Freie Universität Bozen
Libera Università di Bolzano
Università Liedia de Bulsan

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Screening Test 6+
Handbuch

Co-funded by the European Union

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Handbuch soll Sie bei der Durchführung des DiToM 6+ Screenings und bei der Nutzung der Testergebnisse in Ihrem Unterricht unterstützen. Auf den folgenden Seiten finden Sie:

1. eine kurze Einführung in die Ziele und Leitprinzipien des Erasmus+-Projekts DiToM (**Di**agnostic **To**ol in **M**athematics);
2. Hinweise zur Durchführung des DiToM 6+ Screenings;
3. kurze Erläuterungen zu jeder Aufgabe des DiToM 6+ Screenings, einschließlich Hinweisen zu möglichen Förderstrategien für Schüler*innen, deren Screening-Ergebnisse Lernlücken in wichtigen mathematischen Kompetenzen aufzeigen;
4. Anleitungen zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse.

Die Anweisungen und die in Abschnitt 4 beschriebenen Bewertungstabellen können auch separat als einzelne PDF-Dateien unter www.ditom.org heruntergeladen werden.

I. Ziele und Leitprinzipien von DiToM

Das Lernen von Mathematik verläuft kontinuierlich: Neues Wissen baut auf gesichertem Vorwissen auf. Fehlen grundlegende mathematische Ideen und Konzepte, fällt es den Schüler*innen zunehmend schwerer, mathematische Inhalte zu verstehen und zu begreifen, die auf diesem Fundament aufbauen. Sowohl nationale als auch internationale Studien zeigen, dass ein erheblicher Anteil der Schüler*innen bereits in der Grundschule die Mindeststandards in Mathematik nicht erreicht – und aus den oben genannten Gründen fast zwangsläufig auch in der Sekundarstufe weiterhin Schwierigkeiten hat. Alarmierend ist, dass viele junge Menschen ihre Schulpflicht beenden, ohne das grundlegende Niveau an mathematischer Kompetenz erreicht zu haben, das laut OECD für eine „vollständige Teilhabe am gesellschaftlichen Leben" unerlässlich ist.

Um dem entgegenzuwirken, müssen Lehrkräfte zunächst in der Lage sein, mathematische Lernschwierigkeiten zu erkennen – idealerweise frühzeitig und so genau wie möglich. Nur auf dieser Grundlage können gezielte Fördermaßnahmen ergriffen werden. Genau hier setzt das EU-Projekt *„**Di**agnostic **To**ol in **M**athematics" (*DiToM*)* an. In einer Partnerschaft zwischen Deutschland, Frankreich, Griechenland, Kroatien, Italien, Schweden und Spanien wurden fünf miteinander verbundene Screening-Instrumente entwickelt. Diese Tools ermöglichen es Lehrkräften, sich am Ende oder zu Beginn eines Schuljahres einen präzisen Überblick darüber zu verschaffen, welche Schüler*innen Gefahr laufen, in Mathematik zurückzufallen, wenn sie keine gezielten Fördermaßnahmen erhalten.

Die Screenings folgen einem zweijährigen Zyklus:

- **Screening 0+** Beginn der Grundschule
- **Screening 2+** Ende der 2. Klasse / Beginn der 3. Klasse
- **Screening 4+** Ende der 4. Klasse / Beginn der 5. Klasse
- **Screening 6+** Ende der 6. Klasse / Beginn der 7. Klasse
- **Screening 8+** Ende der 8. Klasse / Beginn der 9. Klasse

Was sind die DiToM-Screenings und was bewirken sie?

Die fünf Screenings sind paper-and-pencil Tests, die sich auf wichtige mathematische Kompetenzen konzentrieren, die zu Beginn einer Klassenstufe sicher beherrscht werden sollten, damit neue Inhalte mit Verständnis gelernt werden können. Jeder Test kann innerhalb einer Unterrichtsstunde (45 Minuten) mit der gesamten Klasse durchgeführt und mit Hilfe der bereitgestellten Bewertungsinstrumente (siehe Abschnitt V) mit relativ geringem Zeitaufwand ausgewertet werden. Die Ergebnisse geben den Lehrkräften einen ersten strukturierten Überblick darüber, welche Schüler*innen wahrscheinlich zusätzliche Unterstützung benötigen.

Das Wort *„wahrscheinlich"* ist entscheidend: Ein Screening **ersetzt keine individuelle, qualitative Beurteilung des Lernstands** eines Kindes. Es liefert vielmehr erste Anhaltspunkte dafür, welche Strategien oder Lösungsansätze ein Kind möglicherweise verwendet hat. Ein detaillierteres Verständnis erfordert gezielte Beobachtungen und Einzelgespräche unter Verwendung differenzierterer Aufgaben. Das Screening kann jedoch als wertvoller Ausgangspunkt dienen, um zu bestimmen, welche Kinder am meisten von solchen Folgeuntersuchungen profitieren würden.

Was sind „mathematische Schlüsselkompetenzen“?

Wie bereits erwähnt, zeichnet sich die Mathematik in der Schule durch eine *„interne Lernhierarchie“* aus (Wittmann, 2015, S. 199). Dies gilt insbesondere für die Bereiche Arithmetik und Algebra – genau die Bereiche, auf die sich die DiToM-Screenings bewusst konzentrieren. In diesen Bereichen ist es in jeder Lernphase möglich, *Schlüsselkompetenzen* zu identifizieren – Kompetenzen, ohne die weiteres Lernen nicht sinnvoll und nachhaltig stattfinden kann.

Ein Beispiel: Um erfolgreich mit natürlichen Zahlen arbeiten zu können, müssen Kinder diese im Sinne *des Teil-Ganzes-Konzepts* verstehen – ein Entwicklungsprozess, der im ersten Schuljahr abgeschlossen sein sollte. Das Teil-Ganzes-Konzept bedeutet beispielsweise, dass die Zahl sieben als ein Ganzes verstanden wird, das sich aus Teilen zusammensetzt – fünf und zwei, vier und drei, eins und sechs und so weiter. Dieses Verständnis sollte dann automatisch erfolgen: Ein Kind sollte keine bewusste Anstrengung mehr benötigen, um fünf als den fehlenden Teil von sieben zu erkennen, wenn zwei als der andere Teil gegeben ist. Mit anderen Worten: Kinder sollten Zahlen automatisch in Bezug auf ihre Zerlegungen und Beziehungen denken. Diese Kombination aus *Verständnis* und *Automatisierung* ist charakteristisch für viele Schlüsselkompetenzen: Erst wenn bestimmte Fähigkeiten automatisch ablaufen, kann geistige Kapazität freigesetzt werden, um höhere mathematische Herausforderungen anzugehen.

Ob die Schlüsselkompetenz „Zahlen als Zusammensetzungen betrachten” (oder „Zahlenzerlegung”) gut verankert ist, lässt sich beispielsweise an den Rechenstrategien eines Kindes erkennen. Ein Kind, das sieben als fünf und zwei betrachtet, löst 7 – 5 mühelos, selbst in der ersten Schulklasse, ohne zu zählen. Kinder, denen diese Kompetenz fehlt, verlassen sich jedoch oft bis weit in die späteren Grundschul- und Sekundarschulklassen hinein auf mühsame, fehleranfällige Zählstrategien. Das Zählen bei Addition und Subtraktion wird schnell unüberschaubar, wenn es um zwei- oder dreistellige Zahlen geht. Solche Kinder haben auch Schwierigkeiten, Beziehungen zwischen Multiplikationsaufgaben zu erkennen – zum Beispiel, dass $9 \cdot 6$ sechs weniger ist als das leicht zu merkende $10 \cdot 6$. Defizite in einer Schlüsselkompetenz (das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen) behindern somit den Erwerb anderer Kompetenzen (Addition, Subtraktion, Multiplikation), die wiederum Voraussetzungen für fortgeschrittenere Fähigkeiten (Division, proportionales Denken usw.) sind.

Diese Kette setzt sich über die Grundschule hinaus fort: Schüler*innen, die Schwierigkeiten mit natürlichen Zahlen haben, werden noch größere Schwierigkeiten mit Brüchen und Dezimalzahlen haben. Algebra baut später auf Erkenntnissen auf, die durch die Arbeit mit den Grundrechenarten in der Grundschule gewonnen werden sollten. Ohne diese Erkenntnisse kann Algebra für Schüler*innen wie ein unentzifferbarer Code erscheinen.

Aus diesem Grund konzentrieren sich die DiToM-Screenings auf Schlüsselkompetenzen – diejenigen, die zu Beginn der Klassenstufen 1, 3, 5, 7 und 9 sicher etabliert sein sollten, damit das weitere mathematische Lernen erfolgreich fortgesetzt werden kann.

Was geschieht nach der Durchführung des DiToM-Screenings?

Mithilfe der in Abschnitt V beschriebenen Auswertungshilfen können Lehrer*innen den Test digital mit Excel oder analog in Papierform auswerten.

Mit Blick auf einzelne Schüler:

Bei DiToM geht es nicht darum, Schüler*innen zu etikettieren. Die Screenings sind **nicht** darauf ausgelegt, Schüler*innen mit „Dyskalkulie" zu identifizieren. Klinische Diagnosen dieser Art gehen nicht auf die Kernfrage ein, die DiToM beantworten möchte: Wie können Lehrer*innen Kinder, die Schwierigkeiten mit grundlegenden Rechenkompetenzen haben, am besten unterstützen? Eine gezielte Unterstützung erfordert ein genaues Verständnis des aktuellen Lernniveaus jedes einzelnen Kindes. DiToM hilft dabei, diejenigen zu identifizieren, für die eine solche detaillierte Bewertung dringend erforderlich ist – nicht mehr, aber auch nicht weniger. Abschnitt III enthält kurze Hinweise dazu, welche Arten von Folgemaßnahmen für jede einzelne Aufgabe hilfreich sein können.

Die in Abschnitt V diskutierten „kritischen Schwellenwerte" wurden auf der Grundlage von Datenerhebungen mit DiToM-Screenings bei 8.820 Schüler*innen in den sieben Partnerländern ermittelt. Unter Verwendung der Latent-Class-Analyse (siehe Yin, Bezirhan & von Davier, 2025) wurden die Schüler*innen wie folgt gruppiert:

- **Gruppe A:** Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.
- **Gruppe B:** Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.
- **Gruppe C:** Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Es ist wichtig, sich vor Augen zu halten, dass jedes Screening nur eine *Momentaufnahme* darstellt. Manche Schüler*innen hatten vielleicht einfach einen schlechten Tag oder waren abgelenkt, andere haben trotz Vorsichtsmaßnahmen möglicherweise Antworten abgeschrieben. Die Ergebnisse eines Screeningtests sollten daher mit Vorsicht interpretiert werden. Sie sollten immer mit den Beobachtungen aus dem täglichen Unterricht verglichen und als Anstoß für weitere gezielte Beobachtungen und Folgeaufgaben in den kommenden Tagen und Wochen genutzt werden.

Wenn sich herausstellt, dass ein Kind in **Gruppe A** fällt, ist davon auszugehen, dass sich seine mathematischen Schwierigkeiten im Laufe des Schuljahres verschlimmern werden, sofern nicht rechtzeitig wirksame Maßnahmen ergriffen werden. Abschnitt IV kann nur allgemeine Hinweise für solche Maßnahmen geben, die auf den in den einzelnen Aufgaben bewerteten Schlüsselkompetenzen basieren. Für ausführlichere Fördermaßnahmen müssen Lehrer*innen die einschlägige pädagogische Literatur heranziehen.

Auch Kinder der **Gruppe B** benötigen wahrscheinlich in mindestens einigen Bereichen gezielte Unterstützung, um erfolgreich lernen zu können. Es sei daran erinnert, dass alle Screening-Aufgaben Schlüsselkompetenzen bewerten. Das Screening ist bewusst so konzipiert, dass es *keine* Unterscheidung zwischen leistungsstarken Kindern trifft – im Idealfall sollten die meisten Kinder die Aufgaben recht einfach finden.

Daher sollten auch Fehler, die Kinder **der Gruppe C** bei einzelnen Aufgaben machen, ernst genommen werden, da sie auf Lücken in grundlegenden Schlüssel-kompetenzen hinweisen können.

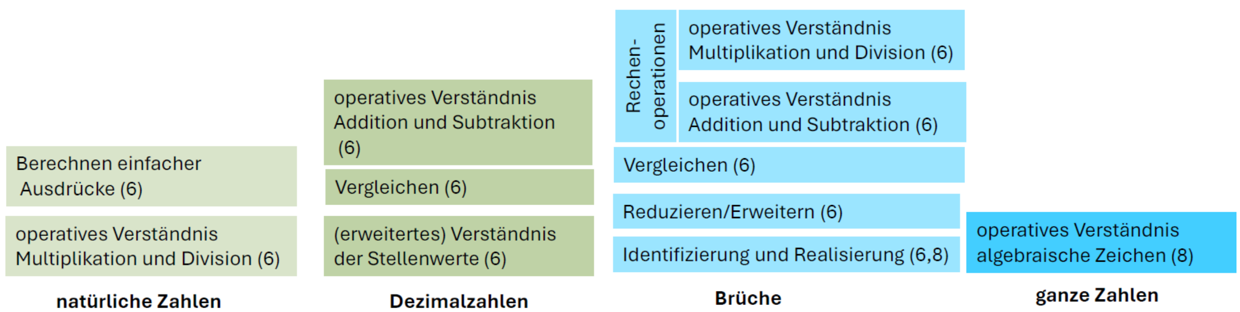
Mit Blick auf die Klasse als Ganzes:

Letzteres gilt insbesondere dann, wenn die Ergebnisse zeigen, dass mehrere Kinder mit demselben Testteil oder derselben Aufgabe Schwierigkeiten hatten. Dies kann darauf hindeuten, dass sie entweder in ihrer bisherigen Schulzeit oder vor der Einschulung nur unzureichend oder nicht gezielt in dieser Kompetenz geübt wurden. In solchen Fällen ist es umso wichtiger, dass diese Lernmöglichkeiten jetzt angeboten werden, auch wenn der Lehrplan bereits zu neuen Inhalten übergegangen ist. Auch hier ist es wichtig, die hierarchische Struktur des Mathematikunterrichts zu berücksichtigen: Jede Stufe hängt vom sicheren Verständnis der grundlegenden Kompetenzen ab, bevor man zur nächsten übergehen kann.

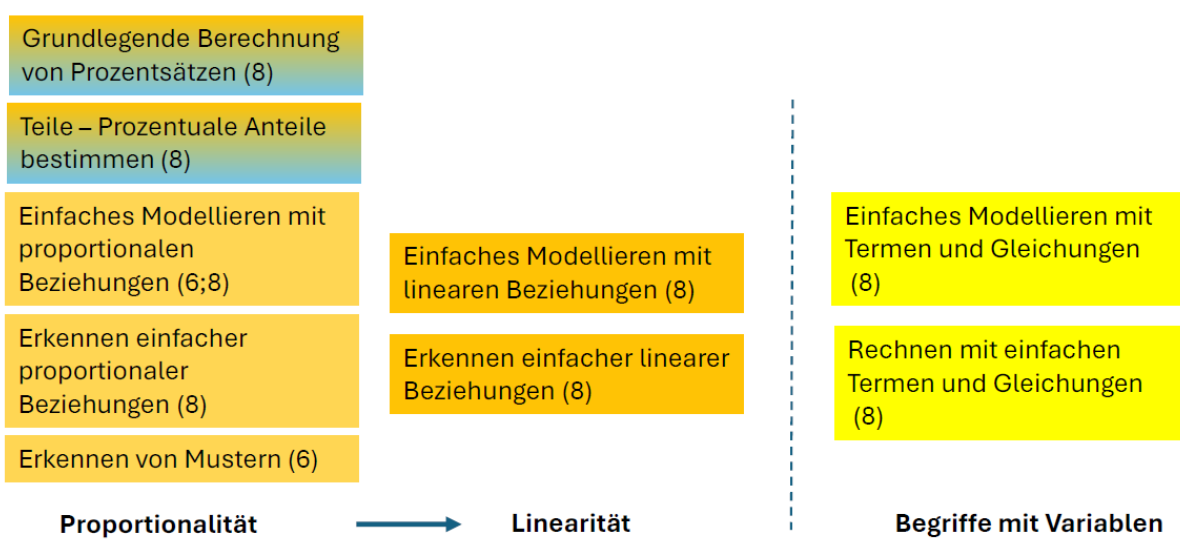
II. Teststruktur des Screening 6+

Die Teststruktur in DiToM basiert auf den Inhaltsbereichen Arithmetik und Algebra. Die hierarchische Struktur der Inhaltsbereiche werden berücksichtigt. Der Testaufbau konzentriert sich auf den Bereich der Zahlenbereichsentwicklung und -erweiterung im Sinne technischer Berechnungen. Das Diagramm zeigt die Teststruktur für die Klassenstufen 6+ und 8+.

Der Screening 6+ Test baut auf den Bausteinen von Screening 4+ auf, die sich auf natürliche Zahlen konzentrieren. Wenn Schüler*innen in der 6. Klasse erhebliche Schwierigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen haben, wird empfohlen, den Test für die Klasse 4+ anzuwenden.



Im Bereich der Algebra wird das strukturelle Verständnis einfacher mathematischer Strukturen in internen sowie externen mathematischen Anwendungen unter den Aspekten Proportionalität und Linearität geprüft. Dies gilt ebenso für Terme mit Zahlen oder Variablen in unterschiedlichen Richtungen in grundlegenden Anwendungssituationen sowie für das Termverständnis, soweit es Teil eines grundlegenden Verständnisses ist.



III. Durchführung des DiToM Tests 6+

Erklären Sie den Schülern den Zweck des Tests und beruhigen Sie sie.

- Der Test wird nicht benotet.
- Er ermöglicht Ihnen, eine Bestandsaufnahme dessen zu machen, was die Schüler*innen wissen und was sie nicht wissen, damit Sie anschließend eine Förderung einleiten können. Daher ist es besonders wichtig, dass die Schüler*innen alleine arbeiten.
- Betonen Sie, wie wichtig es ist, die Übungen zu absolvieren. Je mehr Fragen sie beantworten, desto leichter lassen sich ihre Kenntnisse, Fähigkeiten und Schwierigkeiten erkennen, um ihnen dabei zu helfen, diese zu überwinden.

Aufbau des Tests

- Der Test ist in vier Teile gegliedert, die jeweils aus mehreren Aufgaben bestehen.
- Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander.

Dauer: Für jedes Screening gibt es eine maximale Bearbeitungszeit.

- Die maximale Bearbeitungszeit der Screenings beträgt 42 Minuten.
- Es ist wichtig, den Schüler*innen vor Beginn des Screenings die Dauer des Tests mitzuteilen.

Aufgabenformate

- Offene Aufgaben: Es gibt Platz für die Antwort (entweder in Form von Sätzen oder einer Zahl).
- Geschlossene Aufgaben (Multiple-Choice-Fragen): Es werden mehrere Antworten vorgeschlagen und die Schüler*innen müssen eine davon auswählen. Bitte weisen Sie die Schüler*innen darauf hin, dass sie, wenn sie ihre Multiple-Choice-Antwort ändern möchten, diese Änderungen klar zu kennzeichnen (z.B. indem sie neben der ersten Antwort „Nein" und neben der neuen Antwort „Ja" schreiben).

Weitere Hinweise

- Taschenrechner sind nicht erlaubt.
- Die Schüler*innen können jeden freien Teil der Seite verwenden, insbesondere um ihre Berechnungen aufzuschreiben.
- Die Schüler*innen können die vier Teile in ihrer eigenen Reihenfolge und in ihrem eigenen Tempo bearbeiten.
- Wenn die Lehrkraft um Hilfe gebeten wird, darf sie keine Hinweise geben, die zur Beantwortung der Aufgaben führen könnten. Das Ziel ist es, die Schwierigkeiten der Schüler*innen zu erkennen.

IV. Erläuterungen und Förderhinweise zu den einzelnen Aufgaben von DiToM 6+

Aufgaben 1.1 und 1.2: Berechnen fehlender Werte bei Addition und Subtraktion

Setze die fehlenden Zahlen ein.

a) $37 + \underline{45} = 82$

b) $\underline{699} + 90 = 789$

Setze die fehlenden Zahlen ein.

a) $88 - \underline{51} = 37$

b) $\underline{78} - 55 = 23$

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe prüft die Fähigkeit der Schüler*innen, fehlende Komponenten (Ausgangsmenge, Austauschmenge) in Additions- und Subtraktionsaufgaben zu bestimmen, indem sie die Umkehrbeziehung zwischen den Rechenoperationen verstehen und anwenden. Konkret müssen sie erkennen, ob der erste Summand, zweite Summand, Minuend oder Subtrahend gesucht ist, und die entsprechende Umkehroperation (Subtraktion bzw. Addition) durchführen.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Verständnis der Umkehrrelationen zwischen Addition und Subtraktion ist eine zentrale arithmetische Kompetenz, die weit über das bloße Rechnen hinausgeht. Diese Fähigkeit zeigt, dass Schüler*innen Rechenoperationen nicht nur prozedural ausführen, sondern deren strukturelle Beziehungen durchdrungen haben. Das Bestimmen der fehlenden Menge erfordert flexibles Denken über Zahlenbeziehungen und ist grundlegend für das Lösen von Gleichungen in der Algebra (z. B. $x + 37 = 82$). Diese Kompetenz stärkt das relationale Verständnis von Zahlen – die Einsicht, dass Zahlen zueinander in Beziehung stehen und dass diese Beziehungen durch verschiedene Operationen ausgedrückt werden können. In Alltagssituationen begegnen uns solche Fragestellungen ständig: „Ich habe 37 €, brauche aber 82 €. Wie viel fehlt mir noch?" oder „Nach einer Abgabe von 55 € bleiben mir 23 € übrig. Wie viel hatte ich vorher?" Die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Darstellungen einer Rechenoperation zu wechseln, ist außerdem essentiell für das Überprüfen von Rechenergebnissen und entwickelt metakognitive Fähigkeiten. Schüler*innen, die diese Umkehrbeziehungen verstehen, können Fehler selbstständig erkennen und korrigieren.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Fehler im Verständnis der Rechenoperationen treten auf, wenn Schüler*innen die falsche Umkehrung wählen. Bei Aufgabe a) $37 + \_ = 82$ berechnen sie fälschlicherweise 37 + 82 = 119 statt 82 – 37 = 45, weil sie das Pluszeichen sehen und automatisch addieren, ohne die Aufgabenstruktur zu analysieren. Bei Aufgabe d) $\_ - 55 = 23$ rechnen sie $55 - 23 = 32$ anstatt die (größere) Zahl zu suchen, von der 55 subtrahiert wird, so dass 23 übrig bleibt: $55 + 23 = 78$.

Positionsfehler entstehen, wenn zwar die richtige Operation gewählt, aber die Zahlen in falscher Reihenfolge verwendet werden. Bei Aufgabe c) $88 - \_ = 37$ könnte $37 - 88$ berechnet werden statt $88 - 37 = 51$, was zu negativen Zahlen oder der Aussage „geht nicht" führt.

Konzeptionelle Missverständnisse zeigen sich durch Probierstrategien statt systematischer Nutzung der Umkehrrelation. Kinder setzen verschiedene Zahlen ein und prüfen, ob das Ergebnis stimmt. Bei größeren Zahlen wie in Aufgabe b) $\_ + 90 = 789$ wird dies sehr ineffizient. Manche verwenden auch Zählstrategien (vorwärts oder rückwärts zählen), was bei solchen Aufgaben aufwendig und fehleranfällig ist.

Rechenfehler können auftreten, selbst wenn die richtige Strategie gewählt wurde. Bei Aufgabe b) wird zwar korrekt erkannt, dass $789 - 90$ gerechnet werden muss, aber beim Subtrahieren entsteht ein Fehler.

Welche Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?
Die Förderung sollte mit konkreten Materialien und Visualisierungen beginnen. Nutzen Sie Plättchen oder Würfel, um die Teil-Ganzes-Beziehung handelnd zu erfahren: „Ich habe 37 rote Plättchen. Wie viele (blaue) Plättchen muss ich hinzunehmen, damit ich insgesamt 82 Plättchen habe?". Lassen Sie Kinder ihre Überlegungen verbalisieren: „Das Ganze ist 82, ich habe bereits einen Teil davon, nämlich 37. Also nehme ich diesen Teil weg, um den Rest zu finden." Gestufte Übungen beginnen mit einfachen Zahlen und nur einem Aufgabentyp (z. B. nur fehlender zweiter Summand), bevor verschiedene Typen gemischt und Zahlengrößen gesteigert werden. Verknüpfen Sie Aufgaben mit Alltagssituationen: „Tom hat 37 € gespart, braucht aber 82 € für ein Geschenk. Wie viel fehlt noch?" Diese Kontextualisierung hilft beim Verstehen der Aufgabenstruktur und ermöglicht Plausibilitätsprüfungen.

Aufgabe 1.3: Berechnen fehlender Werte bei Multiplikation und Division

Setze die fehlenden Zahlen ein.

a) $3 \cdot \underline{42} = 126$

b) $172 = 4 \cdot \underline{43}$

c) $54 : \underline{9} = 6$

d) $\underline{81} : 3 = 27$

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?

Diese Aufgabe zielt darauf ab, dass die Schüler*innen die strukturelle Beziehung zwischen Multiplikation und Division verstehen. In den vier Unteraufgaben sollen die Schüler*innen eine fehlende Zahl in einer Aufgabe angeben, die entweder Multiplikation oder Division darstellt, z. B. $3 \cdot \_\_ = 126$ oder $172 = 4 \cdot \_\_$. Um diese Aufgaben richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen die Rolle der bekannten und unbekannten Zahlen erkennen und flexibel zwischen den Rechenoperationen wechseln.

Sie müssen die Gleichungen nicht nur als Aufforderung zum Rechnen interpretieren, sondern als Ausdruck einer Teil-Ganzes-Beziehung, in der eine Größe aus der Multiplikation oder Division zweier anderer Größen resultiert, und das Gleichheitszeichen als Äquivalenzrelation erkennen. Diese operative Flexibilität ist ein Kennzeichen für ein tieferes Verständnis der Arithmetik und unerlässlich für den Zugang zu fortgeschritteneren mathematischen Inhalten.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?

Das Erkennen und Anwenden der umgekehrten Beziehung zwischen Multiplikation und Division ist eine Schlüsselkompetenz für das spätere mathematische Lernen. Dieses Verständnis bildet die Grundlage für das Denken mit Verhältnissen, Proportionen, algebraischen Ausdrücken und funktionalen Beziehungen. Gemäß dem DiToM-Rahmenwerk werden solche Fähigkeiten als mathematische Schlüsselkompetenzen eingestuft, da ihr Fehlen den zukünftigen Lernfortschritt behindern oder sogar blockieren können. Schüler*innen, die eine Gleichung strukturell interpretieren können, beispielsweise verstehen, dass $3 \cdot \_\_ = 126$ (z.B. Wie groß muss eine Gruppe sein, wenn 3 dieser Gruppen insgesamt 126 ergeben) gleichbedeutend ist mit der Bestimmung von $126 : 3$ (z.B. 126 werden in drei gleich große Gruppen zerlegt, wie groß ist eine dieser Gruppen?), zeigen mehr als nur das Abrufen von Verfahren: Sie beschäftigen sich mit mathematischem Denken.

Die frühzeitige Entwicklung dieser Fähigkeit stellt sicher, dass die Schüler*innen besser für den Umgang mit symbolischen Darstellungen und mehrstufigen Problemlösungen in der Mathematik der Sekundarstufe gerüstet sind.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

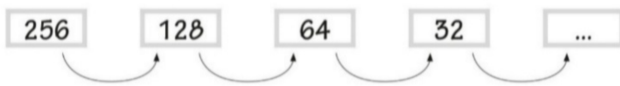
Schüler*innen, die den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division noch nicht verinnerlicht haben, zeigen häufig den Fehler, alle Gleichungen als Vorwärtsmultiplikation zu interpretieren, selbst wenn die umgekehrte Operation erforderlich ist. Wenn sie beispielsweise auf $172 = 4 \cdot \_\_$ stoßen, berechnen die Schüler*innen fälschlicherweise $172 \cdot 4$, anstatt zu dividieren. Andere raten aufgrund auswendig gelernter Fakten, ohne die Struktur der Gleichung zu berücksichtigen. Ein Missverständnis der Funktion des Gleichheitszeichens – als Hinweis zum Berechnen und nicht als Symbol für Gleichheit – kann ebenfalls zu verfahrenstechnisch korrekten, aber falschen Antworten führen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Es ist wichtig, verwandte Zahlenkonstanten (z. B. $6 \cdot 4 = 24$, $24 : 4 = 6$ und $24 : 6 = 4$) explizit miteinander zu verknüpfen, um die Umkehrbarkeit der Rechenoperationen hervorzuheben. Die Förderung der Verbalisierung der Überlegungen der Schüler*innen, beispielsweise durch die Frage „Welche Zahl ergibt multipliziert mit 4 das Ergebnis 172?“, unterstützt die Verinnerlichung. Schließlich sollte die Variation der Position der gesuchten Zahl (am Anfang, in der Mitte oder am Ende der Gleichung) geübt werden, um das flexible Verständnis der Gleichungsstruktur zu vertiefen. Um Schüler*innen zu unterstützen, die mit diesem Konzept Schwierigkeiten haben, ist es hilfreich, mit visuellen Darstellungen zu arbeiten, die multiplikative Strukturen sichtbar machen (Polotskaia & Savard, 2021). Diese Modelle ermöglichen es den Schüler*innen zu sehen, wie eine Menge aus gleichen Teilen zusammengesetzt oder in diese zerlegt werden kann – entsprechend der Multiplikation bzw. Division.

Aufgabe 1.4: Zahlenmuster und Erkennen von Regeln

Kreuze die Regel an, mit der die Zahlenreihe gebildet wird.



☐ 32 subtrahieren

☐ 128 subtrahieren

☐ durch 4 dividieren

☑ durch 2 dividieren

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, die zugrunde liegende Regel in einer Zahlenfolge zu erkennen und zu beschreiben. Das konkrete Beispiel $256, 128, 64, 32, \ldots$ erfordert das Erkennen einer Reihe, in der jede Zahl das Ergebnis der Division der vorherigen Zahl durch zwei ist. Die Aufgabe bietet mehrere Antwortmöglichkeiten, aus denen die Schüler*innen diejenige auswählen müssen, die das Muster korrekt erklärt. Die Schlüsselkompetenz, die hier geprüft wird, ist also die Fähigkeit der Schüler*innen, multiplikative Strukturen zu erkennen. Dies erfordert mehr als nur prozedurales Wissen – es erfordert Mustererkennung, strukturelles Denken und frühes algebraisches Denken.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Die Kompetenz, Regelmäßigkeiten in Zahlenmustern zu erkennen, ist eine wichtige mathematische Fähigkeit, da sie die Grundlage für fortgeschrittenere Konzepte wie Funktionen, Algebra und proportionales Denken bildet. Schüler*innen, die Regeln in Reihen erkennen können, sind später besser in der Lage, Verallgemeinerungen und symbolische Darstellungen zu verstehen. Laut Forschungen im Bereich der Mathematikdidaktik (z. B. Kieran, 2018, Radford 2013) unterstützt das Erkennen von Mustern die Entwicklung eines relationalen Verständnisses von Zahlen und Operationen.

Im Rahmen des DiToM-Modells wird das Erkennen numerischer Strukturen als wesentlich für die Bewältigung der zunehmenden Abstraktion der Mathematik in der Sekundarstufe angesehen. Darüber hinaus bildet das Verständnis von Reihen – wie z. B. Halbierungen – eine wichtige Grundlage für die Interpretation exponentieller Beziehungen, einem Konzept, das in späteren Klassenstufen behandelt wird.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiges Missverständnis bei dieser Aufgabe ist die Interpretation der Folge als Subtraktion statt als Division. Die Schüler*innen könnten annehmen, dass die Zahlen um einen festen Betrag abnehmen, und „32 subtrahieren" auswählen, weil die Differenz zwischen 64 und 32 diesem Muster entspricht, obwohl es nicht konsistent auf frühere Schritte zutrifft. Solche Fehler offenbaren eine lineare

Verzerrung, die häufig auftritt, wenn Schüler*innen mit proportionalen Veränderungen nicht vertraut sind. Andere Schüler*innen raten möglicherweise, ohne das Muster über mehrere Terme hinweg zu überprüfen. Wenn Schüler*innen die Division noch nicht als Umkehrung der Multiplikation verstehen, erkennen sie möglicherweise „durch 2 teilen" nicht als wiederkehrende Struktur.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Schüler*innen, die Schwierigkeiten haben, numerische Muster zu erkennen, profitieren von strukturierten Aufgaben, die additive und multiplikative Beziehungen explizit gegenüberstellen. Der Einsatz visueller Hilfsmittel wie Zahlenketten oder Baumdiagramme kann den Schülern helfen, zu erkennen, wie sich die Werte von Schritt zu Schritt ändern.

Aktivitäten, bei denen die Schüler*innen aus vorgegebenen Regeln ihre eigenen Reihenfolgen erstellen müssen, können das Musterbewusstsein stärken und das Verständnis für Operationen vertiefen. Lehrer*innen sollten das laute Denken fördern – zum Beispiel mit der Frage „Wie hat sich die Zahl von 256 auf 128 verändert?" –, um die Metakognition zu fördern und Strategien sichtbar zu machen. Im Laufe der Zeit kann die Verbindung dieser Muster mit realen Kontexten (z. B. Papier falten, Bakterien verdoppeln) das Konzept der geometrischen Progression verstärken und abstrakte Muster greifbarer machen.

Aufgabe 1.5: Reihenfolge der Rechenoperationen

Berechne das Ergebnis:

$14 + 2 \cdot 3 =$ 20

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe testet das Verständnis der Schüler*innen für die konventionelle Reihenfolge der Rechenoperationen, insbesondere die Priorität der Multiplikation gegenüber der Addition. Die Schüler*innen müssen den Ausdruck $14 + 2 \cdot 3$ richtig interpretieren und auswerten, indem sie die Regel anwenden, dass die Multiplikation vor der Addition durchgeführt wird. Dies erfordert nicht nur Verfahrenssicherheit, sondern auch ein Bewusstsein für die hierarchische Struktur der arithmetischen Operationen. Die Aufgabe geht daher über das reine Faktenwissen hinaus und bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, numerische Ausdrücke richtig zu analysieren und zu strukturieren, was einen entscheidenden Schritt auf dem Weg zur algebraischen Kompetenz darstellt.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Verständnis der Reihenfolge der Rechenoperationen ist eine grundlegende Voraussetzung für die Arbeit mit komplexeren arithmetischen Ausdrücken und später mit algebraischen Ausdrücken und Gleichungen. Im Rahmen von DiToM wird die Fähigkeit, mehrstufige Ausdrücke gemäß mathematischen Konventionen zu verarbeiten, als Schlüsselkompetenz angesehen, da sie symbolischem Denken und allgemeiner Problemlösungsfähigkeit zugrunde liegt.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein typischer Fehler bei dieser Aufgabe ist die Auswertung des Ausdrucks von links nach rechts ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Rechenoperationen, d. h. zuerst werden 14 und 2 addiert, um 16 zu erhalten, und dann wird mit 3 multipliziert, um 48 zu erhalten. Dieser Fehler offenbart eine lineare Rechenweise und ein mangelndes konzeptionelles Verständnis der Reihenfolge der Rechenoperationen. Selbst wenn die Schüler*innen zum richtigen Ergebnis kommen, kann die Verwendung von „Versuch und Irrtum“ oder Vermutungen anstelle von strukturiertem Denken ein Hinweis auf konzeptionelle Lücken sein.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?
Gezielte Unterstützung sollte damit beginnen, die Struktur von Ausdrücken sichtbar zu machen, beispielsweise durch die Verwendung von Farbcodierungen, Klammern oder visuellen Modellen, die Gruppierungen darstellen. Lehrer*innen können die Auswertung von Ausdrücken Schritt für Schritt modellieren und die Schüler*innen dazu ermutigen, ihre Überlegungen zu verbalisieren: „Zuerst rechne ich 2 mal 3, weil die Multiplikation Vorrang vor der Addition hat. Dann addiere ich 14.“ In ähnlicher Weise können ikonische Darstellungen von Rechenregeln helfen, die Rechenprioritäten zu unterscheiden und zu verstehen. Das Üben mit einer Vielzahl von Ausdrücken – einschließlich solcher mit und ohne Klammern – kann helfen, zu verdeutlichen, wann und warum die Reihenfolge wichtig ist. Die Schüler*innen profitieren auch davon, wenn sie falsche Strategien untersuchen und diskutieren, warum diese zu falschen Ergebnissen führen.

Aufgabe 1.6: Schriftlichen Text in einen mathematischen Ausdruck übersetzen

Tom befolgt die folgenden Anweisungen:

Die Zahl 4 *wird zur Zahl* 5 *addiert.*

Das Ergebnis wird mit 8 *multipliziert.*

Kreuze an, welcher Term zum richtigen Ergebnis führt.

- ☐ $5 + 4 \cdot 8$
- ☑ $(5 + 4) \cdot 8$
- ☐ $5 + (4 \cdot 8)$
- ☐ $5 \cdot 8 + 4$

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine kurze verbale Sequenz zu interpretieren, die zwei aufeinanderfolgende Operationen beschreibt – zuerst eine Addition, dann eine Multiplikation – und diese Sequenz in einen symbolischen Ausdruck zu übersetzen.

Von den Schüler*innen wird nicht erwartet, dass sie das Ergebnis berechnen, sondern dass sie die richtige mathematische Darstellung der Anweisungen identifizieren, da verbale Anweisungen und der entsprechende numerische Ausdruck semantisch nicht kongruent sind (Vergnaud, 1983). Dies erfordert das Erkennen der in der Sprache eingebetteten Reihenfolge der Rechenoperationen und die entsprechende Bildung eines Ausdrucks, z.B. $(4 + 5) \cdot 8$. Die geprüfte Kompetenz ist die Übersetzung eines verbalsprachlichen Ausdrucks in einen mathematischen Ausdruck, einschließlich der Verwendung von Klammern, um die korrekte Rechenstruktur und die Reihenfolge der Rechenoperationen beizubehalten.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Die Fähigkeit, verbale oder kontextbezogene Informationen symbolisch darzustellen, ist für die mathematische Kompetenz von zentraler Bedeutung. Im Rahmen von DiToM wird diese Fähigkeit als Schlüsselkompetenz angesehen, da sie es den Schüler*innen ermöglicht, zwischen verschiedenen Darstellungsweisen – verbal, symbolisch, ikonisch und operativ – zu wechseln und mit der Struktur numerischer Ausdrücke umzugehen (Kieran & Martìnez-Hernàndez, 2022). Diese Übersetzungskompetenz ist nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in der Algebra von entscheidender Bedeutung, wo Schüler*innen regelmäßig mit Situationen konfrontiert werden, in denen sie Ausdrücke aus Textaufgaben, Diagrammen oder Alltagsszenarien erstellen oder interpretieren müssen. Die frühzeitige Beherrschung dieser Fähigkeit unterstützt die Entwicklung von funktionalem Denken, Flexibilität bei der Problemlösung und Sicherheit im Umgang mit mathematischen Modellen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein häufiger Fehler bei dieser Aufgabe ist die falsche Reihenfolge beim Bilden des Ausdrucks, z. B. wenn „4 wird zu 5 addiert" als $4 + 5$ interpretiert wird (was mathematisch korrekt ist), aber dann die Multiplikation falsch angewendet wird: entweder $4 + (5 \cdot 8)$ oder $4 \cdot 5 + 8$. Dies spiegelt die Schwierigkeit wider, die in der Sprache eingebettete Reihenfolge der Operationen zu erkennen. Diese Muster deuten auf Lücken im Verfahrensverständnis und Schwierigkeiten bei der Koordination von Sprache und mathematischer Struktur hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Um Schüler*innen in diesem Bereich zu unterstützen, ist es wichtig, ein umfassendes Verständnis für die Reihenfolge der Berechnungen zu entwickeln, um die Struktur der Berechnung und die Reihenfolge der Rechenoperationen zu berücksichtigen. Lehrer*innen können modellieren, wie man aus einem gesprochenen Satz einen „Term bildet", und visuelle Organizer (wie Rechenbäume oder Flussdiagramme) verwenden, um den Schüler*innen zu helfen, die Rechenoperationen richtig zu ordnen. Die Betonung der Rolle von Klammern bei der Gruppierung von Rechenoperationen kann Fehlinterpretationen verhindern. Unterrichtsroutinen, die das „Hin- und Herübersetzen" zwischen Sprache und Symbolen beinhalten, können ebenfalls die Darstellungsflexibilität der Schüler*innen stärken. Wenn man die Schüler*innen dazu ermutigt, zu sagen, was der Ausdruck bedeutet (z. B. „zuerst addiere ich, dann multipliziere ich"), hilft dies mit der Zeit, ihr Verständnis der symbolischen Struktur zu festigen.

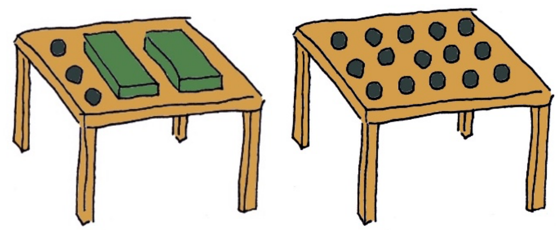
Aufgabe 1.7: Gleichsetzen von Mengen

Auf Tisch 1 und Tisch 2 sind Murmeln und Schachteln zu sehen.

Es gilt:

- *Jede Schachtel enthält die gleiche Anzahl an Murmeln.*
- *Auf jedem Tisch liegt die gleiche Anzahl an Murmeln.*

Tisch 1 Tisch 2



Berechne die Anzahl an Murmeln, die sich in einer Schachtel befinden.

Antwort: 6

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe bewertet die Kompetenz der Schüler*innen, eine visuelle Darstellung einer Teil-Ganzes-Situation mit Gleichheit zu interpretieren. Den Schüler*innen werden zwei Tische gezeigt, die jeweils eine Kombination aus Murmeln und Kästchen enthalten, in denen jeweils die gleiche unbekannte Anzahl von Murmeln versteckt ist.

Die wichtigste Anforderung besteht darin, die Anzahl der Murmeln in einer Schachtel anhand der Information abzuleiten, dass beide Tische die gleiche Gesamtzahl an Murmeln enthalten. Das bedeutet, dass die Schüler*innen die Mengen auf beiden Seiten gleichsetzen und die unbekannte Größe bestimmen müssen – eine Form der informellen Gleichungslösung auf der Grundlage visueller Balance. Die Aufgabe zielt daher auf strukturelles Denken, frühes algebraisches Denken und die Fähigkeit ab, Äquivalenz in einem nicht-symbolischen Kontext zu interpretieren.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Interpretieren von Gleichheit ist eine wichtige Vorstufe zum algebraischen Denken. Im Rahmen von DiToM wird dies als Schlüsselkompetenz identifiziert, da es das Verständnis der Schüler*innen für Äquivalenz und Substitution fördert, welche zentrale Ideen sowohl in der Arithmetik als auch in der frühen Algebra darstellen. Indem sie schlussfolgern, dass zwei verschiedene Konfigurationen in der Summe tatsächlich gleich sein müssen, üben die Schüler*innen relationales Denken, anstatt sich allein auf direkte Berechnungen zu verlassen (Radford, 2014).

Diese Fähigkeit unterstützt spätere Kompetenzen beim Lösen von Gleichungen und beim Arbeiten mit unbekannten Größen in symbolischer Form. Darüber hinaus bieten solche nicht-symbolischen Aufgaben eine wichtige Brücke für Schüler*innen, die noch dabei sind, Vertrauen in formale Darstellungen zu entwickeln und ermöglichen ihnen den konzeptionellen Zugang durch visuelle Strukturen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Schüler*innen, die mit dieser Aufgabe Schwierigkeiten haben, erkennen möglicherweise nicht die Gleichwertigkeit der beiden Seiten. Ein typischer Fehler ist der Versuch, nur die sichtbaren Murmeln zu zählen, wobei die versteckte Menge in den Kisten ignoriert oder ein fester Wert angenommen wird (z. B. „jede Kiste muss 10 Murmeln enthalten“).

Andere erkennen vielleicht die Notwendigkeit des Gleichgewichts, berechnen jedoch falsch oder ordnen ihre Überlegungen falsch zu, indem sie beispielsweise die Anzahl in einer Schachtel schätzen, ohne zu überprüfen, ob dies zu gleichen Summen führt.

Eine weitere Gruppe von Schüler*innen behandelt das visuelle Bild möglicherweise eher beschreibend als analytisch und berichtet, was sichtbar ist, ohne zu versuchen, Rückschlüsse auf das Unbekannte zu ziehen. Diese Verhaltensweisen deuten auf Lücken im strukturellen Verständnis hin, insbesondere bei der Interpretation von Unbekannten als Mengen, die durch Rückschlüsse aus den bekannten Mengen bestimmt werden müssen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?
Die Schüler*innen profitieren von der Arbeit mit praktischen Materialien, die das Konzept der Äquivalenz konkretisieren. Lehrer*innen können Sachkontexte erzählen („Beide Kinder haben die gleiche Anzahl an Murmeln bekommen – wie viele sind in der Schachtel?“), um das Engagement zu fördern und das Problem in einem nachvollziehbaren Kontext zu verankern.

Das Zeichnen und Beschriften von Diagrammen, in denen die Schüler*innen Gleichungen wie „$3 + x = 7$“ schreiben, kann dabei helfen, eine Brücke zwischen visuellem Denken und symbolischer Darstellung zu schlagen. Darüber hinaus verstärkt das wiederholte Üben der Identifizierung gleicher, aber unterschiedlich zusammengesetzter Mengen das Konzept der Äquivalenz und unterstützt den Übergang vom additiven Denken zum frühen funktionalen Denken. Wie immer sollten die Schüler*innen dazu ermutigt werden, ihre Überlegungen zu erklären und zu überprüfen, ob die von ihnen vorgeschlagenen Werte ausgewogen sind.

Aufgabe 2.1: Darstellung und Interpretation gleichwertiger Brüche

a) Markiere im zweiten Kreis denselben Anteil wie im ersten Kreis

b) Schreibe die Anteile in den beiden Kreisen als Brüche auf

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{6}}$$

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe konzentriert sich auf die Fähigkeit, äquivalente Brüche anhand von zwei Darstellungsaspekten zu erkennen und zu konstruieren: zunächst in einem visuellen Format (Schraffieren von Teilen eines Kreises) und dann in symbolischer Notation (Schreiben einer Bruchgleichung). In Teilaufgabe (a) werden die Schüler*innen gebeten, eine visuelle Darstellung zu vervoll-ständigen, indem sie den gleichen Anteil eines Kreises schraffieren, wie er in dem vorgegebenen Kreis gezeigt wird. In Teilaufgabe (b) sollen sie diese Beziehung in Bruchschreibweise ausdrücken. Die geprüfte Schlüsselkompetenz ist die Koordination zwischen dem visuellen Verständnis von Teilen und Ganzen und ihrer formalen Darstellung als äquivalente Brüche.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Verständnis äquivalenter Brüche ist ein Grundpfeiler des Verständnisses rationaler Zahlen und stellt somit eine mathematische Schlüsselkompetenz dar. Es bildet die konzeptionelle Grundlage für Rechenoperationen mit Brüchen, proportionales Denken, Verhältnisbegriffe und algebraische Äquivalenz. Im Rahmen von DiToM wird die Erkenntnis, dass unterschiedlich aussehende Brüche dieselbe Menge darstellen können, als entscheidend für die Entwicklung flexiblen Zahlenverständnisses angesehen.

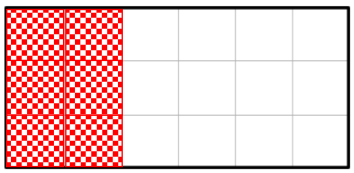
Die Schüler*innen müssen verstehen, dass ein Bruch nicht nur eine Zahl darstellt, sondern auch eine Beziehung zwischen einem Teil und einem Ganzen – und dass diese Beziehung auch dann konstant bleibt, wenn sowohl Zähler als auch Nenner skaliert werden. Aufgaben, die visuelle und symbolische Ebenen kombinieren, fördern ein tieferes Verständnis und unterstützen den Übergang zum abstrakten Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Die Schüler*innen könnten im zweiten Kreis eine falsche Anzahl von Teilen schraffieren, z. B. indem sie die Anzahl der schattierten Teile anstelle der proportionalen Größe zuordnen. Dies deutet eher auf eine Zählstrategie als auf relationales Denken hin und zeigt, dass sie den Zähler als statische Zahl und nicht als Teil eines Ganzen betrachten. In Teil (b) könnten die Schüler*innen den gegebenen Bruch ohne Umwandlung kopieren, nicht äquivalente, aber ähnlich aussehende Brüche schreiben (z. B. nur den Zähler verdoppeln) oder die Reihenfolge von Zähler und Nenner verwechseln.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?
Um ein solides Verständnis für äquivalente Brüche aufzubauen, sollten die Schüler*innen regelmäßig mit Manipulativen und visuellen Modellen arbeiten – wie Bruchkreisen, Balken oder Kacheln –, um gleiche Teile über verschiedene Teilungen hinwegzusehen und zu erstellen. Der Schwerpunkt sollte darauf liegen, zu erkennen, wie viele Teile von wie vielen Teilen den gleichen Anteil ausmachen und wie sich sowohl die Anzahl der schattierten Teile als auch die Gesamtzahl der Teile parallel verändern. Lehrer*innen können die Schüler*innen dabei anleiten, den Skalierungsprozess in Worte zu fassen, z.B. „Ich habe die Anzahl der Teile insgesamt verdoppelt und die Anzahl der schraffierte Teile ebenso verdoppelt.“ Dies unterstützt die Verinnerlichung der proportionalen Struktur, die hinter der Äquivalenz steht. Überbrückungsaktivitäten – z. B. Schraffieren, dann Schreiben, dann mündliches Erklären – sind besonders effektiv, um die Verbindung zwischen visuellen Bildern und formalen Bruchgleichungen zu festigen.

Aufgabe 2.2: Markieren eines bestimmten Bruchteils eines Rechtecks

Markiere $\frac{2}{6}$ des Rechtecks:



Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine visuelle Darstellung eines gegebenen Bruchs zu konstruieren, indem sie einen bestimmten Teil einer rechteckigen Fläche markieren bzw. schraffieren. Von den Schüler*innen wird erwartet, dass sie die richtige Anzahl gleicher Teile identifizieren und die Anzahl der Teile, die dem Zähler entspricht, schraffieren, wobei sie erkennen müssen, dass die Gesamtzahl der Teile dem Nenner entspricht. Dies erfordert die Interpretation von Brüchen als Operatoren auf Flächen, d. h. die Verwendung eines Bruchs, um zu definieren, wie viel von einer gesamten Fläche betrachtet wird. Die Aufgabe erfordert eine genaue Unterteilung, räumliches Vorstellungsvermögen und proportionales Denken.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das visuelle Konstruieren eines Bruchs ist ein wichtiger Schritt bei der Entwicklung des relationalen und proportionalen Denkens sowie bei der Überbrückung zwischen informellen und formalen Bruchwissen. Innerhalb des DiToM-Rahmenwerks wird diese Fähigkeit als grundlegend angesehen, da sie das spätere Verständnis von Äquivalenz, Addition und Subtraktion von Brüchen unterstützt.

Die Darstellung von Brüchen in einem visuellen Modell wie einem Rechteck verstärkt auch das Verständnis, dass es bei Brüchen nicht nur um diskrete Teile (wie Murmeln oder Zählsteine) geht, sondern auch um Mengen und Flächen. Schüler*innen, die flexibel zwischen Bruchschreibweise und visuellen Modellen wechseln können, entwickeln in der Regel tiefere, besser vernetzte Zahlenkonzepte und sind besser auf abstrakte Aufgaben in der Algebra und darüber hinaus vorbereitet.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Häufige Fehler sind das Schraffieren einer falschen Anzahl von Teilen, oft aufgrund von Fehlzählungen oder falscher Identifizierung der Gesamtzahl der Unterteilungen. Die Schüler*innen Schraffieren möglicherweise willkürlich, ohne einen Bezug zum gegebenen Bruch herzustellen, was auf ein mangelndes Verständnis des Teil-Ganzes-Konzepts hindeuten kann. In einigen Fällen ignorieren die Schüler*innen den Nenner und zählen einfach Einheiten (z. B. schraffieren sie zwei Teile, unabhängig davon, wie viele es insgesamt sind).

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Eine gezielte Unterstützung sollte praktische Aktivitäten mit Bruchstreifen, Papierfalten oder gitterbasierten Flächenmodellen auch bei der Aktivierung von Vorwissen umfassen. Die Schüler*innen sollten dazu angeregt werden, Formen zunächst in gleiche Teile zu unterteilen, bevor sie die Rechenoperation anwenden (z. B. „3 von 4 gleichen Teilen schraffieren”).

Es ist hilfreich, Beispiele und Nicht-Beispiele zu betrachten, z. B. Rechtecke, bei denen die Teile nicht gleich sind, um zu verdeutlichen, was als gültige Bruchdarstellung gilt. Die Verknüpfung von Schattierungsaufgaben mit symbolischer Schrift und verbaler Erklärung („Ich habe es in 6 gleiche Teile geteilt und 4 davon schattiert, das sind also vier Sechstel“) unterstützt die Integration von Darstellungen. Im Laufe der Zeit sollten die Schüler*innen mit unterschiedlichen Formen und Ausrichtungen üben, um ihr Verständnis über bestimmte Formate hinaus zu verallgemeinern.

Aufgabe 2.3: Proportionales Denken mit Mengen und Preisen

2 kg Kartoffeln kosten 5 €. Berechne den Preis für 6 kg Kartoffeln.

Antwort: ___15___ Euro.

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe bewertet die Kompetenz der Schüler*innen, multiplikatives Denken anzuwenden, um ein proportionales Problem mit Preisen und Mengen zu lösen. Der Kontext – die Ermittlung des Preises für 6 Kilogramm Kartoffeln, wenn 2 Kilogramm 5 € kosten – erfordert von den Schüler*innen, ein konstantes Verhältnis zwischen Menge und Preis zu erkennen und beizubehalten. Um dies richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen entweder das Mengen-Preis-Paar um den Faktor 3 multiplizieren oder den Stückpreis (Preis pro Kilogramm) berechnen und dann multiplizieren.

Die getestete Fähigkeit ist das Verständnis und die Anwendung multiplikativer Strukturen in funktionalen Beziehungen, was eine wichtige Grundlage für Verhältnis-, Proportions- und Prozentaufgaben in späteren Mathematikaufgaben darstellt.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Proportionales Denken gehört zu den wichtigsten mathematischen Schlüsselkompetenzen in der Sekundarstufe. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept ist die Fähigkeit, konstante Beziehungen zu erkennen und damit zu arbeiten – wie beispielsweise $2\,kg \rightarrow 5$ € hochgerechnet auf $6\,kg \rightarrow ?$ € – nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in der Algebra, im funktionalen Verständnis, in der Geometrie und bei der Lösung alltäglicher Probleme von entscheidender Bedeutung. Schüler*innen, die diese multiplikativen Beziehungen beherrschen, können über verschiedene Kontexte hinweg verallgemeinern und flexibel effiziente Strategien wählen (z. B. Verdoppeln, Halbieren, Einheitspreisberechnung). Darüber hinaus spiegelt der Übergang vom additiven zum multiplikativen Vergleich einen Entwicklungssprung im mathematischen Verständnis wider, der das zukünftige Lernen in linearen Funktionen und proportionalen Modellen untermauert.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Häufige Fehler sind additives Denken. Dies spiegelt ein Unverständnis der multiplikativen Natur der Beziehung wider. Einige Schüler*innen multiplizieren möglicherweise 5 direkt mit 6 (was 30 € ergibt) und interpretieren die Bedeutung der beteiligten Zahlen falsch. Andere haben möglicherweise Schwierigkeiten, Einheiten zu koordinieren – sie vermischen Kilogramm und Euro – oder raten einfach anhand von Schätzungen. Diese Fehler deuten auf Lücken im strukturellen Verständnis hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?
Schüler*innen profitieren von kontextreichen Aufgaben mit Geld, Rezepten oder Maßen, bei denen proportionale Strukturen natürlich vorkommen. Lehrer*innen sollten Strategien wie das Denken in Einheitspreisen („Wenn $2\,kg$ 5 € kosten, dann kostet $1\,kg$ 2,50 € …“) oder das skalieren anhand von

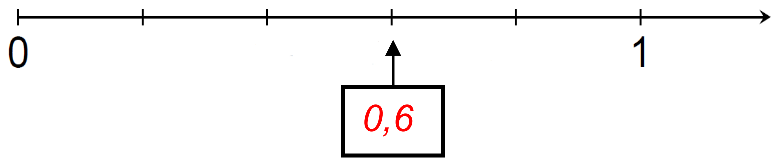
Faktoren („6 kg sind dreimal so viel wie 2 kg, also beträgt der Preis auch das Dreifache von 5 €“) explizit modellieren.

Es kann auch hilfreich sein, additive und multiplikative Strategien in Klassendiskussionen gegenüberzustellen, um ihre unterschiedlichen Auswirkungen hervorzuheben. Die Schüler*innen dazu anzuregen, ihre Überlegungen zu erklären und zu begründen, fördert die metakognitive Entwicklung und hilft, das Verständnis für proportionale Strukturen zu vertiefen.

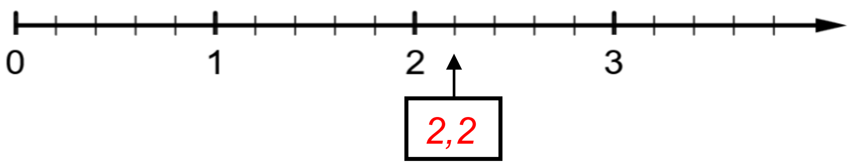
Aufgabe 3.1: Darstellung von Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Schreibe die Zahl in das Kästchen, der die entsprechende Stelle auf dem Zahlenstrahl markiert.

a)



b)



Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe zielt auf die Fähigkeit der Schüler*innen ab, eine in Teilintervalle unterteilte Zahlengerade zu interpretieren und eine Bruch- oder Dezimalzahl entsprechend ihrer relativen Position zwischen 0 und 1 (oder darüber hinaus) zu platzieren.

Die Schüler*innen müssen die Unterteilungen der Zahlengeraden analysieren, die Einheit bestimmen und die richtige Bruch- oder Dezimalzahl identifizieren, die einen bestimmten Punkt markiert. Dies erfordert ein Verständnis von Brüchen als Zahlen mit Größenordnungen und nicht nur als Teil-Ganzes-Beziehungen.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Die Fähigkeit, Brüche auf einem Zahlenstrahl zu lokalisieren, ist eine wichtige mathematische Schlüsselkompetenz, da sie eine Verlagerung des Verständnisses von Brüchen als Teile von Objekten hin zu Brüchen als Zahlen auf einer kontinuierlichen Skala widerspiegelt. Diese räumliche Interpretation von Brüchen bildet die Grundlage für das Vergleichen, Ordnen und Rechnen mit Brüchen.

Im Rahmen von DiToM gelten die Schätzung und Positionierung auf dem Zahlenstrahl als starke Indikatoren für konzeptionelle Klarheit. Untersuchungen (z. B. Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) zeigen, dass Schüler*innen, die die metrische Struktur der Zahlengeraden verstehen, später eher Erfolg in Arithmetik, Algebra und Geometrie haben. Darüber hinaus bietet die Zahlengerade ein einheitliches Modell, das den Übergang zwischen natürlichen Zahlen, Brüchen, Dezimalzahlen und negativen Zahlen unterstützt.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Schüler*innen verlassen sich oft auf das Zählen von Markierungen und gehen dabei von einer Dezimalunterteilung der Einheit aus, anstatt über die Größe des Bruchteils nachzudenken.

Beispielsweise interpretieren sie vier Teilungen fälschlicherweise als „Viertel", unabhängig davon, ob das Ganze in gleiche Teile unterteilt ist oder nicht. Ein weiterer häufiger Fehler ist die falsche Platzierung des Bruchteils – z. B. die falsche Platzierung von 3/4 bei 2/3 aufgrund mangelnder proportionaler Argumentation. Einige Schüler*innen raten möglicherweise aufgrund ihrer visuellen Intuition, anstatt den durch die Unterteilungen implizierten Nenner zu berechnen.

In fortgeschritteneren Varianten können Schüler*innen Schwierigkeiten haben, wenn die Zahlengerade nicht bei 0 beginnt oder wenn unechte Brüche oder gemischte Zahlen beteiligt sind. Diese Fehler deuten auf eine unzureichende Integration von Größe, Notation und Struktur hin. Es gibt auch Schüler*innen, die eine falsche Dezimalzahl als Lösung angeben. Bitte beachten Sie Aufgabe 3.1, die sich mit diesem Problem befasst.

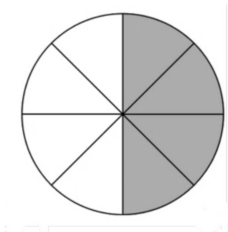
Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Um die Schüler*innen zu unterstützen, ist es unerlässlich, Zeit in den Aufbau eines soliden mentalen Modells der Zahlenreihe zu investieren, das Brüche und Dezimalzahlen umfasst. Lehrer*innen können interaktive Hilfsmittel wie Faltstreifen, Bruchlineale und digitale Zahlenreihen einsetzen, um das proportionale Denken zu fördern. Der Unterricht sollte sich darauf konzentrieren, wie man die Größe eines Einheitsintervalls bestimmt, wie man Bruchteile zählt und wie man diese Schritte mit dem geschriebenen Symbol in Verbindung bringt.

Der Vergleich verschiedener Brüche auf derselben Linie hilft dabei, die relationale Größe und Äquivalenz zu verfestigen. Brückenaktivitäten – wie das Zeichnen von Brüchen auf einer Linie, das anschließende Schreiben in symbolischer Form und umgekehrt oder das Herstellen von Beziehungen zu den Schüler*innen bereits bekannten ikonischen Darstellungen (z. B. Kreisanteile) – stärken die repräsentativen Verbindungen.

Aufgabe 3.2: Darstellung eines Bruchteils benennen

Kreuze an, welcher Anteil am Kreis eingefärbt ist.



☑ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{8}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe zielt darauf ab, die Fähigkeit der Schüler*innen zu testen, einen Bruch anhand einer visuellen Teil-Ganzes-Darstellung zu identifizieren und die richtige symbolische Darstellung dieses Bruchs aus mehreren Optionen auszuwählen. In der Abbildung ist ein Kreis in acht gleiche Teile geteilt, von denen vier schraffiert sind.

Der richtige Bruch ist somit $\frac{4}{8}$, was sich zu $\frac{1}{2}$ vereinfachen lässt. Die Schüler*innen müssen jedoch nicht nur diese Beziehung erkennen, sondern sie auch von plausiblen, aber falschen Ablenkungen wie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ oder sogar $\frac{8}{4}$ unterscheiden. Die Kernkompetenz, die hier getestet wird, ist die Koordination zwischen visuellem, numerischem und strukturellem Verständnis von Brüchen.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Die Fähigkeit, Brüche anhand visueller Modelle zu interpretieren und diese korrekt in symbolische Darstellungen zu übertragen, ist eine grundlegende Fähigkeit für das Verständnis rationaler Zahlen.

Im Rahmen von DiToM greift diese Aufgabe das Konzept von Brüchen als Verhältnissen von Teilen zum Ganzen auf, das für fortgeschrittenere Konzepte wie Äquivalenz, Bruchrechnen und Proportionalität von zentraler Bedeutung ist. Wichtig ist, dass die Aufgabe eine konzeptionelle Falle enthält: Der Ablenkungsfaktor $\frac{8}{4}$ ist numerisch größer als das Ganze, obwohl er mit den richtigen Zahlen übereinstimmt (nur umgekehrt). Um diese Diskrepanz zu erkennen, reicht visuelles Zählen nicht aus; es erfordert ein Verständnis der Bruchstruktur, der Skala und der Bedeutung.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Der Ablenkungsfaktor $\frac{8}{4}$ ist besonders attraktiv, da er die beiden Zahlen aus dem Bild enthält – insgesamt 8 Teile und 4 schattierte Teile –, aber ihre Reihenfolge umkehrt. Die Auswahl von $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ könnte auf eine Fehlinterpretation des Verhältnisses hindeuten, entweder durch Zählen nur der schattierten Teile oder durch Nichtberücksichtigung der Gesamtzahl.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?
Schüler*innen profitieren von praktischen Aktivitäten mit Bruchkreisen oder gefalteten Papierformen, bei denen sie Teile eines Ganzen physisch teilen und schraffieren können. Lehrer*innen sollten die Rolle von Zähler und Nenner durch konsequente Verbalisierung betonen („4 Teile von 8 gleichen Teilen sind schattiert – das sind 4 Achtel … und ich schreibe es so: $\frac{4}{8}$”).

Das Üben des Abgleichens visueller Modelle mit mehreren Bruchausdrücken, einschließlich solcher, die größer als 1 sind, kann den Schüler*innen helfen, zwischen richtigen, falschen und gleichwertigen Brüchen zu unterscheiden. Wenn man die Schüler*innen dazu ermutigt, zu erklären, warum ein Bruch wie $\frac{8}{4}$ nicht weniger als ein Ganzes darstellen kann, fördert dies das kritische Denken und unterstützt das Strukturbewusstsein.

Aufgabe 3.3: Äquivalenz von Brüchen herstellen

Setze den fehlenden Wert ein.

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe prüft die Kompetenz der Schüler*innen, äquivalente Brüche zu erkennen und zu erzeugen, indem sie Brüche erweitern. Dies erfordert das Verständnis, dass Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert werden müssen, um einen gleichwertigen Bruch zu erhalten.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Verständnis von Bruchgleichheit und die Fähigkeit, Brüche zu erweitern, bilden eine wichtige Grundlage für das weitere Arbeiten mit Brüchen. Diese Kompetenz ist unerlässlich für das Addieren und Subtrahieren von Brüchen mit unterschiedlichen Nennern, da Brüche zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden müssen. Sie ermöglicht das Vergleichen von Brüchen und das Erkennen, dass verschiedene symbolische Darstellungen (wie $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$) denselben mathematischen Wert repräsentieren können, eine fundamentale Einsicht der Zahlbereichserweiterung. Das Erweitern und auch das Kürzen stärken zudem das Verständnis multiplikativer Strukturen und bereitet auf proportionales Denken vor, das später bei Verhältnissen, Maßstäben und der Prozentrechnung zentral ist.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Es zeigen sich häufig Fehler im Verständnis der multiplikativen Beziehung. Manche Schüler*innen verwenden additive Strategien und denken „von 3 auf 9 sind es 6 mehr, also muss ich auch beim Zähler 6 addieren" und schreiben $\frac{7}{9}$ statt $\frac{3}{9}$. Andere erkennen zwar, dass der Nenner von 3 auf 9 verändert wurde, verstehen aber nicht, dass dies eine Multiplikation mit 3 ist.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Förderung sollte mit anschaulichen Darstellungen beginnen, die Bruchgleichheit erfahrbar machen. Nutzen Sie Visualisierungen wie Kreismodelle oder Rechteckmodelle, um zu zeigen, dass $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{9}$ dieselbe Fläche darstellen. Falten Sie beispielsweise einen Papierstreifen oder einen Papierkreis. Digitale Tools oder Bruchstreifen können diese Visualisierung unterstützen.

Aufgabe 3.4: Vergleichen einer unechten Bruchzahl mit natürlichen Zahlen

Kreuze **alle** natürlichen Zahlen an, die größer sind als $\frac{10}{3}$.

☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☑ 5

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, einen nicht ganzzahligen Bruch größer als 1 ($\frac{10}{3}$) mit mehreren natürlichen Zahlen zu vergleichen. Die Schüler müssen alle Zahlen $2, 3, 4, 5$ identifizieren, die größer als $\frac{10}{3}$ sind. Da $\frac{10}{3}$ ungefähr 3,33 entspricht, ist die richtige Lösung, sowohl 4 als auch 5 auszuwählen. Wichtig ist, dass die Aufgabe nur dann als richtig gewertet wird, wenn beide Werte ausgewählt und keine der falschen Optionen angekreuzt wurden.

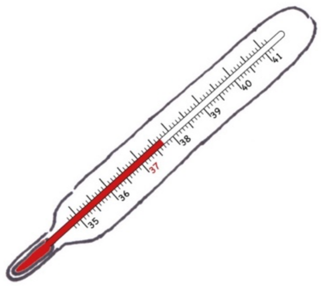
Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Vergleichen von Brüchen mit ganzen Zahlen ist eine mathematische Schlüsselkompetenz, da es rationale und ganze Zahlensysteme miteinander verbindet und die Entwicklung eines kohärenten Zahlenstrahlmodells unterstützt. Dieser Vergleich fordert das Verständnis für die Größe von Brüchen, das Schätzen und den Übergang zwischen Bruch- und Dezimal- oder gemischten Darstellungen. Die Fähigkeit, zu bestimmen, ob ein Bruch größer oder kleiner als eine ganze Zahl ist, ist für die Entwicklung von Flexibilität bei der Interpretation numerischer Informationen unerlässlich.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Die Schüler*innen könnten $\frac{10}{3}$ falsch umrechnen, z. B. indem sie es auf 2 oder 5 schätzen, was zu ungenauen Entscheidungen beim Ankreuzen führt. Ein häufiges Missverständnis besteht darin, sich nur auf den Zähler und den Nenner isoliert zu konzentrieren. Einige Schüler*innen kreuzen möglicherweise nur eine richtige Option an (z. B. 4), weil sie die Aufgabenstellung missverstehen oder nicht erkennen, dass es mehr als einen richtigen Wert gibt.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?
Die Schüler*innen sollten regelmäßig das Vergleichen von unechten Brüchen mit natürlichen Zahlen und gemischten Zahlen üben. Visuelle Hilfsmittel wie Zahlenstrahlen oder Bruchstreifen können dabei helfen, zu verdeutlichen, wo ein bestimmter Bruch im Verhältnis zu Referenzzahlen liegt. Lehrer*innen können die Schüler*innen anleiten, unechte Brüche in gemischter Zahlform auszudrücken (z. B. $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$), um das Schätzen und Vergleichen zu unterstützen. Übungen, die verbales Denken erfordern („Ist $\frac{10}{3}$ mehr oder weniger als 4?”) und Erklärungsaufgaben (z. B. begründen lassen, warum 3 nicht richtig ist) tragen zur Förderung der konzeptionellen Klarheit bei. Bei Aufgaben mit mehreren richtigen Antworten ist es auch hilfreich, die Aufgabenkompetenz zu betonen – also wie man Strukturen wie „Kreuze alle zutreffenden Antworten an” präzise und vollständig interpretiert.

Aufgabe 3.5: Ablesen einer Dezimalzahl auf einer Skala

Notiere die gemessene Temperatur in °C.



Antwort: 37,7 °C

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe prüft die Kompetenz der Schüler*innen, Dezimalzahlen auf einer Skala in einem realen Kontext (einem Thermometer) zu interpretieren und abzulesen. Den Schüler*innen wird ein analoges Thermometer mit Celsius-Markierungen und einer roten Flüssigkeitssäule gezeigt, die bis zu einem bestimmten Wert steigt, nämlich 37,7 °C. Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen die Temperatur anhand der gegebenen visuellen Darstellung bestimmen und in Dezimalschreibweise ausdrücken. Die hier geprüfte Schlüsselkompetenz ist die Fähigkeit, Dezimalzahlen auf einer Skala in einer vertrauten Umgebung genau abzulesen.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Im Rahmen von DiToM ist das Ablesen von Werten auf linearen Skalen eine grundlegende mathematische Schlüsselkompetenz, da sie das Verständnis für Stellenwerte, die Schätzung von Größenordnungen und metrisches Denken miteinander verbindet. Ablesen von Skalen fördert in authentischen Kontexten die mathematische Kompetenz, da die Schüler*innen Messinstrumente in den Bereichen Gesundheit, Wissenschaft oder Alltag verstehen müssen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen haben möglicherweise Schwierigkeiten, feine Unterteilungen auf der Skala zu interpretieren, insbesondere wenn die Schritte Zehntel (0,1 Schritte) statt ganze Zahlen sind. Häufige Fehler sind das Runden auf die nächste ganze Zahl (z. B. 38 statt 37,7), das Weglassen der Dezimalstelle (Schreiben von 377) oder das falsche Zählen der Markierungen.

Welche Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Schüler*innen profitieren davon, wenn sie wiederholt mit skalierten Messinstrumenten wie Thermometern, Linealen und Messzylindern in Kontakt kommen. Lehrer*innen sollten vorführen, wie man Intervalle analysiert, die Schrittweite bestimmt und mit Dezimal-Zehnteln vorwärts zählt. Die Schüler*innen sollten auch das Lesen und Schreiben von Dezimalzahlen in kontextreichen Situationen üben, unterstützt durch Zahlenstrahlmodelle, die symbolisches und visuelles Denken verbinden

Aufgabe 3.6: Dezimalzahlen der Größe nach vergleichen

Kreuze die größte der angegebenen Zahlen an.

☑ 3,33 ☐ 3,303 ☐ 3,03 ☐ 3,3

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Dezimalzahlen zu vergleichen und zu ordnen, insbesondere solche, die einen ähnlichen Wert haben und sich in der Anzahl der Dezimalstellen unterscheiden. Die Schüler*innen müssen bestimmen, welche der vier angegebenen Dezimalzahlen 3,33; 3,303; 3,03; 3,3 die größte ist. Um diese Aufgabe zu lösen, müssen sie verstehen, dass der Stellenwert die Größe bestimmt und nicht die Anzahl der Stellen oder die scheinbare „Länge" der Dezimalzahl. Die Aufgabe testet insbesondere die Genauigkeit bei der Interpretation auf einem Zahlenstrahl bis zur Hunderter- und Tausenderstelle und die Fähigkeit zu erkennen, dass 3,33 größer ist als 3,303, obwohl letztere mehr Stellen hat.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Vergleichen von Dezimalzahlen ist eine Schlüsselkompetenz, da es das Verständnis des Stellenwerts im Zehnersystem über ganze Zahlen hinaus widerspiegelt. Es ist entscheidend für die Entwicklung von Kompetenzen im Schätzen, Messen und Rechnen in der realen Welt (z. B. Preise, Dateninterpretation). Der Vergleich von Dezimalzahlen unterstützt auch spätere Arbeiten in den Bereichen Prozentrechnung, Algebra und Naturwissenschaften. Es ist sowohl für das Kopfrechnen als auch für die Interpretation von tabellarischen oder grafischen Daten von grundlegender Bedeutung.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiges Missverständnis ist, dass längere Dezimalzahlen (in Übertragung auf natürliche Zahlen bei Ignorierung des Kommas) größer sind – z. B. wählen Schüler*innen vielleicht fälschlicherweise 3,303, weil diese Zahl drei Dezimalstellen hat. Andere vergleichen möglicherweise nur die Stellen nach dem Komma wie natürliche Zahlen und vernachlässigen die Stellenwertstruktur (z. B. indem $3{,}3 = 3{,}03$, da $3 = 3$ bei den Dezimalstellen ist. Einige Schüler*innen sind eventuell auch unsicher, wie sie die Werte vergleichen sollen, insbesondere wenn sie unterschiedliche Anzahl von Stellen haben. Diese Antworten deuten auf ein unzureichendes Verständnis des Dezimalstellenwerts hin, insbesondere bei der Unterscheidung zwischen Zehnteln, Hundertstel und Tausendstel.

Welche Art von Unterstützung kann man Kindern geben, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Schüler*innen sollten dazu ermutigt werden, Stellenwerttabellen zu verwenden, um Dezimalzahlen Ziffer für Ziffer auszurichten und zu vergleichen. Lehrer*innen können Strategien wie das Hinzufügen von führenden Nullen vorgeben, um die Anzahl der Dezimalstellen anzugleichen (z. B. beim Vergleich von 3,300, 3,330, 3,303). Visuelle Hilfsmittel wie Zahlenstrahlen mit Dezimalmarkierungen, Zehnerblockmodelle für Dezimalzahlen oder Gitterdarstellungen können helfen, das Verständnis für Größenordnungen zu festigen. Es ist wichtig, den Wert gegenüber dem Aussehen zu betonen („Mehr Ziffern bedeuten nicht mehr Wert"). Übungen mit Argumentationsaufgaben („Was ist größer und warum?") und Schätzspiele mit beispielsweise Geld können helfen, den Vergleich von Dezimalzahlen in sinnvollen Kontexten zu verankern.

Aufgabe 3.7: Fehlende Summanden in Gleichungen mit Dezimalzahlen finden

Setze die fehlende Zahl ein.

a) $1{,}8 + \underline{3{,}5} = 5{,}3$

b) $\underline{1{,}49} + 0{,}51 = 2$

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?

Diese Aufgabe bewertet die Kompetenz der Schüler*innen, einen unbekannten Summanden in einer Dezimaladditionsgleichung zu berechnen, indem sie ihr Verständnis für Stellenwerte, die Struktur von Gleichungen und umgekehrte Rechenoperationen anwenden. In beiden Teilen wird den Schüler*innen eine Summe vorgelegt, in der eine Komponente fehlt. Dies erfordert entweder subtraktives Denken oder ein konzeptionelles Verständnis der additiven Beziehung. Die Schlüsselkompetenz hierbei ist die Fähigkeit, grundlegende algebraische Strukturen und Dezimalarithmetik flexibel anzuwenden.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?

Das Lösen von Unbekannten in numerischen Gleichungen ist eine grundlegende Schlüsselkompetenz, um eine Brücke zwischen Arithmetik und Algebra zu schlagen. Im Rahmen von DiToM werden solche Aufgaben als frühes algebraisches Denken angesehen, die Schüler*innen müssen die Gleichung als Ganzes betrachten und die strukturelle Rolle der Unbekannten verstehen. Darüber hinaus stärkt der Umgang mit Dezimalwerten die Vertrautheit der Schüler*innen mit der Zehnerbasisstruktur und unterstützt den späteren Erfolg in Themen wie proportionalem Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Einige Schüler*innen versuchen möglicherweise zu raten, anstatt die Subtraktion anzuwenden, insbesondere wenn sie sich nicht sicher sind, wie sie mit Dezimalstellen umgehen sollen. Ein typischer Fehler ist die falsche Ausrichtung der Dezimalstellen (z. B. 1,8 als 18 behandeln). In Teil b.) verwechseln die Schüler*innen möglicherweise die Position der Unbekannten und subtrahieren 0,51 von 1 statt von 2. Andere lösen die Gleichung möglicherweise durch Addition statt durch Subtraktion oder schreiben ein logisch falsches Ergebnis auf, das numerisch „passt", aber die Dezimalstruktur nicht berücksichtigt. Diese Fehler deuten auf Verfahrenslücken, Unsicherheit im Umgang mit Dezimalzahlen oder mangelnde Fähigkeiten zur Interpretation von Gleichungen hin.

Welche Art von Unterstützung kann man Kindern geben, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Eine wirksame Unterstützung umfasst das Üben der Lösung offener Rechenaufgaben unter Verwendung von Dezimalzahlengeraden, Stabmodellen oder Gleichungsausgleichsmodellen, um Beziehungen zu visualisieren und intelligente Berechnungsstrategien anzuwenden. Die Schüler*innen sollten dazu ermutigt werden, Gleichungen unter Verwendung der Subtraktion umzuschreiben, um die Unbekannte zu isolieren, und ihr Ergebnis zunächst zu schätzen, um ein Gefühl für die Plausibilität zu entwickeln. Wenn die Fehler in den strukturellen Beziehungen der Addition und Subtraktion als Umkehroperationen liegen, lohnt es sich auch zunächst noch einmal auf das Rechnen mit natürliche Zahlen zurückzugehen.

Aufgabe 3.8: Rechnen mit Dezimalzahlen

Berechne das Ergebnis.

a) $23{,}5 - 1{,}12 =$ 22,38

b) $6 \cdot 2{,}5 =$ 15

Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, korrekt Rechenoperationen mit Zahlen in Dezimalschreibweise durchzuführen. Im Teil a) wird gefordert, die Differenz zwischen 23,5 und 1,12 zu berechnen; im Teil b) sollen die Schüler*innen das Produkt von 6 und 2,5 bestimmen. Beide Aufgabenteile prüfen das Verständnis des Stellenwertsystems, die operative Sicherheit sowie die Genauigkeit bei Rechnungen mit Dezimalzahlen – sowohl bei der richtigen Ausrichtung als auch bei der Durchführung der Berechnungen. Die Aufgabe spiegelt eine routinemäßige, aber grundlegende Fähigkeit im Kontext des Dezimalsystems wider.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?

Das Ausführen von Grundrechenarten mit Dezimalzahlen ist eine grundlegende mathematische Fähigkeit, da sie ist nicht nur für den alltäglichen Umgang mit Dezimalzahlen unerlässlich (z.B. beim Umgang mit Geld, bei Messungen oder Daten), sondern bildet auch die Grundlage für algebraische Generalisierung und proportionales Denken. Das Rechnen mit Dezimalzahlen ist in vielen mathematischen Bereichen wichtig, darunter Geometrie, Statistik und Problemlösung in wissenschaftlichen Kontexten. Die Fähigkeit, mit Zahlen in Dezimalschreibweise zu rechnen, spiegelt abgesichertes Stellenwertwissen, algorithmische Kontrolle und Schätzstrategien wider.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Die häufigsten Fehler im Teil a) betreffen das fehlerhafte Ausrichten der Dezimalstellen (z.B. 23,5 als 23,50 behandeln, aber nicht korrekt mit 1,12 ausrichten), was zu falschen Subtraktionen führt. Schüler*innen können auch Ziffern an den falschen Stellen subtrahieren oder das Komma ganz ignorieren. Manche wenden ungeeignete Strategien an, wie wiederholte Additionen ohne strukturelle Kontrolle. Solche Fehler deuten auf ein schwaches Verständnis des Stellenwertsystems, der Eigenschaften der Rechenoperationen oder der Positionierung der Dezimalstellen hin.

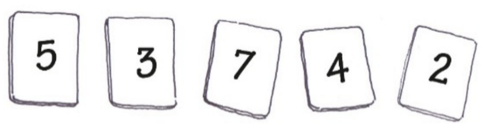
Welche Art von Unterstützung kann man Kindern geben, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung sollte strukturierte Übungen zum Ausrichten der Stellenwerte umfassen, besonders bei Subtraktionen mit mehreren Dezimalstellen. Lehrkräfte können kariertes Papier oder Stellenwerttabellen einsetzen, um den Schüler*innen beim korrekten Ausrichten der Ziffern zu helfen. Abschätzstrategien („Ist das Ergebnis eher 22 oder 10?") fördern das Zahlensinn und die Plausibilitätskontrolle der Lösungen. Für die Multiplikation können Rechteckmodelle oder Zehnerblöcke das konzeptuelle Verständnis der Dezimalmultiplikation unterstützen. Es ist hilfreich, sowohl die Standardalgorithmen als auch mentale Rechenstrategien zu zeigen, z.B.: $6 \cdot 2{,}5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0{,}5 = 15$. Auch das sprachliche Begründen fördert das Verständnis dafür, wie sich Dezimalzahlen bei Rechenoperationen verhalten.

Aufgaben 3.9 und 3.10: Verändern des Bruchwertes durch Auswahl eines geeigneten Zählers oder Nenners

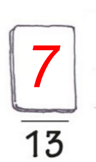
Aufgabe 3.9

Gegeben sind 5 Karten, auf denen jeweils eine Zahl steht.



Wähle die passende Karte, damit der Wert des Bruches am größten ist.

Schreibe die Zahl in das Kästchen.

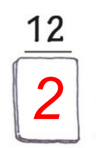


Aufgabe 3.10

Gegeben sind 5 Karten, auf denen jeweils eine Zahl steht.

Wähle die passende Karte, damit der Wert des Bruches am größten ist.

Schreibe die Zahl in das Kästchen.



Welche Fähigkeit wird mit dieser Aufgabe erfasst?
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, über die Struktur von Brüchen zu argumentieren und ihr Verständnis anzuwenden, um den Wert eines Bruchs zu maximieren, indem sie die am besten geeignete Zahl aus einer Reihe von Optionen auswählen. Den Schüler*innen wird eine Reihe von Karten mit jeweils unterschiedlichen Zahlen vorgelegt, und sie werden gebeten, eine davon so in eine vorgegebene Bruchstruktur einzufügen, dass der Wert des resultierenden Bruchs so groß wie möglich ist. In der Aufgabe fehlt in dem Bruch entweder der Zähler oder der Nenner, und die Schüler*innen müssen die Zahl auswählen, die den Wert des Bruchs am größten macht. Damit wird das flexible Denken der Schüler*innen mit Verhältnissen und relativen Größenordnungen geprüft.

Warum und wie hängt erfolgreiches Weiterlernen von dieser Fähigkeit ab?
Das Verständnis, wie Zähler und Nenner die Größe eines Bruchs beeinflussen, ist ein zentraler Gedanke beim Lernen von Brüchen. Im Rahmen von DiToM spiegelt diese Fähigkeit ein tieferes konzeptionelles Verständnis der Größe von Brüchen wider, wie sich die Erhöhung des Zählers oder die Verringerung des Nenners auf den Gesamtwert auswirkt.

Sie unterstützt auch die Entwicklung des relationalen Denkens, bei dem die Schüler*innen über oberflächliche Merkmale hinausdenken und stattdessen strukturell über Zahlenbeziehungen nachdenken. Diese Erkenntnisse sind für die spätere Arbeit mit Verhältnissen, Proportionen, Skalierungen und algebraischem Denken unerlässlich.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiger Fehler ist die Auswahl der größten verfügbaren Zahl, unabhängig davon, ob sie im Zähler

oder Nenner steht, unter der falschen Annahme, dass „größer besser ist“. Dies deutet auf eine prozedurale oder oberflächliche Strategie ohne strukturelles Verständnis hin.

Andere wählen möglicherweise einfach zufällig oder verwechseln die Rollen von Zähler und Nenner, indem sie beispielsweise die Zahl selbst maximieren, anstatt den Wert des resultierenden Bruchs. Diese Fehler deuten auf ein fehlerhaftes Verständnis von Brüchen und Schwierigkeiten mit dem Vergleichen von Brüchen, die keine Einheiten sind, hin. Die Schüler*innen können auch das Ziel missverstehen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Eine wirksame Unterstützung umfasst praktische Aktivitäten mit Bruchstreifen oder Zahlenstrahlen, bei denen die Schüler*innen mit Zählern und Nennern experimentieren, um zu beobachten, wie sich die Größe des Bruchs verändert. Lehrer*innen können Vergleiche wie „$\frac{3}{4}$ vs. $\frac{3}{5}$” oder „$\frac{4}{7}$ vs. $\frac{5}{7}$” modellieren, um zu untersuchen, wie sich der Zähler oder Nenner auf die Größe auswirkt.

Diskussionsbasierte Aufgaben – „Was ist größer und warum?” – fördern ein tieferes Verständnis. Die Visualisierung von Brüchen auf einem gemeinsamen Zahlenstrahl oder die Verwendung von Software, die die Größe von Brüchen dynamisch anzeigt, kann den Schüler*innen ebenfalls helfen, diese Zusammenhänge zu verstehen.

V. Hinweise zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse

Um Ihnen bei der Auswertung der Testergebnisse zu helfen, stehen Ihnen verschiedene Tools zum Download zur Verfügung unter:
https://www.ditom.org/it/tests-it

1. Wenn Sie die Tests lieber **manuell auswerten** möchten, bieten wir Ihnen folgende Hilfsmittel an:

Die folgende Skala liefert erste Anhaltspunkte dafür, in welchen Bereichen die Schüler*innen am wahrscheinlichsten Punkte erzielen:

$n \leq 14$ **Punkte**	→ **Gruppe A:** Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.
$15 \leq n \leq 22$ **Punkte**	→ **Gruppe B:** Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.
$n \geq 23$ **Punkte**	→ **Gruppe C:** Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Punktebereich	**Das können Schüler*innen in dieser Klasse bereits**
$n \leq 14$	natürliche Zahlen auf dem Zahlenstrahl eintragen, natürliche Zahlen vergleichen, grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit natürlichen Zahlen, grundlegende Multiplikations- und Divisionsaufgaben mit natürlichen Zahlen
$15 \leq n \leq 22$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: erweiterte Grundrechenaufgaben mit natürlichen Zahlen, Grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Dezimalzahlen, Brüche als Teil eines Ganzen verstehen, grundlegende Aufgaben zum proportionalen und funktionalen Denken,
$n \geq 23$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: zeigen ein adäquates Bruchzahl- und Dezimalzahlverständnis, Kompetenz zum Modellieren von Textaufgaben, proportionales Verständnis

2. Eine weitere Möglichkeit ist die **Auswertung der Ergebnisse in Excel** auf Ihrem Computer. Zu diesem Zweck können Sie folgendes Dokument auf https://www.ditom.org/it/tests-it herunterladen:

   Eine **vorprogrammierte Excel-Datei** mit zwei Arbeitsblättern, zwischen denen Sie über die Registerkarten unten links wechseln können. Geben Sie im Arbeitsblatt mit dem Titel „qualitativ” einfach in die entsprechende Spalte für jedes Kind die Zahlen ein, die das Kind in seinem Testheft als Antworten in jeder Teilaufgabe eingetragen hat. Weitere Aufgabenspezifische Erklärungen sind der Exceltabelle zu entnehmen. Wenn ein Kind eine Aufgabe nicht bearbeitet hat, geben Sie bitte 999 ein. In der Exceltabelle ist in der ersten Zeile ein Beispiel angegeben. Wenn Sie mit der Eingabe der Daten fertig sind, wechseln Sie zum Arbeitsblatt „Auswertung”. Das Programm erstellt Ihnen eine Auswertung Ihrer eingetragenen Daten.

Die „kritischen Punkteschwellen” für DiToM 6+ und wie man sie interpretiert

Wie in Abschnitt I erläutert, dient DiToM nicht dazu, Kinder zu kategorisieren. Bitte lesen Sie dazu die Erläuterungen zu den Zielen und Leitprinzipien von DiToM.

Dort finden Sie auch eine detailliertere Erläuterung der „kritischen Punkteschwellen”, die auf der Grundlage von Pilotversuchen mit DiToM (für Version 6+, mit 2346 Schüler*innen aus den sieben Partnerländern des Projekts) unter Verwendung der statistischen Methode der Latent Class Analysis (Yin et al. 2025) ermittelt wurden. Diese Methode ermöglicht es, Kinder anhand ihrer Gesamtpunktzahl in DiToM 6+ modellbasiert einer der folgenden drei Gruppen zuzuordnen:

Punktzahlbereich	**Gruppe**
0 bis 14	A – Anzeichen für weitreichende Schwierigkeiten in mehreren Schlüsselbereichen
15 bis 22	B – Anzeichen für Schwierigkeiten in einigen Schlüsselbereichen
23 bis 29	C – Keine Anzeichen für größere Schwierigkeiten in Schlüsselbereichen

Eine abschließende Anmerkung mit Verweis auf Abschnitt I: Beachten Sie, dass ein Screening nur eine Momentaufnahme liefert. Die Ergebnisse sollten daher mit Ihren eigenen Beobachtungen und Erfahrungen im Unterricht verglichen und gegebenenfalls als Ausgangspunkt für Folgeinterviews mit einzelnen Schülern und Schülerinnen verwendet werden – um Ihr Verständnis zu vertiefen, zu verfeinern oder zu erweitern und gegebenenfalls Ihre Schlussfolgerungen zumindest teilweise anzupassen.

VI. Literatur

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R. & Lesh, R. (1992). Rationale Zahlen, Verhältnisse und Proportionen. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbuch zur Forschung über Mathematikunterricht und -lernen* (S. 296–333). New York: Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Entwicklung und Evaluation eines Screening-Instruments zur Früherkennung von Risikoschülern im Mathematikunterricht der unteren Sekundarstufe. In *Proceedings of EDULEARN25 Conference*. Palma, Spanien. Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7

Ehlert, A., & Fritz, A. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(2), 237–263.

Gaidoschik, M. (2025). *Das dezimale Stellenwertsystem: Verstehen, verinnerlichen und flexibel anwenden*. Hannover: Klett Kallmeyer.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Einige multiplikative Strukturen in der Grundschulbildung: eine Betrachtung aus relationaler Perspektive. Educational Studies in Mathematics, 106(3), 447–469.

Prediger, S. (2008). Zahlaspekte verstehen und flexibel nutzen. In E. Cohors-Fresenborg et al. (Hrsg.), *Mathematiklernen ermöglichen* (S. 85–100). Münster: Waxmann. ph-gmuend.de+3Edoc LMU München+3Wikipedia+3

Radford, L. (2014). Die progressive Entwicklung des frühen verkörperten algebraischen Denkens. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Entwicklung der numerischen Schätzung bei kleinen Kindern. *Child Development*, 76(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Konzeptionelles Wissen über Bruchrechnen. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.

Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visuelle Darstellungen als Analyseobjekte: das Zahlenband als Beispiel. ZDM, 46, 45–58.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). Von der Addition zur Multiplikation … und zurück: Die Entwicklung der additiven und multiplikativen Denkfähigkeiten von Schülern. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Konzepte und Operationen mit ganzen Zahlen. In F. K. Lester Jr. (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 557–628). Charlotte, NC: Information Age.

Wittmann, E. Ch. und Müller, G. N. (2004). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Seelze: Friedrich Verlag.

Yin, L., Bezirhan, U. & von Davier, M. (2025). Improving Context Scale Interpretation Using Latent Class Analysis for Cut Scores. In: International Electronic Journal of Elementary Education, Volume 17, Issue 2.