per il punto a): utilizzare la strategia del completamento parziale, in più passaggi.

Passaggio 1: $1{,}8 + 3 = 4{,}8$

Passaggio 2: $4{,}8 + 0{,}2 + 0{,}3 = 5{,}3$

Risposta, in base ai passaggi 1 e 2: $3 + 0{,}2 + 0{,}3 = 3{,}5$

(La seconda strategia è comunemente utilizzata nel calcolo mentale, più raramente in notazione scritta.)

Una possibile soluzione per il punto b): il numero mancante può essere interpretato come il risultato di una sottrazione:
$\_\_\_ = 2 - 0{,}51 = 1 + 1 - 0{,}51 = 1 + 0{,}49 = 1{,}49$ *(si utilizza il fatto numerico* $0{,}49 + 0{,}51 = 1{,}00$*)*

Una seconda soluzione per il punto b), anch'essa basata sulla sottrazione, ma senza ricorso al fatto numerico $0{,}49 + 0{,}51 = 1{,}00$:

$$\_\_\_ = 2 - 0{,}51 = 1 + 1 - 0{,}5 - 0{,}01 = 1 + 0{,}5 - 0{,}01 = 1 + 0{,}4 + 0{,}10 - 0{,}01 = 1{,}4 + 0{,}09 = 1{,}49$$

(Questa seconda soluzione può essere eseguita anche con l'algoritmo scritto per la sottrazione, disponendo il secondo numero sotto il primo e utilizzando il "prestito" o il "riporto".)

Una terza soluzione per il punto b):Utilizzare la strategia del completamento parziale, in più passaggi.

Passaggio 1: $0{,}49 + 0{,}51 = 1{,}00$ (fatto numerico)

Passaggio 2: $1 + 1{,}00 = 2$

Risposta, in base ai passaggi 1 e 2: $0{,}49 + 1 = 1{,}49$

Abilità chiave verificata con questo quesito
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di determinare un addendo mancante in un'uguaglianza con numeri decimali, interepretando correttamente il valore posizionale, la struttura delle uguaglianze e le operazioni inverse. In entrambi i casi, gli studenti si trovano di fronte a una somma con un componente mancante:

- in a) devono determinare quale numero aggiungere a $1{,}8$ per ottenere $5{,}3$;
- in b) devono determinare quale numero aggiungere a $0{,}51$ per ottenere 2.

Ciò richiede una strategia sottrattiva (per esempio $5{,}3 - 1{,}8$) oppure una comprensione concettuale della relazione additiva. L'abilità chiave consiste nella capacità di applicare in modo flessibile la struttura algebrica di base e l'aritmetica decimale.

Perché questa è un'abilità chiave

Individuare il termine mancante in un'uguaglianza numerica rappresenta un'abilità fondamentale per il collegamento tra aritmetica e algebra. Nell'ambito del Progetto DiToM, tali quesiti sono considerati esempi di ragionamento pre-algebrico: gli studenti devono vederel'uguaglianza come una struttura unica e comprendere il ruolo strutturale del valore mancante (l'incognita). Inoltre, lavorare con valori decimali rafforza la padronanza della struttura in base dieci e favorisce il successo nell'apprendimento di temi successivi come la misurazione, la matematica finanziaria e il ragionamento proporzionale. La capacità di passare dagli elementi noti a quelli mancanti tramite operazioni inverse riflette una comprensione più profonda delle operazioni e del segno di uguaglianza come relazione di equivalenza, contribuendo allo sviluppo futuro del senso di equazione.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Alcuni studenti potrebbero fornire una risposta a caso anziché applicare la sottrazione, soprattutto se non sanno gestire correttamente il valore posizionale dei decimali. Un errore tipico consiste nel disallineare le cifre decimali (ad esempio trattando $1{,}8$ come 18 o omettendo di allineare i decimi). Nella parte b), gli studenti possono confondere la posizione dell'incognita e sottrarre $0{,}51$ da 0 invece che da 2. Altri possono risolvere il quesito addizionando invece di sottrarre, o scrivere un risultato numericamente "plausibile" ma non coerente con la struttura decimale. Questi errori segnalano lacune procedurali, insicurezza nel calcolo con i decimali o una comprensione incompleta della struttura dell'uguaglianza.

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Un supporto efficace include attività di pratica con uguaglianze con termini mancanti, utilizzando la retta dei numeri per rappresentare i numeri decimali, modelli a barre o modelli di bilancia per visualizzare le relazioni e applicare strategie di calcolo intelligenti. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a riscrivere le equazioni come sottrazioni per isolare l'incognita e a stimare il risultato prima del calcolo per verificarne la plausibilità. Esercizi che si concentrano sull'allineamento dei decimali e sulla scomposizione dei numeri possono migliorare la padronanza del calcolo decimale. Incoraggiare spiegazioni verbali ("Quanto bisogna aggiungere a $1{,}8$ per ottenere $5{,}3$?") rafforza il ragionamento e collega l'aritmetica alla struttura algebrica.

Quesito 3.8: Eseguire calcoli con numeri in notazione decimale

Calcola e scrivi il risultato.

a) $23{,}5 - 1{,}12 =$ 22,38

b) $6 \cdot 2{,}5 =$ 15

Soluzione

a) $23{,}5 - 1{,}12 = 22 + 0{,}50 - 0{,}12 = 22 + 0{,}38 = 22{,}38$ (si utilizza il fatto numerico $50 - 12 = 38$)

La sottrazione $50 - 12$ può essere calcolata mediante il metodo del "completamento": $50 - 12 = 8 + 30 = 38$. (Il processo di completamento può essere illustrato sulla retta dei numeri.)

b) $6 \cdot 2{,}5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0{,}5 = 12 + 3 = 15$

Mostrando esplicitamente come viene applicata la proprietà distributiva:

$$6 \cdot 2{,}5 = 6 \cdot (2 + 0{,}5) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0{,}5 = 12 + 3 = 15$$

Commento: il calcolo $6 \cdot 0{,}5$ può essere interpretato come "6 metà = 3 interi" oppure, simbolicamente: $6 \cdot 0{,}5 = 3 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 3 \cdot 1 = 3$ (fatto numerico: $2 \cdot 0{,}5 = 1$, "due volte un mezzo fa uno (intero)")

Un'altra soluzione, anch'essa basata sulla fattorizzazione $6 = 3 \cdot 2$:

$6 \cdot 2{,}5 = 3 \cdot 2 \cdot 2{,}5 = 3 \cdot 5 = 15$ (fatto numerico: $2 \cdot 2{,}5 = 5$)

Mostrando esplicitamente come viene applicata la proprietà associativa:

$6 \cdot 2{,}5 = (3 \cdot 2) \cdot 2{,}5 = 3 \cdot (2 \cdot 2{,}5) = 3 \cdot 5 = 15$

Un'ulteriore soluzione, basata sulla scomposizione $6 = 4 + 2$:

$6 \cdot 2{,}5 = 4 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 2{,}5 = 10 + 5 = 15$

Mostrando esplicitamente come viene applicata la proprietà distributiva:

$6 \cdot 2{,}5 = (4 + 2) \cdot 2{,}5 = 4 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 2{,}5 = 10 + 5 = 15$

Abilità chiave verificata con questo quesito
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di eseguire correttamente operazioni aritmetiche con numeri in notazione decimale. Nella parte a) è richiesto di calcolare la differenza tra 23,5 e 1,12; nella parte b) è richiesto di determinare il prodotto di 6 e 2,5. Entrambi gli item mettono alla prova la comprensione del valore posizionale, la padronanza operativa e la precisione nei calcoli con numeri decimali — sia nell'allineamento che nell'esecuzione di calcoli.
Il quesito riflette abilità di routine ma fondamentali nel contesto del sistema decimale.

Perché questa è un'abilità chiave
Eseguire operazioni di base con numeri decimali è un'abilità matematica fondamentale, come definito nell'ambito del Progetto DiToM. Essa è essenziale non solo per la *numeracy* quotidiana (per esempio nella gestione del denaro, nelle misure o nei dati), ma anche per sostenere la generalizzazione algebrica e il ragionamento proporzionale. La padronanza del calcolo con numeri decimali si trova alla base in molti ambiti matematici, tra cui geometria, statistica

e risoluzione di problemi in contesti scientifici. La capacità di calcolare con numeri in notazione decimale riflette una profonda integrazione tra conoscenza del valore posizionale, controllo algoritmico e strategie di stima.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Gli errori più comuni nella parte a) riguardano il disallineamento delle cifre decimali (per esempio trattare $23{,}5$ come $23{,}50$ ma non allinearlo correttamente con $1{,}12$), con conseguenti sottrazioni errate. Gli studenti possono anche sottrarre cifre dalle posizioni sbagliate o ignorare completamente la virgola decimale. Alcuni potrebbero utilizzare strategie inadeguate, come addizioni ripetute, senza controllo strutturale. Tali errori indicano una comprensione debole del valore posizionale, delle proprietà delle operazioni o della collocazione dei decimali.

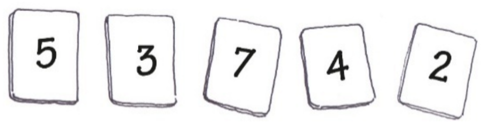
Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Il supporto dovrebbe includere esercizi strutturati sull'allineamento dei valori posizionali, in particolare nelle sottrazioni con più cifre decimali. Gli insegnanti potrebbero utilizzare fogli a quadretti o tabelle del valore posizionale per aiutare gli studenti ad allineare correttamente le cifre. Strategie di stima del risultato ("Il risultato sarà circa 22 o 10?") aiutano a sviluppare il senso del numero e il controllo della plausibilità delle soluzioni. Per la moltiplicazione, l'uso di modelli rettangolari o blocchi in base dieci può sostenere la comprensione concettuale della moltiplicazione con i decimali. È utile anche mostrare sia gli algoritmi standard sia le strategie di calcolo mentale, ad esempio: $6 \cdot 2{,}5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0{,}5 = 15$ oppure $6 \cdot 2{,}5 = (3 \cdot 2) \cdot 2{,}5 = 3 \cdot (2 \cdot 2{,}5) = 3 \cdot 5 = 15$ (proprietà associativa della moltiplicazione). Incoraggiare il ragionamento verbale rafforza la comprensione di come i decimali si comportano nelle operazioni.

Quesiti 3.9 e 3.10: Massimizzare il valore di una frazione scegliendo il numeratore o il denominatore adeguato

Quesito 3.9

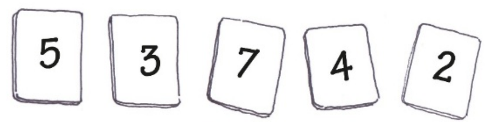
Qui sotto sono rappresentati cinque numeri.



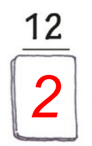
Scegli il numero che rende la frazione sottostante la più grande possibile e scrivilo nella casella vuota al numeratore.

Quesito 3.10

Qui sotto sono rappresentati cinque numeri.



Scegli il numero che rende la frazione sottostante la più grande possibile e scrivilo nella casella vuota al denominatore.



Soluzioni

Il quesito 3.9 può essere risolto applicando il seguente principio:

Inserendo un numero più grande al numeratore (in alto), mantenendo invariato il denominatore, la frazione diventa più grande.

Uno dei numeri $5, 3, 7, 4, 2$ deve essere inserito al numeratore. Poiché 7 è il più grande di questi numeri, la frazione più grande possibile è $\frac{7}{13}$.

Quesito 3.10 può essere risolto applicando il seguente principio:

Inserendo un numero più piccolo nel denominatore (in basso), mantenendo invariato il numeratore, la frazione diventa più grande.

Uno dei numeri $5,\ 3,\ 7,\ 4,\ 2$ deve essere inserito al denominatore. Poiché 2 è il più piccolo di questi numeri, la frazione più grande possibile è $\frac{7}{2}$.

Abilità chiave verificata con questo quesito
Questo quesito valuta la capacità degli studenti di ragionare sulla struttura delle frazioni e di applicare tale comprensione per massimizzare il valore di una frazione scegliendo il numero più appropriato da un insieme di numeri dati. Agli studenti vengono presentate alcune carte, ciascuna con un numero diverso, e viene chiesto di inserirne una in una struttura frazionaria data in modo che il valore della frazione risultante sia il più grande possibile. La frazione può essere priva del numeratore o del denominatore, e gli studenti devono scegliere il numero che rende massima la frazione. Il quesito mette alla prova la capacità di ragionamento flessibile con rapporti e grandezze relative.

Perché questa è un'abilità chiave
Comprendere come il numeratore e il denominatore influenzano la grandezza di una frazione è un concetto centrale nell'apprendimento delle frazioni. Nel quadro di riferimento del Progetto DiToM, questa abilità riflette una

comprensione più profonda della grandezza frazionaria — cioè come l'aumento del numeratore o la diminuzione del denominatore influenzano il valore complessivo della frazione. Essa sostiene inoltre lo sviluppo del pensiero relazionale, in cui gli studenti vanno oltre le caratteristiche superficiali per ragionare in modo strutturale sulle relazioni tra numeri. Queste intuizioni sono essenziali per lo studio successivo di rapporti, proporzioni, riduzioni e ingrandimenti in scala e ragionamento algebrico.

Errori comuni e segnali di allerta legati a questo quesito

Un errore comune consiste nel selezionare semplicemente il numero più grande disponibile, indipendentemente dal fatto che esso si trovi al numeratore o al denominatore, basandosi sull'idea errata che "più grande è sempre meglio". Ciò indica una strategia procedurale superficiale, priva di comprensione strutturale. Altri studenti potrebbero scegliere a caso o confondere i ruoli di numeratore e denominatore, cercando di massimizzare il numero stesso invece del valore della frazione risultante. Tali errori rivelano una comprensione fragile delle caratteristiche delle frazioni e una limitata esperienza nel confronto di frazioni non unitarie. Alcuni studenti possono anche fraintendere lo scopo del quesito (per esempio, cercare di ottenere una frazione il più vicino possibile a 1 invece di massimizzarne il valore).

Forme di supporto per gli alunni che mostrano difficoltà in questo quesito

Un supporto efficace include attività manipolative con strisce frazionarie o la retta dei numeri, in cui gli studenti possono modificare numeratori e denominatori per osservare come cambia il valore della frazione. L'insegnante potrebbe modellizzare confronti del tipo "$\frac{3}{4}$ vs. $\frac{3}{5}$" o "$\frac{4}{7}$ vs. $\frac{5}{7}$" per mostrare come il numeratore o il denominatore influenzino il valore della frazione. Attività di discussione in aula ("Quale è maggiore e perché?") favoriscono il ragionamento e la comprensione più profonda. La visualizzazione delle frazioni sulla stessa retta dei numeri o tramite software interattivi che mostrano dinamicamente il valore delle frazioni può aiutare gli studenti a comprendere queste relazioni. Nel tempo, guidare gli studenti verso generalizzazioni come "a parità di numeratore, un denominatore più piccolo rende la frazione più grande" sostiene il trasferimento delle abilità in altri ambiti e l'astrazione concettuale.

VI. Valutazione scientifica

Il DiToM Screening 6+ è stato sviluppato sulla base di un quadro teorico solido ed è stato sottoposto a verifica nell'ambito di uno studio di validazione non rappresentativo. I risultati servono a identificare gli studenti potenzialmente a rischio a causa della mancanza di competenze matematiche chiave necessarie per l'apprendimento successivo della matematica a scuola. Il test aiuta gli insegnanti, alla fine della classe prima o all'inizio della classe seconda della scuola secondaria di primo grado, a formulare una valutazione empiricamente fondata delle conoscenze e abilità degli studenti e a individuare coloro che presentano risultati anomali, al fine di pianificare un sostegno mirato in una fase precoce.

Descrizione del campione e risultati principali dell'iter di validazione
Il test è stato somministrato nei mesi di giugno e luglio 2025, durante le ultime tre settimane dell'anno scolastico 2024/2025, a un campione di 1841 alunni provenienti da scuole collocate nei sette Paesi partner del Progetto DiToM: Croazia, Germania, Grecia, Francia, Italia, Spagna e Svezia.

Il test comprende le seguenti sezioni: abilità aritmetiche di base, con 12 item; proporzionalità, con 4 item; calcolo tecnico, con 13 item. Per ogni item risolto correttamente è stato assegnato 1 punto; in caso di soluzione errata, incompleta o mancante, sono stati assegnati 0 punti. Il test è stato svolto secondo criteri standardizzati (vedi sezione IV. *Implementazione del test DiToM*) ed è stato successivamente validato. Poiché il test è concepito come uno strumento di screening volto a individuare studenti potenzialmente a rischio, erano attesi — e desiderati — forti "effetti di soffitto" (*ceiling effects*), cioè una distribuzione non normale, ma asimmetrica a sinistra. Tale caratteristica è stata confermata dalla sperimentazione.

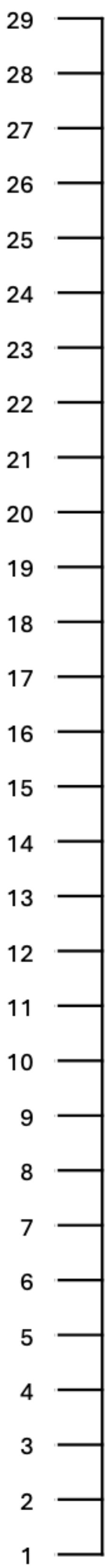
Per favorire un utilizzo efficace del test in ambito didattico, non è stato definito un unico valore soglia, bensì due valori soglia che permettono di distinguere tra studenti potenzialmente a rischio, studenti da monitorare attentamente nelle settimane successive e studenti potenzialmente non a rischio. La determinazione dei punteggi soglia è stata guidata dai dati, attraverso un'analisi delle classi latenti che ha evidenziato tre classi chiaramente distinguibili. Tali classi risultano monotone e non sovrapposte. Le probabilità posteriori di appartenenza alle classi sono state tracciate in funzione del punteggio, opportunamente smussate (smoothed), e utilizzate per individuare i punti di intersezione corrispondenti ai valori soglia rilevanti per le decisioni di supporto.

L'analisi ha portato all'identificazione di tre gruppi distinti, denominati K1, K2 e K3. Il gruppo K1 comprende studenti con prestazioni nettamente deboli nel test di screening; il gruppo K2 include studenti con risultati relativamente deboli; il gruppo K3 è costituito da studenti i cui risultati complessivi non destano particolari preoccupazioni.

Per determinare il punteggio critico, è stata selezionata la soglia fino alla quale vi è una probabilità del 50% di appartenere alla classe con prestazioni deboli al test. Questa prima soglia corrisponde a 14 punti. Gli studenti che hanno ottenuto un punteggio uguale o inferiore a 14 punti necessitano di un supporto mirato per consolidare le conoscenze di base, al fine di poter costruire in modo adeguato i contenuti matematici successivi. La seconda soglia è stata fissata a 23 punti. Gli studenti che hanno ottenuto un punteggio compreso tra 15 e 23 punti dovrebbero essere monitorati durante le settimane successive, al fine di verificare se riescono a seguire le lezioni in maniera proficua.

VII. Scheda di valutazione dello Screening 6+

La seguente scala fornisce indicazioni iniziali sulle abilità che probabilmente corrispondono ai punteggi riportati dagli studenti, suddivisi in tre fasce: $0-14$ punti, $15-22$ punti e $23-29$ punti.



Punteggio $23-29$: lo studente non presenta particolari criticità rispetto ai prerequisiti necessari per l'apprendimento futuro in matematica

C: oltre alle abilità indicate nei punti A e B, lo studente è potenzialmente in grado di …
… scegliere la frazione corretta per rappresentare una parte evidenziata di un cerchio, moltiplicare numeri naturali, rappresentare numeri decimali/frazioni sulla retta dei numeri con scala decimale, confrontare numeri decimali, massimizzare il valore di una frazione scegliendo un denominatore adeguato ed eseguire sottrazioni con i numeri decimali.

Lo studente potenzialmente non è in grado di …
… eseguire divisioni con numeri naturali e rappresentare numeri decimali/frazioni sulla retta dei numeri in scala non decimale o mista.

Punteggio $15-22$: l'apprendimento dello studente dovrebbe essere monitorato attentamente durante le settimane successive per valutare se riesce a segure in maniera proficua

B: oltre alle abilità indicate in A, lo studente è potenzialmente in grado di…
… eseguire divisioni con numeri naturali per lo più in maniera corretta, identificare una regola in una sequenza numerica e proseguirla, trovare addendi mancanti in uguaglianze con numeri decimali, rappresentare una frazione data di un rettangolo e moltiplicare numeri naturali.

Lo studente è raramente in grado di…
… eseguire moltiplicazioni con numeri decimali e determinare quantità incognite in una relazione di uguaglianza tra quantità.

Punteggio $1-14$: lo studente è a rischio rispetto ai prerequisiti necessari per l'apprendimento futuro in matematica e necessita un supporto mirato il prima possibile

A: lo studente è potenzialmente in grado di …
… rappresentare frazioni equivalenti, massimizzare il valore di una frazione scegliendo un numeratore adeguato, leggere numeri decimali su una scala decimale, applicare le regole di priorità delle operazioni, confrontare frazioni improprie e numeri naturali, interpretare rappresentazioni grafiche di frazioni equivalenti.

Lo studente è raramente in grado di …
… utilizzare relazioni di proporzionalità diretta in contesti che coinvolgono quantità e prezzi, tradurre un testo scritto in espressioni matematiche.

VIII. Riferimenti bibliografici

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education. In *Proceedings of EDULEARN25 Conference*. Palma, Spain. Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7

Cusi, A., & Navarra, G. (2012). *L'approccio alla generalizzazione con alunni giovani in ambiente early algebra*. Disponibile da: http://www.progettoaral.it/2013/05/23/cusi-navarra-2012/

D'Amore, B., Asenova, M., Del Zozzo, A., Iori, M., Nicosia, G. G., & Santi, G. (2023). *I numeri: Matematica, storia, giochi e curiosità, per una didattica corretta ed efficace*. Bonomo.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M., Santi, G., & Sbaragli, S. (2025). *Riflessioni didattiche sul tema «Frazioni»*. Bonomo.

Malara, N.A., & Navarra, G. (2024). *Quadro teorico di riferimento e glossario del Progetto ArAl*. Sintab Edizioni.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics, 106*(3), 447–469.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Navarra, G. (2022). *Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante*. Utet.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 76*(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 909–918.

Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM, 46*(1), 45–58.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Information Age.