UNIVERSITY OF THE AEGEAN

DiToM

Diagnostic Tool in Mathematics

Εγχειρίδιο διαγνωστικού τεστ 8+

Co-funded by the European Union

Περιεχόμενα

I. Εισαγωγή

Η εκμάθηση των μαθηματικών είναι συσσωρευτική: το νέο περιεχόμενο βασίζεται σε στέρεες προηγούμενες γνώσεις. Εάν λείπουν θεμελιώδεις ιδέες και έννοιες, γίνεται όλο και πιο δύσκολο για τους μαθητές/τριες και τις μαθήτριες να κατανοήσουν ουσιαστικά τα επόμενα θέματα. Τα ευρήματα διεθνών και εθνικών ερευνών δείχνουν ότι ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών/τριών και των μαθητριών δεν πληροί τα ελάχιστα πρότυπα στα μαθηματικά. Για την καθημερινή διδασκαλία αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται έγκαιρες, πρακτικές διαδικασίες για να καταστεί ορατή η κατάσταση της μάθησης και να οργανωθεί έγκαιρη υποστήριξη. Εδώ έρχεται το έργο της Ε.Ε. «Διαγνωστικό εργαλείο στα μαθηματικά (DiToM)». Σε συνεργασία μεταξύ Ιταλίας, Γαλλίας, Σουηδίας, Κροατίας, Ελλάδας, Ισπανίας και Γερμανίας, έχουν αναπτυχθεί πέντε αλληλένδετα εργαλεία αξιολόγησης για να παρέχουν στους/στις εκπαιδευτικούς μια συνοπτική εικόνα της τάξης τους σε εκπαιδευτικά σημεία μετάβασης. Τα σημεία αξιολόγησης ακολουθούν ένα διετές ρυθμό:

1. Νηπιαγωγείο → Αρχή Α’ δημοτικού
2. Τέλος Β’ δημοτικού / Αρχές Γ’ δημοτικού
3. Τέλος Δ’ δημοτικού / Αρχές Ε’ δημοτικού
4. Τέλος ΣΤ’ δημοτικού / Αρχές Α’ γυμνασίου
5. Τέλος Β’ Γυμνασίου / Αρχές Γ’ Γυμνασίου

Τι είναι το διαγνωστικό τεστ (screening);

Το διαγνωστικό τεστ (screening) είναι μια σύντομη, ατομική αξιολόγηση που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ολόκληρη την τάξη μέσα σε ένα μόνο μάθημα. Παρέχει μια αρχική, δομημένη επισκόπηση των βασικών εννοιών που έχουν ήδη κατακτηθεί και των τομέων στους οποίους οι μαθητές/τριες/τριες μπορεί να χρειάζονται επιπλέον υποστήριξη. Το screening δεν αντικαθιστά την ατομική, ποιοτική αξιολόγηση της τρέχουσας κατάστασης της μαθηματικής σκέψης ενός παιδιού. Χρησιμεύει ως σημείο εκκίνησης: τα αποτελέσματα μπορούν να ακολουθηθούν από στοχευμένες παρατηρήσεις, συνεντεύξεις και μέτρα υποστήριξης.

Γιατί είναι χρήσιμο αυτό;

- Παρέχει μια γρήγορη επισκόπηση: ποιες βασικές δεξιότητες είναι σε καλό βαθμό και πού είναι χρήσιμη η επανεξέταση ή η επέκταση.
- Επιτρέπει μια καθοδηγούμενη υποστήριξη: εντοπίζει τους/τις μαθητές/τριες που ενδέχεται να δυσκολεύονται με τα ελάχιστα πρότυπα των βασικών μαθηματικών. Με αυτό τον τρόπο μπορείτε να οργανώσετε έγκαιρη υποστήριξη.
- Οδηγεί σε διαγνωστικές αποφάσεις: τα αποτελέσματα της αξιολόγησης παρέχουν μια σαφή πρώτη κατεύθυνση, υποδεικνύοντας ποιοι μαθητές/τριες μπορεί να ωφεληθούν από περαιτέρω διαγνωστικά μέτρα (π.χ. πιο εμπεριστατωμένη ανάλυση των εργασιών ή συνεντεύξεις παρακολούθησης).
- Υποστηρίζει τη μετάβαση: σας επιτρέπει να εστιάσετε την προσοχή σας στις βασικές δεξιότητες κατά τις κρίσιμες σχολικές μεταβάσεις.

Οι ασκήσεις είναι προσανατολισμένες στην τάξη, η διαχείριση περιγράφεται με σαφήνεια και η βαθμολόγηση είναι γρήγορη. Οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν μια συνοπτική περίληψη σε επίπεδο τάξης, καθώς και υποδείξεις για τους/τις μαθητές/τριες που αξίζει να εξεταστούν πιο προσεκτικά σε συγκεκριμένους τομείς περιεχομένου. Με βάση αυτά, μπορούν να προγραμματίσουν σύντομα διαστήματα επανάληψης, διαφοροποιημένες ασκήσεις ή ασκήσεις γεφύρωσης.

Το παρόν εγχειρίδιο παρέχει έναν συνοπτικό οδηγό για τον σκοπό και τη χρήση του εργαλείου αξιολόγησης, εξηγεί τη δομή του τεστ, τους τύπους των ασκήσεων και τους στοχευμένους στόχους αξιολόγησης, δίνει σαφείς οδηγίες για τη διαχείριση στην τάξη, περιγράφει τη βαθμολόγηση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και προσφέρει πρακτικές ιδέες για την επακόλουθη διδασκαλία και τη στοχευμένη υποστήριξη.

Ο στόχος είναι ένα πρακτικό, αξιόπιστο και εύχρηστο εργαλείο αξιολόγησης που παρέχει στους/στις εκπαιδευτικούς γρήγορο προσανατολισμό, επικεντρώνει την προσοχή σε πιθανές δυσκολίες και υποστηρίζει συγκεκριμένα την αποτελεσματική βοήθεια, ώστε όσο το δυνατόν περισσότεροι μαθητές/τριες να μαθαίνουν τα μαθηματικά με σιγουριά, κατανόηση και αυτοπεποίθηση.

II. Τι σημαίνει «βασικές μαθηματικές δεξιότητες»

Η ανάπτυξη διαγνωστικών τεστ απαιτεί μια θεωρητική βάση. Για σύντομα τεστ αξιολόγησης ολόκληρης της τάξης, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εστιάζουμε σε εκείνες τις δεξιότητες χωρίς τις οποίες δεν είναι δυνατή η εκμάθηση του επόμενου περιεχομένου με τρόπο που να έχει νόημα. Σύμφωνα με την κλασική άποψη των Gagné & Briggs, κάθε νέα μαθησιακή γνώση βασίζεται σε ένα ελάχιστο αριθμό απαραίτητων προαπαιτούμενων, στους οποίους αναφέρεται ο όρος «βασικές μαθηματικές δεξιότητες». Εάν αυτές δεν είναι διαθέσιμες, η επιτυχής απόκτηση του νέου περιεχομένου είναι αδύνατη και, ως εκ τούτου, οι κατάλληλες εργασίες βασίζονται σε ό,τι έχει ήδη κατακτηθεί. Στα μαθηματικά, η μάθηση είναι κατά συνέπεια ιεραρχική και σωρευτική.

Εννοιολογική κατανόηση: ικανότητες, έννοιες, δεξιότητες και βασικές δεξιότητες

Στο πλαίσιο του έργου, διακρίνουμε μεταξύ ικανοτήτων και δεξιοτήτων, οι οποίες είναι αλληλεξαρτώμενες στην πρακτική της τάξης. Οι ικανότητες αναφέρονται σε μια διορατική ετοιμότητα να ενεργεί κανείς κατάλληλα σε μαθηματικές καταστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο, οι έννοιες αποτυπώνουν ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων. Η ενεργοποίηση των ικανοτήτων προκύπτει σε μια δεξιότητα, όπως η πρακτική απόδοση από την πλευρά των μαθητών/τριών και των μαθητριών. Οι βασικές δεξιότητες είναι εκείνες οι δεξιότητες η απουσία των οποίων εμποδίζει ή παρεμποδίζει ουσιαστικά την περαιτέρω μάθηση. Λειτουργούν ως απαραίτητες προϋποθέσεις για το επόμενο περιεχόμενο. Το επίκεντρο των ερωτήσεων είναι η αριθμητική και η άλγεβρα, λόγω της ιεραρχικής δομής τους και της σημασίας τους και για άλλους τομείς των μαθηματικών (π.χ. γεωμετρία), η οποία είναι συμβατή τόσο σε εθνικό όσο και σε διακρατικό επίπεδο.

Τα παρακάτω παραδείγματα αποσαφηνίζουν την έννοια των βασικών δεξιοτήτων.

Πρώτο επίπεδο: εκτέλεση της πρόσθεσης με δομημένο τρόπο
Η άσκηση 25 + 7 απαιτεί κάτι περισσότερο από τη σταδιακή μέτρηση. Μια ισχυρή αίσθηση της πράξης εμφανίζεται όταν οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν τις σχέσεις μέρους-μέρους-συνόλου (π.χ. 25 και 7 ως μέρη ενός συνόλου), αναλύουν τους αριθμούς με ευελιξία (π.χ. 7 = 5 + 2) και βασίζονται στην επόμενη δεκάδα (π.χ. 25 + 5 = 30, στη συνέχεια +2 = 32). Εδώ, οι έννοιες (αξία θέσης, ισότητα), οι ικανότητες (ευέλικτος υπολογισμός, αιτιολογημένη διαδικασία) και η δεξιότητα που προκύπτει (δομημένη πρόσθεση) λειτουργούν από κοινού. Εάν αυτή η βασική δεξιότητα λείπει, το επόμενο «επίπεδο», μεγαλύτερα αριθμητικά εύρη ή πιο αποτελεσματικές στρατηγικές, παραμένουν δύσκολα προσβάσιμα.

Δεύτερο επίπεδο: διαχείριση επέκτασης αριθμητικών τομέων
Η ασφαλής κατανόηση των φυσικών αριθμών (αποσύνθεση, αντίστροφες πράξεις, αξία θέσης και αναφορές στον αριθμητικό άξονα) αποτελεί προϋπόθεση για τη μεταφορά διαδικασιών σε δεκαδικούς και κλάσματα (π.χ. πρόσθεση/αφαίρεση, στρογγυλοποίηση, εκτίμηση) προκειμένου να ξεπεραστούν τα επιστημολογικά εμπόδια που συνεπάγεται η εκμάθηση μαθηματικών εννοιών (Brousseau, 1997). Τα κενά σε αυτές τις βασικές δεξιότητες συχνά οδηγούν σε διαδικαστική εργασία χωρίς κατανόηση, η οποία με τη σειρά της εμποδίζει την πρόσβαση σε αλγεβρικές εκφράσεις, εξισώσεις και λειτουργικές σχέσεις. Αυτό καταδεικνύει τον προγνωστικό χαρακτήρα των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων για τις αλγεβρικές απαιτήσεις.

Η κατανόηση των βασικών δεξιοτήτων ενσωματώνεται στις ερωτήσεις έτσι ώστε να:

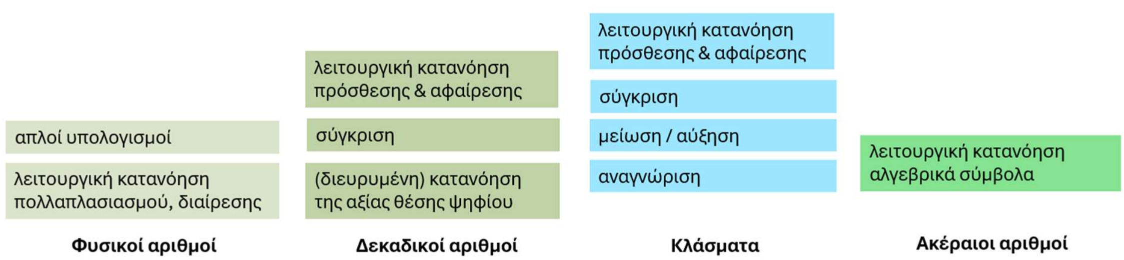
- αντιπροσωπεύουν τις απαραίτητες προϋποθέσεις για το επόμενο βήμα μάθησης, και
- είναι συναφή με το περιεχόμενο και επομένως μπορούν να εντοπιστούν με σύντομες ερωτήσεις, και
- προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς μια πρώτη δομημένη κατεύθυνση ως προς το ποιοι/ες μαθητές/τριες ενδέχεται να χρειάζονται περαιτέρω διαγνωστικά βήματα και πού μπορεί να στοχεύσει η υποστήριξη. Ο στόχος δεν είναι να αποδοθούν ετικέτες, αλλά να αποκαλυφθούν έγκαιρα οι βασικές προϋποθέσεις, έτσι ώστε η μετέπειτα μάθηση να μπορεί να προχωρήσει σε σταθερή βάση.

Κατά την άποψή μας, κάθε γνωστικό πεδίο περιλαμβάνει βασικές δεξιότητες, οι οποίες μπορεί να αποδειχθούν κρίσιμες σε διάφορα σημεία της μαθησιακής πορείας, συμπεριλαμβανομένου του τέλους μιας ενότητας, όταν απαιτείται μια ικανότητα για να καταστεί δυνατή η περαιτέρω μάθηση. Η ανάπτυξη βασικών δεξιοτήτων είναι επομένως συνεχής σε όλες τις τάξεις. Η έγκαιρη αναγνώριση των ελλείψεων σε προαπαιτούμενες γνώσεις παραμένει ουσιαστικής σημασίας, ώστε οι μαθητές/τριες να μπορούν να συνεχίσουν να αποκτούν νέες γνώσεις με κατανόηση.

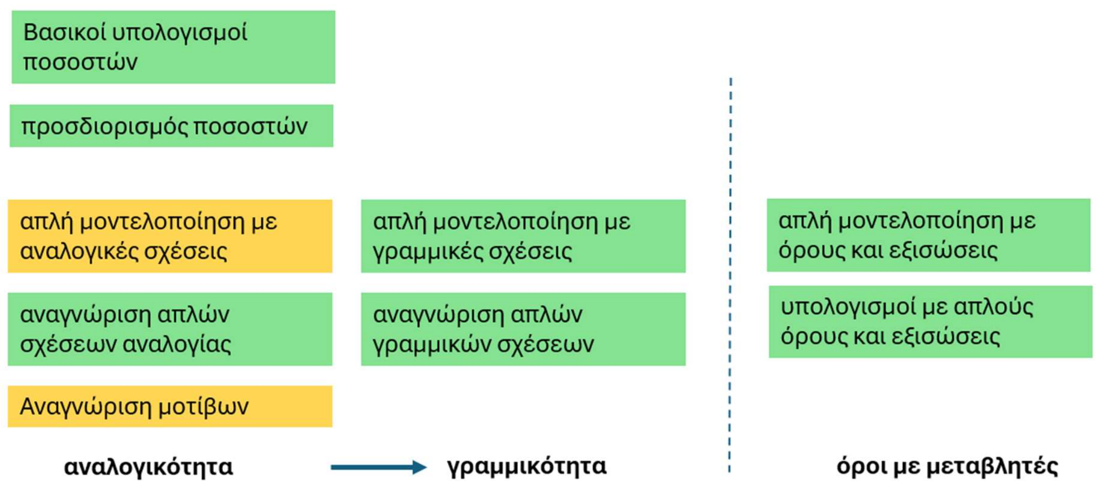
III. Δομή διαγνωστικών τεστ 6+ και 8+

Η δομή των τεστ στο DiToM βασίζεται στις θεματικές ενότητες της αριθμητικής και της άλγεβρας. Λαμβάνεται υπόψη η ιεραρχική δομή της θεματικής ενότητας. Η δομή των τεστ επικεντρώνεται στην ανάπτυξη και επέκταση του αριθμητικού εύρους με την έννοια του τεχνικού υπολογισμού, στο βαθμό που οι υπολογιστικές διαδικασίες εκτελούνται μη αλγοριθμικά και αλγοριθμικά με βάση μια βασική κατανόηση. Το διάγραμμα δείχνει τη δομή των τεστ σε αυτή τη θεματική ενότητα για τις τάξεις 6+ και 8+.

Η εξέταση για την τάξη 6+ βασίζεται στα δομικά στοιχεία της τάξης 4+, τα οποία εστιάζουν στους φυσικούς αριθμούς. Εάν οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στον τομέα των φυσικών αριθμών στην τάξη 6+, συνιστάται η χρήση της εξέτασης για την τάξη 4+.



Στον τομέα της άλγεβρας ή της προ-άλγεβρας, η δομική κατανόηση απλών μαθηματικών δομών τόσο σε εσωτερικές όσο και σε εξωτερικές μαθηματικές εφαρμογές αξιολογείται υπό την πτυχή της αναλογικότητας και της γραμμικότητας. Ομοίως, στον τομέα των όρων με αριθμούς ή μεταβλητές σε διαφορετικές κατευθύνσεις σε βασικές καταστάσεις εφαρμογής, καθώς και για την κατανόηση των όρων, στο βαθμό που αποτελεί μέρος μιας βασικής κατανόησης.



IV. Εφαρμογή του τεστ DiToM

- **Εξηγήστε στους/στις μαθητές/τριες τον σκοπό του τεστ και καθησυχάστε τους/τες.**

- Το τεστ δεν βαθμολογείται.
- Τους επιτρέπει να αξιολογήσουν τι γνωρίζουν και τι δεν γνωρίζουν, ώστε να μπορούν στη συνέχεια να προτείνουν τις κατάλληλες ασκήσεις. Επομένως, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να εργαστούν μόνοι/ες τους.
- Τονίστε τη σημασία της ολοκλήρωσης των ασκήσεων. Όσο περισσότερες ερωτήσεις απαντήσουν, τόσο πιο εύκολο θα είναι να προσδιοριστούν οι γνώσεις, οι δεξιότητες και οι δυσκολίες τους και να τους/τις βοηθήσετε να τις ξεπεράσουν.
- Μπορείτε επίσης να πείτε ότι αυτή είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιείται αυτό το τεστ και ότι οι άνθρωποι που το σχεδίασαν θέλουν να μάθουν αν είναι κατάλληλο.

- **Δομή του τεστ**

- Η εξέταση χωρίζεται σε τρία μέρη, το καθένα από τα οποία αποτελείται από διάφορες ασκήσεις.
- Όλες οι ασκήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

- **Διάρκεια:** Για κάθε μέρος υπολογίζεται η μέγιστη διάρκεια..

- Δοκιμασία βαθμού 6, μέγιστη διάρκεια 45 λεπτά: 15 για προ-άλγεβρα, 10 για αναλογικότητα, 20 για αριθμητική.
- Δοκιμασία βαθμού 8, μέγιστη διάρκεια 40 λεπτά: 15 για προ-άλγεβρα, 10 για αναλογικότητα, 15 για αριθμητική.
- Είναι σημαντικό να ενημερώσετε τους/τις μαθητές/τριες για τη διάρκεια κάθε μέρους πριν από την εξέταση και να τους/τις εξηγήσετε ότι θα διακόψετε όσους/ες δεν έχουν τελειώσει, για λόγους δικαιοσύνης μεταξύ τους.

- **Μορφή ασκήσεων**

- Ανοιχτές ασκήσεις: υπάρχει χώρος για να απαντήσετε (είτε με προτάσεις είτε με αριθμούς).
- Κλειστές ασκήσεις (ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής): προτείνονται διάφορες απαντήσεις και ο/η μαθητής/τρια πρέπει να απαντήσει επιλέγοντας μόνο μία. Ενημερώστε τους/τις μαθητές/τριες ότι αν αποφασίσουν να αλλάξουν την απάντησή τους σε μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής, πρέπει να γράψουν «Όχι» δίπλα στην πρώτη απάντηση και «Ναι» δίπλα στη νέα.

- **Πώς να απαντήσετε**

- Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανών.
- Οι μαθητές/τριες μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιοδήποτε κενό μέρος της σελίδας ως πρόχειρο, ιδίως για να γράψουν τους υπολογισμούς τους.
- Οι μαθητές/τριες μπορούν να εργαστούν στα τρία μέρη με τη σειρά, με το δικό τους ρυθμό. Οι μαθητές/τριες που έχουν ολοκληρώσει ένα μέρος της εξέτασης πρέπει να περιμένουν τις οδηγίες του/της καθηγητή/τριας για να συνεχίσουν με το επόμενο μέρος.

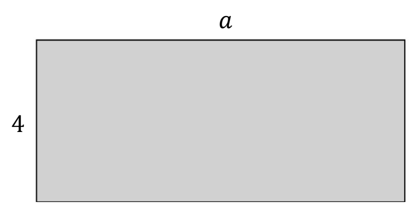
- **Αλληλεπίδραση με τους/τις μαθητές/τριες κατά τη διάρκεια της εξέτασης**

- Εάν ο/η εκπαιδευτικός κληθεί να απαντήσει, δεν δίνει καμία ένδειξη που θα καθοδηγούσε την απάντηση στις ερωτήσεις. Ο στόχος είναι να εντοπιστούν οι δυσκολίες των μαθητών/τριών.

V. Παρουσίαση των ασκήσεων

Άσκηση 1.1: Περίμετρος ενός ορθογωνίου

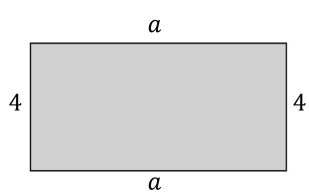
Η περίμετρος ενός πολυγώνου είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του.
Ποιος είναι ο τύπος για την περίμετρο (Π) του ορθογωνίου;



$\Pi =$ 2α + 8 ________________

Λύση

Πρέπει να προστεθούν τα μήκη και των τεσσάρων πλευρών.



Ακόμα κι αν η άσκηση ζητάει τον τύπο, αρκετές (ισοδύναμες) απαντήσεις είναι σωστές.

Για παράδειγμα:

$a + 4 + a + 4$ (ή $a + a + 4 + 4$, ή οι όροι σε οποιαδήποτε σειρά)

$2a + 8$ (ή $2(a + 4)$ ή $(a + 4) \cdot 2$ ή $2 \cdot a + 2 \cdot 4$)

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να κατασκευάσουν έναν συμβολικό τύπο για την περίμετρο ενός ορθογωνίου όταν δίνονται τα μήκη των πλευρών σε αλγεβρική μορφή. Το ορθογώνιο είναι σημειωμένο με μήκη πλευρών α και 4 και η άσκηση ζητά από τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν την περίμετρο P ως γενική έκφραση, αντί να υπολογίσουν μια αριθμητική τιμή. Για να λύσουν σωστά την άσκηση, οι μαθητές/τριες πρέπει να καταλάβουν ότι ένα ορθογώνιο έχει δύο ζεύγη πλευρών ίσου μήκους και ότι ο επιλεγμένος τύπος πρέπει να προσθέτει τα μήκη και των τεσσάρων πλευρών.

$\Pi = 2 \cdot (\alpha\ +\ 4)$
$\Pi = (\alpha + 4)\ \cdot 2$
ή ισοδύναμα: Π=2α + 8   Π = 2α + 2 · 4

ή: α+4+α+4 ή ομοίως

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Αυτή η δραστηριότητα υποστηρίζει την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ενθαρρύνοντας τους/τις μαθητές/τριες να αναπαραστήσουν σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων χρησιμοποιώντας μεταβλητές. Στο πλαίσιο του DiToM, η κατασκευή τέτοιων τύπων είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη συμβολικής ευχέρειας και την κατανόηση των λειτουργικών σχέσεων. Συνδέει το γεωμετρική κατανόηση (περίμετρο) με την αλγεβρική έκφραση και ενισχύει τη χρήση μεταβλητών ως γενικευμένων αριθμών. Αυτή η δεξιότητα προετοιμάζει επίσης τους/τις μαθητές/τριες για μεταγενέστερη εργασία με συναρτήσεις, παραμετρικά μοντέλα και επίλυση εξισώσεων.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Μια πολύ κοινή παρανόηση είναι ότι οι μαθητές/τριες προσπαθούν να υπολογίσουν μια αριθμητική τιμή για την πλευρά που είναι επισημασμένη με α – για παράδειγμα, μετρώντας την απευθείας από το διάγραμμα – αντί να αναγνωρίσουν ότι το α είναι μια μεταβλητή και η άσκηση απαιτεί έναν γενικό τύπο, όχι ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Αυτό υποδεικνύει ασυμφωνία μεταξύ της αλγεβρικής αναπαράστασης και του συγκεκριμένου υπολογισμού. Ένα άλλο συχνό λάθος είναι ότι οι μαθητές/τριες υπολογίζουν την περίμετρο αριθμητικά, αντικαθιστώντας εκτιμώμενες ή υποθετικές τιμές (π.χ., «το α είναι περίπου 6 εκ., άρα...»), δείχνοντας ότι παρερμήνευσαν τη φύση της εργασίας. Αυτό αποκαλύπτει μια παρερμηνεία της μορφής της εργασίας—την αντιμετώπιση ως πρόβλημα υπολογισμού αντί για συμβολική γενίκευση. Επιπλέον, ορισμένοι/ες μαθητές/τριες δίνουν τον τύπο για το εμβαδόν του ορθογωνίου αντί για την περίμετρο, όπως γράφουν A = α · 4 ή A = 4α, συγχέοντας τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου. Αυτό υποδηλώνει είτε εννοιολογική σύγχυση μεταξύ των δύο ιδιοτήτων είτε δυσκολίες στην εξαγωγή σχετικών πληροφοριών από το κείμενο.

Συνολικά, αυτά τα σφάλματα υποδηλώνουν αδυναμίες στην:

- κατανόηση του ρόλου των μεταβλητών
- διάκριση διαφορετικών γεωμετρικών εννοιών
- ακριβή ερμηνεία μαθηματικών οδηγιών.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Οι μαθητές/τριες επωφελούνται από την εξάσκηση που διαχωρίζει σαφώς τις ασκήσεις που απαιτούν τύπους από αυτές που απαιτούν αριθμητικά αποτελέσματα. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν φυσικά ορθογώνια κομμένα σε χαρτόνι ή ψηφιακά εργαλεία χειρισμού, όπου οι μαθητές/τριες επισημαίνουν τις πλευρές με γράμματα και «περπατούν» γύρω από το σχήμα για να μετρήσουν το συνολικό μήκος. Οπτικά βοηθήματα όπως τα πλακάκια άλγεβρας ή τα πλαίσια περιμέτρου βοηθούν να καταδείξουν γιατί οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και πρέπει να αθροιστούν δύο φορές. Η ενθάρρυνση των λεκτικών διατυπώσεων («δύο φορές το άθροισμα του α και του 4») βοηθά στη γεφύρωση της συγκεκριμένης κατανόησης με τον αλγεβρικό συμβολισμό. Επιπλέον, οι εργασίες του τύπου «1) Γράψτε έναν τύπο για την περίμετρο, συναρτήσει της μεταβλητής/αγνώστου α· 2) Χρησιμοποιήστε τον τύπο για να υπολογίσετε την τιμή της περιμέτρου για α=5», μπορούν να εκπαιδεύσουν τους/τις μαθητές/τριες να διαβάζουν τις οδηγίες με ακρίβεια.

Άσκηση 1.2: Μετάφραση λεκτικών εκφράσεων σε αλγεβρικές παραστάσεις (A–C)

a) Το άθροισμα του 3 και του x $3 + x$

b) 3 λιγότερο από x $x - 3$

c) Διπλάσιο του α 2α

Λύση

a) Το άθροισμα του 3 και του x μπορεί να γραφτεί είτε ως 3+x είτε ως x+3.

b) Το 3 λιγότερο από το x μπορεί να γραφτεί ως x-3 (ή x+(-3) ή -3+x).

c) Το διπλάσιο ενός αριθμού α μπορεί να γραφτεί ως 2·α ή 2α ή α+α.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτό το σύνολο εργασιών αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να μετατρέπουν την καθημερινή γλώσσα σε αλγεβρική σημειογραφία. Κάθε μέρος (α-δ) παρουσιάζει μια διαφορετική λεκτική δομή που αντιστοιχεί σε μια απλή συμβολική έκφραση. Στο μέρος α (το άθροισμα του 3 και του x), ο στόχος είναι να αναγνωριστεί η προσθετική δομή (3 + x). Το μέρος β (3 λιγότερο από x) ελέγχει αν οι μαθητές/τριες αντικατοπτρίζουν σωστά μια αφαιρετική σχέση με τη σωστή σειρά τελεσταίων (x − 3). Το μέρος γ (το διπλάσιο του α) απαιτεί πολλαπλασιασμό ως κλιμάκωση (2α). Αυτή η εργασία συνδυάζει βασικές αλγεβρικές συμβάσεις με γλωσσική ακρίβεια, ζητώντας από τους/τις μαθητές/τριες να πλοηγηθούν μεταξύ της φυσικής γλώσσας και της συμβολικής έκφρασης.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα να μεταβαίνουμε ομαλά μεταξύ λεκτικών περιγραφών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδης στον μαθηματικό γραμματισμό. Υποστηρίζει την κατανόηση των συναρτησιακών σχέσεων, θέτει τις βάσεις για την ερμηνεία και τη σύνταξη εξισώσεων και τύπων και είναι απαραίτητη για τη μοντελοποίηση προβλημάτων. Σύμφωνα με το DiToM, αυτή η ικανότητα είναι κεντρική για την οικοδόμηση συμβολικής κατανόησης και για την ανάπτυξη μιας ουσιαστικής αντίληψης των πράξεων πέρα από την απλή διαδικασία απομνημόνευσης. Οι μαθητές/τριες που κατακτούν αυτή τη διαδικασία μετάφρασης είναι καλύτερα προετοιμασμένοι/ες να ερμηνεύουν λεκτικά προβλήματα και να κατασκευάζουν εξισώσεις σε πιο σύνθετα πλαίσια.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Αυτή η εργασία αποκαλύπτει χαρακτηριστικές παρανοήσεις σε διαφορετικά επίπεδα. Στο μέρος β (3 λιγότερο από x), πολλοί μαθητές/τριες αντιστρέφουν εσφαλμένα τη σειρά και γράφουν 3 − x, ερμηνεύοντάς το ως «3 μείον x» αντί για το επιθυμητό x − 3. Αυτό υποδεικνύει δυσκολία στην αναγνώριση της κατεύθυνσης των σχέσεων σε λεκτικές δομές. Ένα λάθος είναι η σύγχυση μεταξύ τετραγώνου και διπλασιασμού, η οποία συχνά γίνεται.
Συλλογικά, αυτά τα λάθη υποδεικνύουν αν οι μαθητές/τριες μπορούν να αναλύσουν τη λεκτική δομή, να σεβαστούν την αλγεβρική σύνταξη και να κατανοήσουν τις τυπικές μαθηματικές συμβάσεις.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Για να ενισχυθεί αυτή η δεξιότητα, η διδασκαλία θα πρέπει να επικεντρώνεται στη δομή της γλώσσας σε σχέση με τη συμβολική μορφή. Η ρητή διδασκαλία φράσεων όπως «λιγότερο από», «περισσότερο από», «το γινόμενο του» και «το τετράγωνο του» είναι απαραίτητη, ιδανικά με παραδείγματα αντίθεσης. Οι οπτικοί οργανωτές που συνδυάζουν φράσεις με αλγεβρικές μορφές μπορούν να βοηθήσουν στην απομνημόνευση και την κατανόηση της δομής. Τέλος, η ενθάρρυνση των μαθητών να εκφράσουν λεκτικά τις εκφράσεις τους («x μείον 3 σημαίνει ότι ξεκινάω με x και αφαιρώ 3») προάγει την αναστοχαστική ακρίβεια και συνδέει τη γλώσσα πιο σταθερά με τη μαθηματική σημασία.

Άσκηση 1.3: Δόμηση μιας έκφρασης από μια γραπτή περιγραφή πολλών βημάτων

Η Λάουρα έχει 10 βιβλία περισσότερα από την Τζένη.
Ο Κέβιν έχει διπλάσια βιβλία από τη Λάουρα.
Εάν τα βιβλία της Τζένης είναι n, πόσα είναι τα βιβλία του Κέβιν;

- ☐ $10 + n$
- ☐ $10 + n + 2$
- ☑ $2 \cdot (n + 10)$
- ☐ $2 \cdot n + 10$

Λύση

Πρώτη λύση, για έναν μαθητή που συνηθίζει να δουλεύει με μεταβλητές:

Βήμα 1 Η Τζένη έχει n βιβλία

Βήμα 2 Η Λάουρα έχει 10 βιβλία περισσότερα από την Τζένη, οπότε η Λάουρα έχει n+10 βιβλία

Βήμα 3 Ο Κέβιν έχει διπλάσια βιβλία από τη Λάουρα, οπότε ο Κέβιν έχει 2·(n+10) βιβλία.

Δεύτερη λύση, βασισμένη σε άτυπο συμβολισμό:

Λάουρα = Τζένη + 10

Κέβιν = $2 \cdot$ Λάουρα = $2 \cdot (\text{Τζένη} + 10) = 2 \cdot (n + 10)$

Τρίτη λύση, βασισμένη σε δοκιμές με έναν αριθμό και στη συνέχεια γενίκευση:

Ας υποθέσουμε ότι η Τζένη έχει 17 βιβλία. Τότε η Λάουρα έχει 17+10=27 βιβλία και ο Κέβιν έχει 2·27=54 βιβλία.
Ο αριθμός 17 κρύβεται στο 27 και η απάντηση 2·27=2·(17+10).
Γενικεύοντας αντικαθιστώντας το 17 με n, παίρνουμε την απάντηση 2·(n+10).

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να μετατρέψουν μια λεκτική περιγραφή δύο βημάτων σε συμβολική έκφραση. Το πρόβλημα περιγράφει ότι η Τζένη έχει x βιβλία, η Λάουρα έχει 10 περισσότερα από την Τζένη και ο Κέβιν έχει διπλάσια από τη Λάουρα. Για να λύσουν σωστά την άσκηση, οι μαθητές/τριες πρέπει να αναγνωρίσουν ότι η ποσότητα της Λάουρα εκφράζεται ως n + 10 και στη συνέχεια να εφαρμόσουν τον πολλαπλασιασμό για να βρουν το σύνολο του Κέβιν, καταλήγοντας στην έκφραση 2 · (n + 10). Αυτό απαιτεί προσοχή τόσο στην ακολουθία των σχέσεων όσο και στον δομικό ρόλο της ομαδοποίησης στις αλγεβρικές εκφράσεις (αυτό γίνεται με παρενθέσεις).

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα κατασκευής συμβολικών εκφράσεων από περιγραφές σχέσεων είναι θεμελιώδης στην άλγεβρα. Αποδεικνύει την ικανότητα ενός/μιας μαθητή/τριας να εντοπίζει λειτουργικές εξαρτήσεις και να τις κωδικοποιεί δομικά με βάση τον ρόλο των παρενθέσεων. Στο πλαίσιο του DiToM, μια τέτοια εργασία αντιπροσωπεύει μια βασική μαθηματική δεξιότητα, διότι απαιτεί τον συντονισμό πολλαπλών ποσοτήτων και πράξεων και υποστηρίζει τη μετάβαση από την αριθμητική συλλογιστική στην αλγεβρική γενίκευση. Δουλεύοντας με αφηρημένες θέσεις και ένθετες πράξεις, οι μαθητές/τριες αρχίζουν να σκέφτονται με όρους σχέσεων μεταξύ μεταβλητών—ένα ουσιαστικό βήμα προς τη μοντελοποίηση, την επίλυση εξισώσεων και τη λειτουργική συλλογιστική.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Ένα συνηθισμένο λάθος είναι ότι οι μαθητές/τριες απλοποιούν τη δομή πρόωρα γράφοντας την έκφραση 2n + 10 αντί της σωστής 2 · (n + 10), υποδεικνύοντας ότι δεν έλαβαν υπόψη την προτεραιότητα του πολλαπλασιασμού έναντι της πρόσθεσης. Άλλοι/ες μπορεί να σταματήσουν μετά την πρώτη σχέση και απλώς να γράψουν n + 10, αντιπροσωπεύοντας τα βιβλία της Λάουρα αντί του Κέβιν. Ένα συχνό σημείο παρερμηνείας 10+v+2 έγκειται επίσης στην ερμηνεία του «διπλάσιου αριθμού» ως ξεχωριστής αύξησης αντί για πολλαπλασιασμό ή στην αγνόηση της προτεραιότητας του πολλαπλασιασμού σε σχέση με την πρόσθεση, κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε παρερμηνεία του επιδιωκόμενου υπολογισμού. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές/τριες μπορεί να συγχέουν τους χαρακτήρες ή τη ροή των πληροφοριών, υποδεικνύοντας ότι δυσκολεύονται να εξάγουν ή να συγκρατήσουν πολλαπλές σχεσιακές δηλώσεις από το κείμενο. Αυτές οι δυσκολίες υποδεικνύουν κενά στην δομική κατανόηση, ειδικά όταν συνδυάζουμε την προσθετική και την πολλαπλασιαστική συλλογιστική σε συμβολική μορφή.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Οι μαθητές/τριες επωφελούνται από τη ρητή λεκτική ανάλυση των σχέσεων, καθοδηγούμενοι από ερωτήσεις όπως «Τι έχει η Λάουρα σε σχέση με τα βιβλία της Τζένης;» και «Τι κάνει ο Κέβιν με το ποσό της Λάουρα;» Η χρήση οπτικών βοηθημάτων, όπως διαγράμματα σχέσεων ή πλαίσια, βοηθά να γίνουν αυτές οι συνδέσεις πιο απτές. Επιπλέον, η εξάσκηση της μετάφρασης από λεκτική σε συμβολική μορφή με απλούστερες μονοβάθμιες σχέσεις χτίζει αυτοπεποίθηση πριν από τον συνδυασμό βημάτων. Η διδασκαλία θα πρέπει επίσης να αναφέρεται ρητά στη χρήση των παρενθέσεων, αντιπαραβάλλοντας εκφράσεις όπως 2n + 10 και 2 · (n + 10) με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα (π.χ. με ένα υπολογιστικό φύλλο) για να καταδείξει τον αντίκτυπο της δομής. Η ενθάρρυνση των μαθητών/τριών να διατυπώνουν τη συλλογιστική τους δυνατά βοηθά στην ενίσχυση τόσο της λειτουργικής λογικής όσο και της αλγεβρικής σημασίας.

Άσκηση 1.4: Κατασκευή μιας έκφρασης από μια γραπτή περιγραφή

Μια παρέα 13 φίλων πηγαίνει στον κινηματογράφο.
Ο καθένας πληρώνει ένα εισιτήριο x € και αγοράζει ποπ κορν αξίας 3,20 €.
Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις υποδηλώνει την τιμή που πληρώθηκε από όλη την ομάδα?

- ☐ $13 + (x + 3{,}20)$
- ☐ $x \cdot (13 + 3{,}20)$
- ☐ $13 \cdot x + 3{,}20$
- ☑ $13 \cdot (x + 3{,}20)$

Λύση

Πρώτη λύση: Κάθε άτομο πληρώνει x+3,20 και 13 άτομα πληρώνουν 13 φορές όσα πληρώνει ένα άτομο. Άρα η απάντηση είναι 13·(x+3,20).

Δεύτερη λύση, βασισμένη σε δοκιμές με έναν αριθμό και γενίκευση:
Ας υποθέσουμε ότι ένα εισιτήριο κοστίζει 5 €.
Κάθε άτομο πληρώνει ένα εισιτήριο 5 € και αγοράζει ποπ κορν αξίας 3,20 €, άρα κάθε άτομο πληρώνει 8,20 €.
13 άτομα πληρώνουν 13 φορές αυτό το ποσό: 13·8,20. Αυτό το προϊόν δεν χρειάζεται να υπολογιστεί, αυτό που είναι σημαντικό είναι τι συνέβη στον επιλεγμένο αριθμό 5: 13·8,20=13·(5+3,20)=13·(x+3,20).

Η δεύτερη λύση μπορεί επίσης να εκτελεστεί ως εξής («ακολούθησε τον αριθμό»):

Με αριθμούς	Με μεταβλητή
$5 + 3{,}20$	$x + 3{,}20$
$13 \cdot (5 + 3{,}20)$	$13 \cdot (x + 3{,}20)$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να μετατρέψουν μια λεκτική περιγραφή σε μια δομημένη αλγεβρική έκφραση. Το πλαίσιο παρουσιάζεται γραπτώς: 13 φίλοι αγοράζουν ο καθένας ένα εισιτήριο κινηματογράφου για x ευρώ και ξοδεύουν επιπλέον 3,20€ σε ποπ κορν. Το συνολικό κόστος για την ομάδα πρέπει να αντιπροσωπεύεται από μια έκφραση που συνδυάζει και τα δύο συστατικά – το μεταβλητό και το σταθερό – και πολλαπλασιάζει το πλήρες ατομικό κόστος με τον αριθμό των ατόμων. Η σωστή έκφραση είναι επομένως 13 · (x + 3,20). Για να επιλέξουν τη σωστή λύση, οι μαθητές/τριες πρέπει τόσο να κατανοήσουν τη αφηγηματική δομή όσο και να καταλάβουν πώς να μοντελοποιήσουν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση μέσω του πολλαπλασιασμού χρησιμοποιώντας παρενθέσεις.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η αναπαράσταση καταστάσεων ως αλγεβρικών εκφράσεων αντικατοπτρίζει μια βασική ικανότητα στη μαθηματική μοντελοποίηση. Αυτή η εργασία αποτελεί παράδειγμα μιας θεμελιώδους μετάβασης από την αριθμητική συλλογιστική στην αλγεβρική δομική: αντί να υπολογίζουν ή να εκτιμούν, οι μαθητές/τριες καλούνται να γενικεύσουν και να αναπαραστήσουν μια σχέση. Σύμφωνα με το DiToM, αυτή η ικανότητα διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη της λειτουργικής σκέψης, της δομικής επίγνωσης και της ευέλικτης κατανόησης της χρήσης των μεταβλητών. Υποστηρίζει επίσης τη βαθιά κατανόηση των πράξεων, της ομαδοποίησης και της επιμεριστικής ιδιότητας – δεξιότητες απαραίτητες για τον χειρισμό εκφράσεων και εξισώσεων.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Πολλοί/ές μαθητές/τριες τείνουν να παραβλέπουν την ανάγκη για παρενθέσεις και επιλέγουν εκφράσεις όπως 13x + 3,20. Άλλοι/ες μπορεί να αντιστρέψουν τον πολλαπλασιασμό, επιλέγοντας x + 13 · 3,20 ή να αναπαραστήσουν εσφαλμένα μόνο ένα μέρος της κατάστασης. Αυτές οι παραπλανητικές επιλογές έχουν σχεδιαστεί σκόπιμα για να αποκαλύψουν συγκεκριμένες παρανοήσεις: για παράδειγμα, την αποτυχία εφαρμογής της επιμεριστικής ιδιότητας ή τη λανθασμένη ερμηνεία του τρόπου με τον οποίο μοντελοποιείται η επανάληψη κόστους στην άλγεβρα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές/τριες επιλέγουν επίσης την αριθμητικά απλούστερη επιλογή χωρίς να αναλύσουν το νόημά της, υποδηλώνοντας επιφανειακή ανάγνωση ή εξάρτηση από ευρετικές αντί για σχεσιακή συλλογιστική.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Για να ενισχυθεί η κατανόηση των μαθητών/τριών, μπορεί να είναι χρήσιμο να οπτικοποιήσουν το σενάριο χρησιμοποιώντας πίνακες ή διαγράμματα, δείχνοντας μια γραμμή ανά άτομο και αθροίζοντας τα κόστη ανά στήλη. Η μοντελοποίηση παρόμοιων εργασιών – όπως «κάθε άτομο πληρώνει x€ και y€, πόσο είναι το σύνολο για n άτομα;» – οδηγεί σε εξοικείωση με τις δομές ομαδοποίησης. Η έμφαση στη χρήση παρενθέσεων μέσω προφορικών φράσεων («όλο το πράγμα ανά άτομο, μετά επί 13») βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να μεταφέρουν λεκτικές δομές σε αλγεβρική μορφή. Επιπλέον, οι συζητήσεις που συγκρίνουν τις δεδομένες επιλογές και αξιολογούν τι αντιπροσωπεύει κάθε έκφραση μπορούν να βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να αναπτύξουν μεταγνωστικές στρατηγικές για την ερμηνεία των συμβολικών επιλογών. Επίσης ενθαρρύνετε τον/την μαθητή/τρια (που δεν ξέρει πώς να ξεκινήσει) να ξεκινήσει δοκιμάζοντας με οποιονδήποτε αριθμό έχει επιλέξει ο/η ίδιος/α.

Άσκηση 1.5: Δόμηση μιας έκφρασης από μια γραπτή περιγραφή πολλών βημάτων

Για να κάνουμε ένα υπολογισμό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Επιλέγω έναν αριθμό x
- Προσθέτω 4 στο x
- Πολλαπλασιάζω το αποτέλεσμα με 8

Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις περιγράφει τον υπολογισμό;

- ☐ $8 \cdot x + 4$
- ☐ $x + 4 \cdot 8$
- ☑ $(x + 4) \cdot 8$
- ☐ $(8 \cdot 4) + x$

Λύση

Πρώτη λύση, σε δύο βήματα.

Βήμα 1 Προσθέτοντας 4 στο x, προκύπτει το αποτέλεσμα x+4

Βήμα 2 Πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα x+4 με το 8, προκύπτει η απάντηση 8·(x+4)=(x+4)·8.

Δεύτερη λύση, βασισμένη σε δοκιμές με έναν αριθμό και γενίκευση: Ας υποθέσουμε ότι x=17.

Βήμα 1 Προσθέτοντας το 4 στο 17, το αποτέλεσμα είναι 17+4=21

Βήμα 2 Πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα 21 επί 8 δίνει την απάντηση 21·8.

Βήμα 3 Αναλύστε τι συνέβη στο 17: 21·8=(17+4)·8=(x+4)·8.

Όπως και στη λύση προηγούμενης άσκησης, μπορούμε επίσης να «ακολουθήσουμε τον αριθμό» για να βρούμε την απάντηση:

Με αριθμούς	Με μεταβλητή
$17 + 4$	$x + 4$
$8 \cdot (17 + 4)$	$8 \cdot (x + 4)$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση ζητά από τους/τις μαθητές/τριες να αναπαραστήσουν έναν διαδοχικό υπολογισμό—συγκεκριμένα, να εκφράσουν συμβολικά το αποτέλεσμα της πρόσθεσης του 4 στο x και στη συνέχεια τον πολλαπλασιασμό του αποτελέσματος επί 8. Αν και οι προφορικές οδηγίες αναφέρουν επιπλέον βήματα, οι επιλογές απαντήσεων αναφέρονται μόνο σε αυτήν την πρώτη σειρά πράξεων. Η σωστή έκφραση σε αυτό το μειωμένο πλαίσιο είναι $(x + 4) \cdot 8$, η οποία απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να διατηρήσουν τη σειρά των πράξεων ομαδοποιώντας το $x + 4$ πριν εφαρμόσουν τον πολλαπλασιασμό.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η κατανόηση και η αναπαράσταση της ιεραρχικής δομής των πράξεων είναι μια θεμελιώδης δεξιότητα στην άλγεβρα. Επιτρέπει στους/τις μαθητές/τριες να μετακινηθούν από την ερμηνεία της αριθμητικής βήμα προς βήμα στην οργάνωση αυτών των βημάτων σε δομημένη συμβολική μορφή. Σύμφωνα με το DiToM, αυτό αποτελεί μέρος της ανάπτυξης συμβολικών ικανοτήτων μοντελοποίησης, ειδικά της χρήσης παρενθέσεων για τη διευκρίνιση της προτεραιότητας των πράξεων. Αυτό δεν είναι μόνο ζωτικής σημασίας για την ορθή αξιολόγηση των εκφράσεων, αλλά και για την οικοδόμηση αυτοπεποίθησης στον χειρισμό τύπων και την επίλυση εξισώσεων αργότερα.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασίαq

Οι λανθασμένες απαντήσεις επιλέγονται προσεκτικά για να αποκαλύψουν συγκεκριμένες παρερμηνείες. Για παράδειγμα, το $8 \cdot x + 4$ αντιπροσωπεύει το σφάλμα της εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού πολύ νωρίς και στη συνέχεια της εσφαλμένης πρόσθεσης του 4, παραβλέποντας τη σωστή ομαδοποίηση. Η επιλογή $x + 4 \cdot 8$ δείχνει γραμμική ανάγνωση και εσφαλμένη προτεραιότητα, όπου οι μαθητές/τριες εφαρμόζουν τον πολλαπλασιασμό πριν από την πρόσθεση χωρίς παρενθέσεις. $8 \cdot 4 + x$ αγνοεί εντελώς τη δομή, υποδηλώνοντας μια επιφανειακή εστίαση στους αριθμούς που εμπλέκονται αντί για τη σχέση. Αυτές οι επιλογές απαντήσεων δεν είναι τυχαίες—σηματοδοτούν αν ένας/μία μαθητής/τρια καταλαβαίνει πώς οι παρενθέσεις επηρεάζουν τη σειρά των πράξεων και αν μπορεί να αναλύσει δομικά, αντί για διαδοχικά, λεκτικές οδηγίες πολλών βημάτων.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Η υποστήριξη θα πρέπει να στοχεύει στην ενίσχυση της επίγνωσης του ρόλου των παρενθέσεων από τους/τις μαθητές/τριες και της κατανόησής τους για την προτεραιότητα των πράξεων. Μια χρήσιμη προσέγγιση είναι να αφήνουμε τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν φωναχτά κάθε βήμα, και στη συνέχεια να ομαδοποιούμε φυσικά τις εκφράσεις χρησιμοποιώντας κάρτες ή χρωματική κωδικοποίηση. Θα πρέπει να ενθαρρύνονται να συγκρίνουν εκφράσεις όπως $x + 4 \cdot 8$ και $(x + 4) \cdot 8$ με αριθμητικές αντικαταστάσεις (π.χ., $x = 2$) για να ελέγξουν αν η δομή ταιριάζει με την επιδιωκόμενη σημασία. Η εξήγηση του γιατί είναι απαραίτητες οι παρενθέσεις σε αυτό το πλαίσιο υποστηρίζει τη συμβολική συλλογιστική και βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να ξεπεράσουν τη διαδικαστική μετάφραση και να προχωρήσουν σε γνήσια κατανόηση. Επίσης, οι μαθητές/τριες μπορούν να ξεκινήσουν δοκιμάζοντας αριθμούς της επιλογής τους και να γενικεύσουν τον υπολογισμό τους.

Άσκηση 1.6: Αξιολόγηση μιας έκφρασης με αντικατάσταση μεταβλητών

Ποια είναι η τιμή του $1+3x$ για $x=8$?

- ☑ 25
- ☐ 32
- ☐ 39
- ☐ 48

Λύση

Το κλειδί για την επίλυση αυτού του προβλήματος είναι να παρατηρήσουμε ότι το 3x=3·x πρέπει να υπολογιστεί πριν προστεθεί ο αριθμός 1.

Λύση σε ένα βήμα: Θέστε x=8 και υπολογίστε $1 + 3x = 1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$

Λύση σε δύο βήματα: Θέστε x=8. Πρώτα υπολογίζουμε 3x = 3·8 = 24. Μετά υπολόγισε 1+24=25.
Για να έχουμε μια καλύτερη επισκόπηση των υπολογισμών σε δύο βήματα, μπορούμε να τους παρουσιάσουμε σε ξεχωριστές γραμμές:

$x = 8$

$3x = 3 \cdot x = 3 \cdot 8 = 24$

$1 + 3x = 1 + 24 = 25$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να υπολογίζουν την τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης αντικαθιστώντας μια δεδομένη τιμή για τη μεταβλητή και εφαρμόζοντας τη σωστή σειρά πράξεων. Συγκεκριμένα, στους/τις μαθητές/τριες δίνεται η παράσταση 1 + 3x και πρέπει να υπολογίσουν την τιμή της για x = 8. Αναγνωρίζοντας ότι το 3x σημαίνει 3 φορές x, η σωστή διαδικασία είναι να πολλαπλασιάσουμε πρώτα:

1+3·8=1+24=25

Οι μαθητές/τριες πρέπει να αντικαταστήσουν σωστά τη μεταβλητή και στη συνέχεια να εκτελέσουν τις πράξεις στη σωστή σειρά, σεβόμενοι/ες την προτεραιότητα των πράξεων.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η αντικατάσταση είναι μια από τις πιο θεμελιώδεις διεργασίες στην άλγεβρα και αποτελεί γέφυρα μεταξύ των συμβολικών εκφράσεων και του αριθμητικού συλλογισμού. Στο πλαίσιο του DiToM, η αξιολόγηση εκφράσεων με αντικατάσταση τιμών βοηθά στην ανάπτυξη λειτουργικής ευχέρειας, κατανόησης συμβόλων και αυτοπεποίθησης με τη χρήση μεταβλητών. Αυτές οι δεξιότητες είναι θεμελιώδεις για την ενασχόληση με συναρτήσεις, τη δημιουργία πινάκων και γραφημάτων και την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου αλγεβρικά. Προωθεί επίσης μια ευέλικτη κατανόηση της μαθηματικής δομής, ειδικά τη σχέση μεταξύ των συμβόλων, των πράξεων και της σημασίας τους.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Συνηθισμένα λάθη περιλαμβάνουν την παρερμηνεία της δομής της έκφρασης ή την εσφαλμένη εφαρμογή της σειράς των πράξεων. Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να υπολογίσουν 1 + (3 + 8) = 12, παρερμηνεύοντας το 3x ως 3 + x αντί για 3 επί x. Άλλοι μπορεί να αξιολογήσουν εσφαλμένα το 3x ως 38 (συνενώνοντας το 3 και το 8), κάτι που αντανακλά συμβολική παρερμηνεία και όχι λάθος υπολογισμού. Οι μαθητές/τριες που επέλεξαν το 32 μπορεί να πρόσθεσαν πρώτα το 1 έως το 8 και μετά πολλαπλασίασαν το άθροισμα επί 3: (1 + 8) · 3 = 27 ή να παρερμήνευσαν τον όρο ως (1 + 3) · 8 = 32, εισάγοντας ακούσια παρενθέσεις. Η επιλογή του 39 ή του 48 μπορεί να υποδηλώνει εσφαλμένη διπλασιασμό, αυθαίρετη εκτίμηση ή πλήρη αδιαφορία για την τάξη. Αυτές οι λανθασμένες επιλογές αποκαλύπτουν αν οι μαθητές/τριες κατανοούν πώς λειτουργούν οι μεταβλητές μέσα στις παραστάσεις και πώς λειτουργεί η σειρά των πράξεων χωρίς παρενθέσεις.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Η διδασκαλία θα πρέπει να επικεντρώνεται στην ανάγνωση των αλγεβρικών εκφράσεων δομικά και όχι διαδικαστικά. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να υποστηρίξουν τη μάθηση ενθαρρύνοντας τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν λεκτικά παραστάσεις («ένα συν τρεις φορές x») και να τις συνδέσουν με αριθμητική αξιολόγηση. Η χρήση πινάκων αντικατάστασης που διαχωρίζουν σαφώς κάθε λειτουργία βοηθά στη διευκρίνιση της δομής. Δραστηριότητες σύγκρισης, όπως η αξιολόγηση τόσο του 1 + 3x όσο και του (1 + 3)x, βοηθούν να τονιστεί πώς οι παρενθέσεις αλλάζουν το νόημα, ενώ τα δυναμικά εργαλεία μπορούν να επιτρέψουν στους/τις μαθητές/τριες να δοκιμάσουν διάφορες τιμές διαδραστικά. Η ενίσχυση της σειράς των πράξεων μέσω δομημένης εξάσκησης, ειδικά σε περιπτώσεις χωρίς παρενθέσεις, υποστηρίζει τη μακροπρόθεσμη ακρίβεια και ευχέρεια.

Άσκηση 1.7: Εύρεση της λύσης μιας γραμμικής εξίσωσης

Η ισότητα 7x+3=80 επαληθεύεται για

- ☐ $x = 7$
- ☐ $x = 8$
- ☐ $x = 10$
- ☑ $x = 11$

Λύση

Πρώτη λύση, βασισμένη στον έλεγχο και των τεσσάρων αριθμών:

x	7	8	10	11
$7x + 3$	$49 + 3 = 52$	$56 + 3 = 59$	$70 + 3 = 73$	$77 + 3 = 80$

Ταιριάζει τον δοσμένο αριθμό 80 στην εξίσωση

Δεύτερη λύση, βασισμένη στον υπολογισμό του 7x+3 με μερικούς από τους προτεινόμενους αριθμούς:
Μπορούμε να ξεκινήσουμε με οποιονδήποτε από τους τέσσερις αριθμούς, για παράδειγμα x=10 που δίνει τον απλό υπολογισμό

$7x + 3 = 7 \cdot 10 + 3 = 70 + 3 = 73$ (δεν ταιριάζει με το 80)

Η απάντηση 73 είναι μικρότερη από 80, οπότε χρειαζόμαστε έναν αριθμό μεγαλύτερο από 10. Ο μόνος τέτοιος αριθμός ανάμεσα στους τέσσερις είναι το x=11 που δίνει τον υπολογισμό

$7x + 3 = 7 \cdot 11 + 3 = 77 + 3 = 80$ (ταιριάζει με τον δοσμένο αριθμό 80 στην εξίσωση)

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η σωστή απάντηση είναι x=11.
Τρίτη λύση, συμβολική επίλυση (σύντομη εκδοχή):

$7x + 3 = 80$ (αφαίρεση με το 3)

$7x = 77$ (διαίρεση με το 7)

$$x = \frac{77}{7} = 11$$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση αξιολογεί αν οι μαθητές/τριες κατανοούν την έννοια της γραμμικής εξίσωσης και μπορούν να προσδιορίσουν αν ένας δεδομένος αριθμός είναι λύση αντικαθιστώντας τιμές. Οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με την εξίσωση 7x + 3 = 80 και τους ζητείται να προσδιορίσουν την τιμή του x που κάνει αυτή την πρόταση αληθή. Η σωστή απάντηση είναι x = 11, καθώς αντικαθιστώντας αυτή την τιμή προκύπτει μια αληθής ισότητα:

7·11+3=80

Για να απαντήσουν σωστά, οι μαθητές πρέπει όχι μόνο να κάνουν τον υπολογισμό, αλλά και να κατανοήσουν ότι μια λύση μιας εξίσωσης είναι ένας αριθμός που εξισορροπεί και τις δύο πλευρές.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η κατανόηση των εξισώσεων ως δηλώσεων ισότητας και η γνώση του τρόπου επαλήθευσής τους είναι θεμελιώδης για την άλγεβρα. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτή η ικανότητα ανήκει στον τομέα της συμβολικής ερμηνείας και της συλλογιστικής της ισότητας. Προετοιμάζει τους/τις μαθητές/τριες να λύνουν εξισώσεις συστηματικά και να ελέγχουν αν μια υποψήφια λύση ικανοποιεί μια εξίσωση. Αυτή η κατανόηση υποστηρίζει την ανώτερη αλγεβρική σκέψη και ενισχύει την αίσθηση του αριθμού μέσω της αντίστροφης συλλογιστικής και του λειτουργικού ελέγχου.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να αντικαθιστούν τις τιμές μηχανικά, αλλά και να κάνουν λάθη υπολογισμού κατά την αξιολόγηση του 7x + 3. Άλλοι/ες μπορεί να παρερμηνεύσουν τι ζητά η εξίσωση, ερμηνεύοντας την έκφραση ως μια εργασία υπολογισμού αντί για μια υπόθεση. Ένα κοινό λάθος είναι η επιλογή του x = 10, απλώς επειδή «φαίνεται κοντά», κάτι που υποδηλώνει εκτίμηση αντί για συλλογισμό. Κάποιοι μπορεί να επιλέξουν x = 8 ή x = 7 με βάση την εικασία ή την ατελή αντικατάσταση, πιθανώς σταματώντας μόλις η αριστερή πλευρά φαίνεται κοντά στο 80. Ή αντικαθιστώντας το x με το 7 ως ψηφίο ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα. Αυτά τα λάθη αποκαλύπτουν κενά στην κατανόηση της έννοιας της ισότητας, καθώς και αδυναμίες στις διαδικασίες αντικατάστασης και στην αριθμητική ακρίβεια.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να καθοδηγούνται μέσω δραστηριοτήτων που τονίζουν τι σημαίνει για μια τιμή να ικανοποιεί μια εξίσωση. Πίνακες αντικατάστασης όπου οι μαθητές/τριες ελέγχουν πολλαπλές τιμές για μια ενιαία εξίσωση βοηθούν στην οικοδόμηση διαίσθησης. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν επίσης να ενθαρρύνουν τον λεκτικό αναστοχασμό («Είναι η αριστερή πλευρά ίση με τη δεξιά πλευρά;») και να προωθήσουν στρατηγικές εκτίμησης παράλληλα με τους ακριβείς υπολογισμούς. Η χρήση μεταφορών ζυγού ή χειριστηρίων υποστηρίζει την εννοιολογική κατανόηση της ισότητας. Τέλος, η παροχή ευκαιριών στους/τις μαθητές/τριες να δημιουργήσουν τις δικές τους εξισώσεις και να δοκιμάσουν τιμές βοηθά στην καλλιέργεια μιας βαθύτερης κατανόησης των σχέσεων των μεταβλητών.

Άσκηση 2.1: Επίλυση ενός προβλήματος αναλογικού συλλογισμού σε ένα πλαίσιο πραγματικού κόσμου

Τα 2 κιλά πατάτες κοστίζουν € 2,40. Πόσο κοστίζουν τα 5 κιλά;

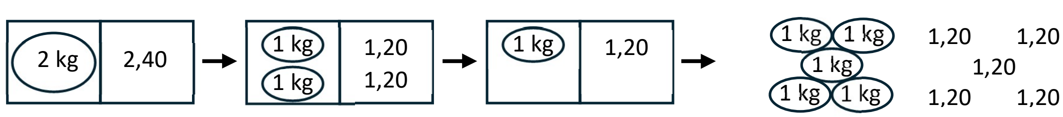
6 €

Λύση

Πρώτη λύση: 2 κιλά κοστίζουν 2,40 €, άρα 4 κιλά κοστίζουν 4,80 €. Ένα επιπλέον κιλό κοστίζει 1,20 €, οπότε 5 κιλά κοστίζουν 4,80+1,20=6 €.

Δεύτερη λύση, βασισμένη στην αναγωγή στη μονάδα: 2 κιλά κοστίζουν 2,40 €, άρα 1 κιλό κοστίζει 1,20 €. 5 κιλά κοστίζουν 5 φορές περισσότερο: 5·1,20=6.

Και οι δύο λύσεις μπορούν να υποστηριχθούν με εικόνες. Για παράδειγμα, όσον αφορά την τελευταία λύση:



Με ημι-τυπικό συμβολισμό:

$2\ \mathrm{kg} : 2{,}40\ €$ (διαίρεση με το 2)
$1\ \mathrm{kg} : 1{,}20\ €$ (πολλαπλασιασμός με το 5)
$5\ \mathrm{kg} : 6\ €$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να εφαρμόσουν πολλαπλασιαστικό συλλογισμό για να λύσουν ένα πρόβλημα αναλογικότητας ενσωματωμένο σε ένα οικείο καθημερινό πλαίσιο. Δεδομένου ότι 2 κιλά πατάτες κοστίζουν 2,40€, οι μαθητές/τριες πρέπει να υπολογίσουν την τιμή για 5 κιλά. Αυτό συνεπάγεται την αναγνώριση μιας σταθερής τιμής ανά κιλό (1,20 € ανά κιλό) και την κλιμάκωση αυτής σε μια νέα ποσότητα. Η σωστή προσέγγιση περιλαμβάνει είτε συλλογισμό με βάση τη μοναδιαία τιμή (διαιρώντας τα 2,40€ με το 2 και πολλαπλασιάζοντας με το 5) είτε τη δημιουργία και επίλυση μιας αναλογίας. Ή ερμηνεύοντας 5=2+2+1 και προσθέτοντας 2,40+2,40+1,20. Η άσκηση ελέγχει όχι μόνο την διαδικαστική ικανότητα, αλλά και την εννοιολογική κατανόηση του πώς αυξάνονται οι ποσότητες σε ευθεία αναλογία.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Ο αναλογικός συλλογισμός είναι ακρογωνιαίος λίθος της μαθηματικής σκέψης. Επιτρέπει στους/τις μαθητές/τριες να ερμηνεύουν και να μοντελοποιούν σχέσεις του πραγματικού κόσμου που περιλαμβάνουν κλιμάκωση, ρυθμούς ανά μονάδα και πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις. Στο DiToM, αυτός ο τύπος εργασίας υποστηρίζει βασικά αναπτυξιακά βήματα προς τη λειτουργική σκέψη και προετοιμάζει τους/τις μαθητές/τριες για προχωρημένα θέματα όπως οι γραμμικές συναρτήσεις και οι υπολογισμοί ποσοστών. Επιπλέον, προάγει την αίσθηση των αριθμών και την ευελιξία στην εφαρμογή διαφορετικών στρατηγικών σε αναλογικές καταστάσεις.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

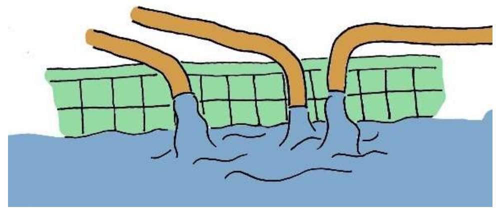
Οι μαθητές/τριες μπορεί να χρησιμοποιούν εσφαλμένα προσθετική συλλογιστική, όπως υπολογίζοντας «2 κιλά → 2,40€, άρα 5 κιλά → 2,40€ + 5€» ή άλλες μη συνεπείς νοητικές συνδέσεις, υποδεικνύοντας ότι δεν κατανοούν τη δομή της αναλογίας. Άλλοι/ες μπορεί να προσπαθήσουν να κλιμακώσουν επί 2 και μετά να αφαιρέσουν (π.χ., 2 κιλά → 2,40€, 4 κιλά → 4,80€, και μετά κάπως να βγάλουν 5 κιλά από εκεί), κάτι που μπορεί να αντικατοπτρίζει τη μερική χρήση στρατηγικών χωρίς να αποκτήσουν τις απαραίτητες προϋποθέσεις. Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες απλώς μαντεύουν μια τιμή που «φαίνεται λογική», κάτι που δείχνει επιφανειακή εξοικείωση με το πλαίσιο, αλλά αδύναμη ποσοτική συλλογιστική. Τα σφάλματα μπορεί επίσης να προκύψουν από ανακριβείς υπολογισμούς ή από τη διαίρεση με λάθος τρόπο (π.χ., διαίρεση του 5 με το 2,40 αντί του αντίστροφου). Αυτά τα μοτίβα υποδεικνύουν κενά στην κατανόηση της μοναδιαίας τιμής ή στην ερμηνεία ποσοτήτων της πραγματικής ζωής.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Η υποστήριξη θα πρέπει να επικεντρώνεται στην οικοδόμηση μιας ισχυρής διαισθητικής και διαδικαστικής κατανόησης της αναλογικότητας. Η χρήση διπλών αριθμητικών αξόνων ή πινάκων αναλογιών επιτρέπει στους/τις μαθητές/τριες να οπτικοποιήσουν τις σχέσεις και να κλιμακώσουν σταδιακά. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να θέσουν ερωτήσεις λεκτικής υποστήριξης, όπως «Πόσο κοστίζει 1 κιλό;» ή «Τι συμβαίνει αν αγοράσεις διπλάσια ποσότητα;» Η ενθάρρυνση πολλαπλών στρατηγικών – μοναδιαίας τιμής, αναλογίας, κλιμάκωσης σε βήματα – βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να αναπτύξουν ευελιξία και συνήθειες ελέγχου λαθών. Η σύνδεση τέτοιων προβλημάτων με πραγματικές εμπειρίες αγορών μπορεί επίσης να ενισχύσει τη συμμετοχή και την κατανόηση.

Άσκηση 2.2: Επίλυση προβλήματος που περιλαμβάνει αντίστροφη αναλογία

Με 4 ίδιες βρύσες χρειάστηκαν 6 ώρες για να γεμίσει μία πισίνα. Πόσες βρύσες χρειάζονται για να γεμίσει η ίδια πισίνα σε 2 ώρες;?



Λύση

Λύση βασισμένη σε αναλογιστική συλλογιστική: Αφού τέσσερις βρύσες γεμίζουν την πισίνα σε 6 ώρες, κάθε βρύση γεμίζει 1/4 της πισίνας σε 6 ώρες, και 1/12 της πισίνας σε 2 ώρες. Συμπεραίνουμε ότι χρειάζονται 12 βρύσες για να γεμίσει η πισίνα σε 2 ώρες.
Για να υποστηρίξει τη συλλογιστική βήμα προς βήμα, αυτή η λύση μπορεί να παρουσιαστεί σε ημισυμβολική σημειογραφία:

$$4 \text{ βρύσες γεμίζουν } 1 \text{ πισίνα σε } 6 \text{ ώρες}$$

$$1 \text{ βρύση γεμίζει το } \frac{1}{4} \text{ της πισίνας σε } 6 \text{ ώρες}$$

$$1 \text{ βρύση γεμίζει το } \frac{1}{12} \text{ της πισίνας σε } 2 \text{ ώρες}$$

$$12 \text{ βρύσες γεμίζουν } 1 \text{ πισίνα σε } 2 \text{ ώρες}$$

Παρόμοια συλλογιστική, βασισμένη σε έναν τύπο: Ο όγκος του νερού που προστέθηκε είναι ανάλογος του (βρυσών)·(χρόνου). Γνωρίζουμε ότι (αγνοώντας τις μονάδες)

$$(4 \text{ βρύσες}) \cdot (6 \text{ ώρες}) = 1 \text{ πισίνα}$$

$$(1 \text{ βρύση}) \cdot (6 \text{ ώρες}) = \frac{1}{4} \text{ πισίνα}$$

$$(1 \text{ βρύση}) \cdot (2 \text{ ώρες}) = \frac{1}{12} \text{ πισίνα}$$

$$(12 \text{ βρύσες}) \cdot (2 \text{ ώρες}) = 1 \text{ πισίνα}$$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία περιλαμβάνει ένα σενάριο πραγματικού κόσμου όπου οι μαθητές/τριες πρέπει να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ χρόνου και ποσότητας σε μια διαδικασία συμπλήρωσης. Συγκεκριμένα, τέσσερις πανομοιότυπες βρύσες γεμίζουν μια πισίνα σε 6 ώρες. Το ερώτημα τώρα είναι: πόσες βρύσες χρειάζονται για να γεμίσουν την ίδια πισίνα σε μόλις 2 ώρες; Για να λύσουν την άσκηση, οι μαθητές/τριες πρέπει να αναγνωρίσουν ότι όσο πιο γρήγορα πρέπει να ολοκληρωθεί η εργασία, τόσο περισσότερα πατήματα απαιτούνται. Αν και δεν αναφέρεται ρητά, αυτό περιγράφει μια περίπτωση αντίστροφης αναλογίας, όπου η μία ποσότητα αυξάνεται καθώς η άλλη μειώνεται. Μια έγκυρη και προσβάσιμη στρατηγική περιλαμβάνει τη οργάνωση των γνωστών και επιθυμητών τιμών σε έναν πίνακα ή σε ένα διάγραμμα αναλογίας:

Πλήθος βρυσών	Χρόνος (σε ώρες)
4	6
?	2

Από εδώ, οι μαθητές/τριες μπορούν να συλλογιστούν ότι αφού ο χρόνος διαιρέθηκε δια 3 (από 6 σε 2 ώρες), ο αριθμός των βρυσών πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί 3, οδηγώντας σε: $4 \cdot 3 = 12$ βρύσες
Αυτή η στρατηγική τονίζει τη σχεσιακή σκέψη και υποστηρίζει μια προσέγγιση αναλογιστικής συλλογιστικής χωρίς να επικαλείται φορμαλιστικές ή αφηρημένες μεθόδους.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα κατανόησης των σχέσεων όπου οι ποσότητες αλληλεπιδρούν σε αντίθετες κατευθύνσεις αποτελεί βασικό στοιχείο της ευέλικτης πολλαπλασιαστικής σκέψης. Σε αντίθεση με τις ευθείες αναλογίες, οι αντίστροφες σχέσεις απαιτούν ένα διαφορετικό είδος δομικής επίγνωσης. Σύμφωνα με το DiToM, η κατάκτηση αυτού βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να επεκτείνουν τον ποσοτικό τους συλλογισμό και τους/τις προετοιμάζει για προχωρημένα θέματα όπως λεκτικά προβλήματα, ρυθμούς μεταβολής και συναρτησιακή σκέψη. Τέτοιες καταστάσεις καλλιεργούν επίσης τις δεξιότητες των μαθητών/τριών στην μοντελοποίηση και την κατανόηση των σχέσεων του πραγματικού κόσμου χρησιμοποιώντας μαθηματικά εργαλεία.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να παρερμηνεύσουν το σενάριο ως περίπτωση ευθέως ανάλογης σχέσης, υποθέτοντας ότι η μείωση του χρόνου θα πρέπει επίσης να μειώσει τον αριθμό των βρυσών – ενδεχομένως καταλήγοντας σε λανθασμένες απαντήσεις όπως 1 βρύση ή 2 βρύσες. Άλλοι/ες μπορεί να εφαρμόζουν αριθμητικές στρατηγικές ασυνεπώς ή να αντιστρέφουν την αναλογικότητα, διαιρώντας τον αριθμό των βρυσών αντί να τον αυξάνουν. Μια συνηθισμένη παρερμηνεία είναι η αντιμετώπιση της κατάστασης προσθετικά αντί για πολλαπλασιαστικά (π.χ., «Το 2 είναι 4 λιγότερο από το 6, οπότε αφαιρούμε 4 χτυπήματα»). Αυτά τα μοτίβα σηματοδοτούν έλλειψη εξοικείωσης με τις αντίστροφες δομές και τον ρόλο της αύξησης σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Η διδασκαλία μπορεί να ξεκινήσει με οπτικά μοντέλα ή συγκεκριμένα παραδείγματα που δείχνουν πώς περισσότεροι άνθρωποι ή συσκευές που συνεργάζονται ολοκληρώνουν μια εργασία πιο γρήγορα. Η χρήση διπλών αριθμητικών αξόνων ή δομημένων πινάκων όπως ο παραπάνω βοηθά να γίνουν ρητές οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Είναι επίσης χρήσιμο να θέτουμε καθοδηγητικές ερωτήσεις, όπως «Τι συμβαίνει αν χρειαστεί να τελειώσετε σε μισό χρόνο;» ή «Πώς αλλάζει ο χρόνος όταν διπλασιάζετε τον αριθμό των βρυσών;» Η παροχή εργασιών σύγκρισης ανά ζεύγη – μία άμεση, μία αντίστροφη – μπορεί να βοηθήσει στην ανάδειξη δομικών διαφορών. Η ενθάρρυνση των μαθητών/τριών να εξηγούν τη συλλογιστική τους φωναχτά ή να συγκρίνουν διαφορετικές διαδρομές λύσης ενισχύει επίσης την κατανόηση.

Άσκηση 2.3: Αναγνώριση αναλογικών σχέσεων σε πίνακα

Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις η τιμή που πληρώσαμε είναι ανάλογη με τον αριθμό των κέικ που αγοράσαμε; Σημειώστε με Χ την απάντησή σας.

a. Πίνακας 1

Κέικ	1	2	5
Τιμή	5	10	50

☐

b. Πίνακας 2

Κέικ	1	2	5
Τιμή	11	12	15

☐

c. Πίνακας 3

Κέικ	1	2	5
Τιμή	3	6	15

☒

Λύση

Δύο συνηθισμένες στρατηγικές για τον εντοπισμό της ευθείας αναλογίας μεταξύ δύο μεταβλητών:

1) Όταν συγκρίνονται δύο αναλογίες (για παράδειγμα, στον Πίνακα 1: 1:5 και 2:10), οι μεταβλητές θα πρέπει να αλλάζουν με τον ίδιο παράγοντα (στην περίπτωση αυτή 2). Ωστόσο, όταν συγκρίνουμε το 1:5 και το 5:50, οι μεταβλητές αλλάζουν με διαφορετικούς παράγοντες: 5 και 10. Επομένως, ο Πίνακας 1 δεν αντιπροσωπεύει μια αναλογική σχέση.

2) Σε κάθε αναλογία, το πηλίκο των μεταβλητών πρέπει να είναι το ίδιο (για παράδειγμα $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ or $\frac{5}{1} = \frac{10}{2}$).

Σε αυτή την άσκηση, το πηλίκο $\frac{\text{τιμή}}{\text{αριθμός κέικ}}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η τιμή ανά μπισκότο. Στον Πίνακα 1, η τιμή ανά κέικ είναι 5/1 = 5, 10/2 = 5, 50/5 = 10, ανάλογα με το πόσα κέικ αγοράζουμε. Επομένως, ο Πίνακας 1 δεν αντιπροσωπεύει μια αναλογική σχέση.

Πίνακας 1, στρατηγική 1 αναπαρίσταται σε πίνακα:

Παράγοντας		2		2,5	
Κέικ	1		2		5
Τιμή	5		10		50
Παράγοντας		2		5	

Όχι ανάλογα

Πίνακας 1, στρατηγική 2 παρουσιάζεται σε πίνακα:

Κέικ	1	2	5
Τιμή	5	10	50
Παράγοντας	5	5	10

Όχι ανάλογα (διαφορετικές τιμές 5, 5, 10 ανά κέικ)

Στον Πίνακα 2, μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι οι αναλογίες 11:1 και 12:2 δεν είναι ίσες. Επομένως, δεν απαιτείται περαιτέρω εργασία για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι μεταβλητές δεν είναι ανάλογες. Στον Πίνακα 3, η τιμή μονάδας είναι 3 για κάθε αναλογία και επομένως οι μεταβλητές είναι ευθέως ανάλογες.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να αναλύουν δεδομένα σε μορφή πίνακα για να προσδιορίσουν εάν υπάρχει αναλογική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Σε κάθε έναν από τους τρεις πίνακες, οι μαθητές/τριες αναμένεται να εξετάσουν αν η σχέση μεταξύ των στηλών μπορεί να περιγραφεί από έναν σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα, ο οποίος είναι το χαρακτηριστικό που ορίζει την ευθεία αναλογία. Οι μαθητές/τριες πρέπει να επιλέξουν αν τα ποσά του πίνακα είναι ευθέως ανάλογα.

Για να λύσετε αυτό το πρόβλημα με επιτυχία, ακολουθούν μερικά παραδείγματα επίλυσης:

- Ελέγξτε αν τα πηλίκα (π.χ., y : x) είναι σταθερά σε όλες τις γραμμές.
- Ή ελέγξτε αν ο πολλαπλασιασμός χιαστί δίνει ισοδύναμα γινόμενα.
- Ή εντοπίστε αν ισχύει ένας κανόνας όπως «πολλαπλασιάστε επί 3» ή «διπλασιάστε το»

Αυτή η μορφή ανάλυσης απαιτεί προσοχή στη αριθμητική δομή και στα υποκείμενα πολλαπλασιαστικά μοτίβα, όχι μόνο στα επιφανειακά χαρακτηριστικά.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η κατανόηση των αναλογικών σχέσεων αποτελεί θεμελιώδες μέρος της λειτουργικής και αλγεβρικής σκέψης. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτό το έργο υποστηρίζει την ανάπτυξη της σχεσιακής συλλογιστικής, ειδικά την αναγνώριση δομής στα δεδομένα. Η ικανότητα να προσδιορίζουμε αν μια σχέση είναι ανάλογη θέτει τα θεμελιώδη θεμέλια για την ερμηνεία των γραμμικών συναρτήσεων, των προβλημάτων κλιμάκωσης και των γραφικών παραστάσεων. Προωθεί επίσης την ευελιξία στην εργασία με διαφορετικές αναπαραστάσεις—πίνακες, γραφήματα, λεκτικές περιγραφές και εξισώσεις.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να αντιμετωπίζουν τις σχέσεις ως ανάλογες με βάση επιφανειακά στοιχεία (π.χ., «και οι δύο αριθμοί μεγαλώνουν») χωρίς να επαληθεύουν τη σταθερότητα της αναλογίας. Άλλοι/ες μπορεί να συγκρίνουν απόλυτες διαφορές αντί για αναλογίες, συγχέοντας την προσθετική με την πολλαπλασιαστική δομή. Για παράδειγμα, αν και οι δύο τιμές αυξηθούν κατά 2, οι μαθητές/τριες μπορεί να συμπεράνουν εσφαλμένα ότι υπάρχει αναλογικότητα. Σφάλματα μπορεί επίσης να προκύψουν από απρόσεκτους υπολογισμούς (π.χ., εσφαλμένη διαίρεση ή παράλειψη τιμών). Αυτά τα μοτίβα αντανακλούν ανεπαρκείς δεξιότητες στην πολλαπλασιαστική σύγκριση, στην ερμηνεία του ρυθμού μεταβολής και στη συμβολική γενίκευση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές/τριες μπορεί να ταξινομήσουν εσφαλμένα έναν μη αναλογικό πίνακα λόγω της παρουσίας απλών αριθμών ή να διαγράψουν όλους τους πίνακες για να αποφύγουν την ανάλυση. Τέτοιες τάσεις υπογραμμίζουν την ανάγκη για ισχυρότερες στρατηγικές δομής και εμπιστοσύνη στην επαλήθευση.

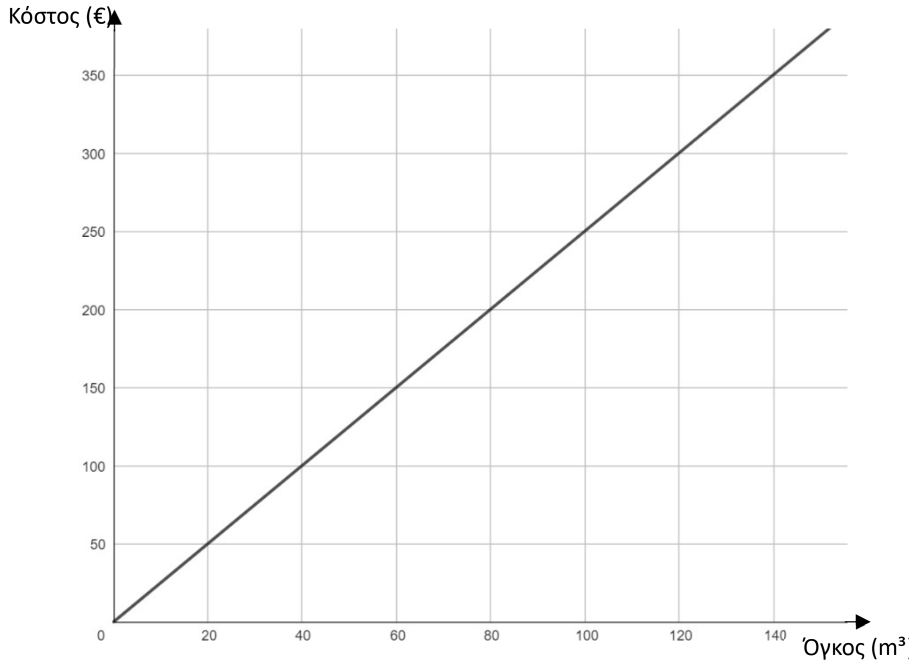
Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Η αποτελεσματική υποστήριξη περιλαμβάνει την παροχή εργαλείων στους/τις μαθητές/τριες για να ελέγχουν την αναλογικότητα συστηματικά, όπως ο υπολογισμός των λόγων γραμμή προς γραμμή, η χρήση ανάλυσης μοναδιαίας τιμής ή οπτικών βοηθημάτων όπως οι διπλές αριθμητικές γραμμές. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δώσουν το παράδειγμα πώς να εξηγούν τα ευρήματα προφορικά ("Επειδή 6 : 2 = 3 και 9 : 3 = 3, ο λόγος είναι σταθερός") και να ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές/τριες να χρησιμοποιούν λίστες ελέγχου κατά την ανάλυση πινάκων. Οι εργασίες συζήτησης σε ζεύγη – όπου οι μαθητές/τριες αιτιολογούν αν τα ποσά ενός πίνακα είναι ανάλογα – μπορούν να εμβαθύνουν την κατανόηση. Η σύνδεση των πινάκων με πραγματικά αναλογικά σενάρια (π.χ. συνταγές, τιμές, ταχύτητες) βοηθά στην εδραίωση της κατανόησης και στην προώθηση της μεταφοράς της σχετικής γνώσης.

Άσκηση 2.4: Εργασία με γραφήματα σε πλαίσιο αναλογιών

Το γράφημα παρουσιάζει τους ακόλουθους άξονες:

- Ο όγκος του νερού (σε m3) στον άξονα x
- Το κόστος (σε ευρώ) στον άξονα y



a) Υπολογίστε πόσα m^3 νερό αγοράζετε με 200€

Απάντηση: ________________

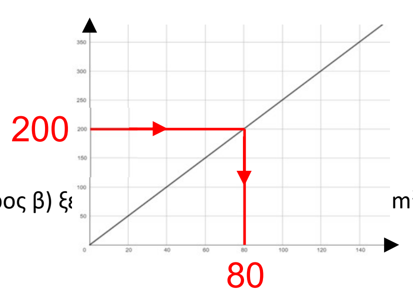
80 m^3

b) Υπολογίστε το κόστος 300 m^3 νερού.

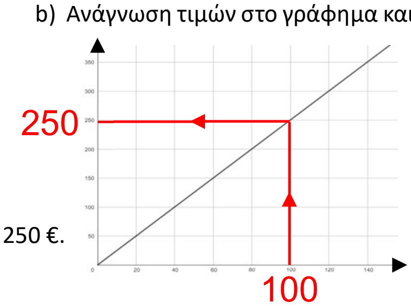
Απάντηση: *750 €*

Λύση

a)



b) Ανάγνωση τιμών στο γράφημα και κλιμάκωση



Στο μέρος β) ξε m^3 κοστίζουν 250 €.

Συνεχίζουμε να υποστηρίζουμε ότι τα 300 m^3 κοστίζουν 3 φορές περισσότερο από τα 100 m^3, και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα 300 m^3 κοστίζουν

$$3 \cdot 250 = 750\ €$$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία δύο ερωτημάτων αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να ερμηνεύουν και να εφαρμόζουν μια γραφική παράσταση που αντιπροσωπεύει μια αναλογική σχέση. Στο ερώτημα α) απαιτείται να διαβάσετε μια τιμή απευθείας από το γράφημα: να προσδιορίσετε πόσα κυβικά μέτρα νερού είναι διαθέσιμα για 200€. Στο ερώτημα β), ο/η μαθητής/τρια πρέπει να προσδιορίσει την τιμή για 300 m^3 νερού – μια τιμή πέρα από το ορατό εύρος της γραφικής παράστασης – και επομένως πρέπει να υπολογίσει με βάση τον ρυθμό μεταβολής που παρατηρείται στη γραφική παράσταση.

Η βασική δεξιότητα έγκειται στη σύνδεση της γραφικής αναπαράστασης με την υποκείμενη αναλογική δομή και στη διάκριση μεταξύ της ανάγνωσης γραφημάτων και της ερμηνείας και εκτίμησης βάσει μοντέλων.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ανάγνωση και η ερμηνεία γραφημάτων είναι μια βασική μαθηματική ικανότητα. Αυτή η εργασία γεφυρώνει την ερμηνεία των οπτικών δεδομένων με τη λειτουργική σκέψη. Σύμφωνα με το DiToM, αυτός ο τύπος δραστηριότητας αναπτύσσει τις εξής δεξιότητες: κατανόησης της κλίσης ως ρυθμό, χρήσης γραφικής παράστασης ως εργαλείο για τη λήψη αποφάσεων, μετάφρασης μεταξύ γραφικών, αριθμητικών και λεκτικών αναπαραστάσεων. Επιπλέον, αυτές οι δεξιότητες υποστηρίζουν τη μαθηματική μοντελοποίηση, ειδικά στην αναγνώριση του πότε τα δεδομένα χρειάζεται να επεκταθούν μέσω αναλογιστικής προσέγγισης αντί μέσω εκτίμησης.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Στο α) ερώτημα, οι μαθητές/τριες μπορεί να διαβάσουν λάθος τους άξονες (π.χ., να ευθυγραμμίσουν λάθος τις τιμές λόγω άγνωστης κλίμακας) ή να παρεμβάλουν εσφαλμένα μεταξύ των σημείων. Αν παρερμηνεύσουν ότι η γραφική παράσταση αντιπροσωπεύει μια συνεχόμενη σχέση, μπορεί να αναφερθούν μόνο σε σημειωμένες τιμές του πλέγματος και να παραλείψουν ενδιάμεσα σημεία. Στο β) ερώτημα, ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να προσπαθήσουν να εξάγουν οπτικά συμπεράσματα παρόλο που η γραφική παράσταση τελειώνει στα 140 m^3, οδηγώντας σε ανακριβείς ή εικαστικές απαντήσεις. Άλλοι/ες μπορεί να μην αναγνωρίσουν τη γραμμική δομή και να επιστρέψουν σε εικασίες ή άσχετες στρατηγικές. Ένα άλλο τυπικό σφάλμα είναι η εσφαλμένη ερμηνεία της κλίσης—για παράδειγμα, η αντίληψη ότι αυξάνεται μη γραμμικά ή αλλάζει απρόβλεπτα πέρα από το ορατό εύρος. Αυτές οι δυσκολίες μπορεί να αντικατοπτρίζουν κενά στην κατανόηση της αναλογικής μεταβολής ή των συμβάσεων ανάγνωσης γραφημάτων (όπως η ίση κλίμακα και η ευθυγράμμιση των γραμμών πλέγματος).

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Η στοχευμένη υποστήριξη θα πρέπει να ξεκινήσει με ασκήσεις ανάγνωσης γραφημάτων με υποστήριξη, οι οποίες καθοδηγούν τους/τις μαθητές/τριες να ευθυγραμμίσουν σωστά τις τιμές και στους δύο άξονες, να αναγνωρίσουν τους σταθερούς ρυθμούς μεταβολής και να χρησιμοποιήσουν χάρακες ή διαφάνειες για να διατηρήσουν τον προσανατολισμό τους. Για την προέκταση (Μέρος Β), η διδασκαλία θα πρέπει να τονίζει πώς να προσδιορίσετε τη μοναδιαία τιμή από τη γραφική παράσταση (π.χ. 1 € ανά m^3 ή 5 € ανά 20 m^3) και στη συνέχεια να επεκτείνετε αυτή τη σχέση αριθμητικά ή μέσω ενός πίνακα. Οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν επίσης να ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν με λέξεις «τι λέει η γραφική παράσταση» (π.χ., «για κάθε 20 κυβικά μέτρα, το κόστος αυξάνεται κατά 50€»), ενισχύοντας τις λεκτικές-αριθμητικές-οπτικές συνδέσεις. Η σύγκριση της γραφικής παράστασης με την αντίστοιχη εξίσωση ή τον πίνακα αναλογίας ενισχύει επίσης την ευέλικτη πρόσβαση στη θεμελιώδη δομή.

Άσκηση 2.5: Επίλυση ενός προβλήματος διαίρεσης σε ένα πραγματικό πλαίσιο

Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 810 λίτρα νερού. Κάθε μέρα αφαιρούνται 30 λίτρα νερού από τη δεξαμενή. Σε πόσες ημέρες θα αδειάσει η δεξαμενή;

Απάντηση: 27 ημέρες

Λύση

Η καθημερινή αφαίρεση 30 λίτρων οδηγεί σε αφαίρεση 30·n λίτρων μετά από n ημέρες.
Πρώτη λύση, βασισμένη στη διαίρεση: Ο αριθμός των ημερών που απαιτούνται μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{810}{30} = \frac{81}{3} = 27$$

Δεύτερη λύση, βασισμένη στον πολλαπλασιασμό. Εδώ αναπαρίστανται σε έναν πίνακα:

#ημερών	1	10	20	7	27
όγκος	30	300	600	210	810

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα επίλυσης ενός προβλήματος διαίρεσης σε χρονικό πλαίσιο, όπου μια συνολική ποσότητα (810 λίτρα νερού) εξαντλείται με σταθερό ημερήσιο ρυθμό (30 λίτρα την ημέρα). Το ερώτημα είναι πόσες ίσες ημερήσιες αντλήσεις χρειάζονται μέχρι η δεξαμενή να αδειάσει εντελώς. Αυτό περιλαμβάνει την ερμηνεία της διαίρεσης ως «πόσες φορές χωράει το 30 στο 810» ή ισοδύναμα:

810 : 30=27 ημέρες

Αυτή η ερμηνεία απαιτεί κατανόηση της επανειλημμένης αφαίρεσης (ή πρόσθεσης) με την πάροδο του χρόνου και την ικανότητα μετάφρασης μιας πραγματικής διαδικασίας σε συμβολική πράξη.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Στο πλαίσιο του DiToM, αυτό το έργο υποστηρίζει βασικές δεξιότητες στην πολλαπλασιαστική συλλογιστική, τη λειτουργική σκέψη και τη βασική αλγεβρική δομική σκέψη. Οι μαθητές/τριες πρέπει να εντοπίσουν την υποκείμενη κανονικότητα («30 λίτρα την ημέρα») και να την επεκτείνουν σε μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία. Αυτό ενισχύει επίσης την κατανόηση των ρυθμών, της χρονολογικής μοντελοποίησης και της ερμηνείας της διαίρεσης σε μη χωρικά, προσανατολισμένα στη διαδικασία πλαίσια. Αυτή η συλλογιστική στηρίζει την μεταγενέστερη μάθηση σε γραμμικές συναρτήσεις, μοτίβα ανάπτυξης και διαφορικές εξισώσεις.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Στην πράξη, πολλοί/ές μαθητές/τριες προσεγγίζουν την εργασία με τις ακόλουθες στρατηγικές:

- Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση: αφαιρώντας το 30 από το 810 ξανά και ξανά και μετρώντας τα βήματα
- Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση: προσθέτοντας 30 κάθε φορά μέχρι να φτάσουμε το 810, και μετά μετρώντας τον αριθμό των βημάτων
- Σφάλματα εκτίμησης: μετάβαση σε πιθανές τιμές, όπως το 30 ή το 25

- Αριθμητικά λάθη κατά την εκτέλεση μακράς διαίρεσης ή τοποθέτηση της υποδιαστολής σε λάθος θέση

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Η υποστήριξη θα πρέπει να επικεντρώνεται στην βοήθεια των μαθητών/τριών να οικοδομήσουν ένα εσωτερικό μοντέλο ίσης διαίρεσης στον χρόνο. Οπτικά υποστηρίγματα όπως ράβδοι χωρισμένες σε ίσα μέρη, αριθμητικές γραμμές ή ημερολόγια μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές/τριες να αναπαραστήσουν την κατάσταση με προτάσεις διαίρεσης και να εξηγήσουν τι αντιπροσωπεύει κάθε αριθμός. Η σύνδεση αυτού του προβλήματος με πραγματικές ρουτίνες (π.χ., ημερήσια κατανάλωση νερού, μερίδες γευμάτων, προϋπολογισμός για μέρες) μπορεί να ενισχύσει την εξοικείωση. Η έμφαση στην στρατηγική ομαδοποίηση, όπως η ομαδοποίηση ανά 10 ημέρες ($10 \cdot 30 = 300$), προάγει την αποτελεσματική συλλογιστική και τον έλεγχο της εκτίμησης.

Άσκηση 2.6: Συνδυάζοντας σταθερά και μεταβλητά κόστη σε ένα πλαίσιο παραγωγής

Ο Σβεν κάλεσε 15 φίλους στο πάρτι γενεθλίων του.
Πρέπει να πληρώσει 50 ευρώ για την αίθουσα παιχνιδιού και επιπλέον 10 ευρώ για κάθε προσκεκλημένο φίλο.
Πόσο θα χρειαστεί να πληρώσει ο Σβεν για τον εορτασμό των γενεθλίων του;

200 €

Λύση

Ο Σβεν πρέπει να πληρώσει 50 ευρώ για την αίθουσα παιχνιδιών, ως αρχικό κόστος.
Επιπλέον, ο Σβεν πρέπει να πληρώσει 10 ευρώ για κάθε έναν από τους 15 φίλους του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα επιπλέον κόστος $15 \cdot 10 = 150$ ευρώ.
Το συνολικό κόστος είναι $50 + 150 = 200$ ευρώ.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να εφαρμόζουν βασικά αλγεβρικά μοντέλα και αριθμητικές πράξεις σε ένα πραγματικό πλαίσιο που περιλαμβάνει σταθερά και μεταβλητά κόστη. Οι μαθητές/τριες γνωρίζουν ότι ο Σβεν ξοδεύει 50€ για μια αίθουσα παιχνιδιού και επιπλέον 10€ για κάθε προσκεκλημένο φίλο. Η εργασία είναι να προσδιορίσουμε το συνολικό κόστος για τον εορτασμό των γενεθλίων.

Η αναμενόμενη στρατηγική είναι να:

1. Υπολογίστε το μεταβλητό κόστος:
   15 αλυσίδες· 10€ = 150€
2. Προσθέστε το σταθερό κόστος:
   150€ + 50€ = 200€ συνολικό κόστος

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Αυτή η δραστηριότητα θέτει σημαντικές βάσεις για τη λειτουργική σκέψη και την πρώιμη άλγεβρα, ιδιαίτερα την έννοια των γραμμικών μοντέλων. Το DiToM υποστηρίζει την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων μοντελοποίησης, λειτουργικής ευχέρειας και την ερμηνεία συμβολικών εκφράσεων σε εφαρμοσμένες καταστάσεις. Η κατανόηση της διάκρισης μεταξύ σταθερών και μεταβλητών στοιχείων είναι κεντρική σε πολλά πραγματικά πλαίσια, όπως ο προϋπολογισμός, η τιμολόγηση και ο σχεδιασμός πόρων. Επιπλέον, αυτή η εργασία ενισχύει την ικανότητα των μαθητών/τριών να δομούν προβλήματα πολλαπλών βημάτων, ένα βασικό χαρακτηριστικό της μαθηματικής επίλυσης προβλημάτων.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Ένα συνηθισμένο λάθος είναι οι μαθητές/τριες να υπολογίζουν μόνο το μεταβλητό κόστος και να παραλείπουν το σταθερό κόστος. Αυτό αποκαλύπτει μια μερική κατανόηση της δομής της εργασίας, όπου λαμβάνεται υπόψη μόνο ένα συστατικό (συχνά το πιο άμεσα υπολογίσιμο). Άλλοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να αντιστρέψουν τα βήματα (π.χ. να αφαιρέσουν 50€ από 150€) ή να παρερμηνεύσουν τον ρόλο κάθε αριθμού. Κάποιοι/ες μπορεί να πολλαπλασιάσουν εσφαλμένα όλες τις τιμές μεταξύ τους ή να επιχειρήσουν άσκοπες πράξεις, κάτι που αντανακλά μια προβληματική ερμηνεία της διατύπωσης του προβλήματος. Αυτά τα λάθη υποδηλώνουν ελλείψεις στην ανάγνωση εργασιών με πολλά βήματα, στην αντιστοίχιση ποσοτήτων του πραγματικού κόσμου σε πράξεις και στην ενσωμάτωση διαφορετικών αριθμητικών στοιχείων σε μια ενιαία, συνεκτική λύση.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να υποστηρίξουν τους/τις μαθητές/τριες παρουσιάζοντας το πρόβλημα οπτικά—για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας έναν πίνακα με δύο σειρές (σταθερή και μεταβλητή) ή διαγραμματίζοντας το συνολικό κόστος ως μια ράβδο χωρισμένη σε δύο μέρη. Η διδασκαλία και εξάσκηση με τη μορφή «σύνολο = σταθερό + μεταβλητό» σε διαφορετικά πλαίσια μπορεί να οδηγήσει στην εξοικείωση με τα γραμμικά μοντέλα. Επιπλέον, η προτροπή των μαθητών/τριών να ξαναδιαβάσουν την ερώτηση και να επαληθεύσουν αν η απάντησή τους περιλαμβάνει «όλα» τα κόστη, ενθαρρύνει τον μεταγνωστικό έλεγχο. Η χρήση προβλημάτων που απομονώνουν τα σταθερά έναντι στα μεταβλητά κόστη πριν από τη συνδυασμό τους μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση βήμα προς βήμα. Τέλος, η διατύπωση της κατάστασης (π.χ., «Πρέπει να πληρώσει 50€ οπωσδήποτε και 10€ επιπλέον για κάθε καλεσμένο») συνδέει τη γλώσσα και τη μαθηματική δομή πιο ξεκάθαρα.

Άσκηση 3.1: Μετατροπή ενός κλάσματος σε ποσοστό

Εκφράστε το κλάσμα $\frac{3}{5}$ ως ποσοστό.

- [ ] 0,6%
- [ ] 6%
- [ ] 35%
- [x] 60%

Λύση

Πρώτη λύση, μέσω ενός κανόνα της αριθμητικής:

$$\frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%,\ \text{so}\ \frac{3}{5} = 3 \cdot 20\% = 60\%$$

Δεύτερη λύση, μέσω του κλάσματος:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Τρίτη λύση, βασισμένη στη διαίρεση:

$$\frac{3}{5} = \frac{3{,}0}{5} = 0{,}6 = 0{,}60 = 60\%$$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να μετατρέψουν ένα οικείο κλάσμα (τρία πέμπτα) σε ποσοστό. Για να το λύσουν, οι μαθητές/τριες πρέπει να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ κλασμάτων και ποσοστών και να αναγνωρίσουν ότι:

3⁄5 = 0,6 = 60%

3/5=60/100=60%

Αυτό περιλαμβάνει είτε τη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό πρώτα (διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή) και στη συνέχεια τον πολλαπλασιασμό με το 100 είτε την εφαρμογή γνωστών ισοδυναμιών κλάσματος-ποσοστού. Η εργασία, επομένως, κινητοποιεί τόσο τις δεξιότητες υπολογισμού όσο και την εννοιολογική κατανόηση των αναλογικών αναπαραστάσεων.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η μετατροπή μεταξύ κλασμάτων, δεκαδικών αριθμών και ποσοστών είναι θεμελιώδης σε πολλά πραγματικά πλαίσια (π.χ., ερμηνεία στατιστικών, εκπτώσεων ή συγκρίσεων δεδομένων). Στο πλαίσιο του DiToM, αυτή η ικανότητα υποστηρίζει την κατανόηση των ρητών αριθμών, την ευελιξία στη χρήση των αριθμών και τη συμβολική μετάφραση. Προετοιμάζει τους/τις μαθητές/τριες για εργασίες που περιλαμβάνουν ποσοστιαία αύξηση, συγκρίσεις και δομές αναλογιών στην άλγεβρα και την κατανόηση δεδομένων. Η εξειδίκευση σε αυτόν τον τομέα οικοδομεί επίσης την αυτοπεποίθηση στην μετακίνηση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων μερών και όλου, κάτι που είναι απαραίτητο σε όλους τους τομείς των μαθηματικών.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Πολλοί/ές μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν εσφαλμένα το κλάσμα ως δεκαδικό ή συγχέουν τους ρόλους του αριθμητή και του παρονομαστή. Για παράδειγμα:

- Η επιλογή του 0,6% υποδηλώνει ότι οι μαθητές παρερμηνεύουν το 0,6 σαν να είναι ήδη ποσοστό
- Η επιλογή του 6% πιθανότατα προέρχεται από τη λάθος μετακίνηση της υποδιαστολής μία φορά.
- Το 35% μπορεί να προκύψει από τη σύγχυση του 3/5.

Αυτά τα σφάλματα υποδεικνύουν σύγχυση μεταξύ των σχετικών τιμών, της μετακίνησης της υποδιαστολής και της σημασίας του τοις εκατό («ανά εκατό»). Αποκαλύπτουν την ανάγκη για ισχυρότερη κατανόηση του πώς οι κλάσματα αντιστοιχίζονται στην εκατονταδική κλίμακα των ποσοστών.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να υποστηρίξουν τους/τις μαθητές/τριες χρησιμοποιώντας οπτικά μοντέλα (π.χ., 100-τετραγωνάκια, κυκλικά διαγράμματα) για να δείξουν πώς κλάσματα όπως το 3/5 αντιστοιχούν σε 60 χρωματισμένα τετραγωνάκια από τα 100. Δομημένες δραστηριότητες που μετατρέπουν κοινά κλάσματα αναφοράς σε ποσοστά (όπως 1/2, 1/4, 3/4, 3/5) μπορούν να οικοδομήσουν την εξοικείωση με αυτά και να εδραιώσουν την κατανόηση.

Η ενθάρρυνση των μαθητών/τριών να μετατρέπουν πάντα πρώτα σε δεκαδικό και μετά να πολλαπλασιάζουν με το 100, παρέχει μια αξιόπιστη ρουτίνα. Οι αριθμητικές γραμμές και οι ράβδοι ποσοστών μπορούν να ενισχύσουν περαιτέρω την ιδέα των ισοδύναμων αναπαραστάσεων. Λεκτικές εξηγήσεις («τρία στα πέντε ισοδυναμούν με πόσα στα εκατό;») βοηθούν στην εδραίωση της αναλογικής σκέψης.

Άσκηση 3.2: Υπολογισμός ποσοστιαίας αύξησης

Αν το 30 αυξηθεί κατά 50%, το αποτέλεσμα είναι:

- ☐ 80
- ☑ 45
- ☐ 35
- ☐ 15

Λύση

Πρώτη λύση, βασισμένη στην ερμηνεία του 50% ως «μισό»: Η αύξηση είναι το μισό του 30, που είναι 15. Το αποτέλεσμα μετά την αύξηση του 30 κατά 15 είναι 30+15=45.

Πιο τυπικά, με διαίρεση:

$$50\% \text{ του } 30 = \frac{30}{2} = 15 \quad \text{Σύνολο: } 30 + 15 = 45.$$

Δεύτερη λύση, βασισμένη στον υπολογισμό της αύξησης κατά 50% με πολλαπλασιασμό: Η αύξηση είναι

$$50\% \text{ του } 30 = 0{,}50 \cdot 30 = 5 \cdot 3 = 15 \quad \text{Σύνολο: } 30 + 15 = 45.$$

Τρίτη λύση, βασισμένη στην ερμηνεία του αποτελέσματος ως 150% του 30:

$$150\% \text{ του } 30 = 1{,}50 \cdot 30 = 15 \cdot 3 = 45$$

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί αν οι μαθητές/τριες είναι σε θέση να ερμηνεύσουν σωστά και να εφαρμόσουν μια ποσοστιαία αύξηση σε μια δεδομένη βασική τιμή. Η αρχική τιμή είναι 30 και η οδηγία είναι να αυξηθεί αυτή η τιμή κατά 50%. Για να καταλήξουν στη σωστή λύση, οι μαθητές/τριες πρέπει να υπολογίσουν πόσο είναι το 50% του 30 και στη συνέχεια να το προσθέσουν στο αρχικό ποσό.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα υπολογισμού και ερμηνείας των ποσοστιαίων αυξήσεων αποτελεί βασική ικανότητα τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και σε προχωρημένα μαθηματικά. Είναι απαραίτητη για την κατανόηση των αλλαγών στις τιμές, της αύξησης του πληθυσμού, του χρηματοοικονομικού ενδιαφέροντος και των στατιστικών συγκρίσεων. Σύμφωνα με το DiToM, η συλλογιστική που σχετίζεται με τα ποσοστά υποστηρίζει την ανάπτυξη της λειτουργικής σκέψης, της αναλογικής συλλογιστικής και την ενσωμάτωση των πολλαπλασιαστικών δομών σε διάφορα πλαίσια. Αυτή η συγκεκριμένη εργασία ενισχύει την ευελιξία των μαθητών/τριών στη μετάβαση μεταξύ προσθετικών και πολλαπλασιαστικών ερμηνειών του ποσοστού και συμβάλλει στην ικανότητά τους να κάνουν γενικεύσεις και να εφαρμόζουν συλλογισμό βασισμένο στη δομή σε ολοένα και πιο αφηρημένα προβλήματα.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Μια συχνή παρερμηνεία που μπορεί να παρατηρηθεί στις απαντήσεις είναι η σύγχυση μεταξύ των απόλυτων τιμών και των σχετικών ποσοστιαίων τιμών. Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί εσφαλμένα να προσθέσουν το 50 στο 30 αντί να υπολογίσουν το 50% του 30, καταλήγοντας στη λανθασμένη απάντηση 80. Αυτό υποδεικνύει μια παρεξήγηση της θεμελιώδους φύσης του ποσοστού ως σχετικής μέτρησης. Άλλοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να επιλέξουν το 15 ως απάντηση, παρερμηνεύοντας την άσκηση ως απλώς να ζητά το 50% του 30, αντί να υπολογίσει την πλήρη αυξημένη τιμή. Άλλοι/ες μπορεί να επιλέξουν το 35 λόγω μικρών υπολογιστικών σφαλμάτων ή ελαττωματικής εκτίμησης κατά τη διάρκεια της νοερής αριθμητικής. Είναι επίσης πιθανό οι μαθητές/τριες να παρερμηνεύσουν τη διατύπωση του προβλήματος, θεωρώντας ότι πρόκειται για αφαίρεση ή διαφορά, ή να βασιστούν στην διαίσθηση αντί για δομημένους υπολογισμούς. Τέτοιες απαντήσεις αποκαλύπτουν κενά στην εννοιολογική κατανόηση, την διαδικαστική αξιοπιστία και την κατανόηση της ανάγνωσης. Μπορεί επίσης να υποδηλώνουν ανεπαρκή εσωτερίκευση των ποσοστιαίων πράξεων ως κλιμακούμενων πολλαπλασιαστικών διεργασιών και την ανάγκη για περισσότερη καθοδηγούμενη πρακτική στη διάκριση μεταξύ μέρους, όλου και ρυθμού ανάπτυξης.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

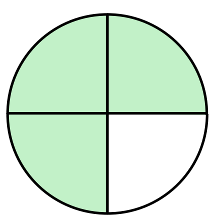
Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να παρέχουν υποστήριξη μοντελοποιώντας καταστάσεις του πραγματικού κόσμου όπου οι αυξήσεις σε ποσοστό συμβαίνουν φυσικά – όπως αυξήσεις τιμών, αυξήσεις μισθών ή αύξηση πληθυσμού – θεμελιώνοντας έτσι τις αφηρημένες έννοιες σε απτές περιπτώσεις. Οπτικά βοηθήματα όπως ράβδοι ποσοστών ή διπλές αριθμητικές γραμμές μπορούν να βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να οπτικοποιήσουν πώς μια αύξηση 50% αυξάνει την αρχική ποσότητα.

Η διδασκαλία για τη διάκριση της βάσης, του ποσοστού και του αποτελέσματος σε ένα δομημένο πλαίσιο μπορεί να αποτρέψει τη σύγχυση και να υποστηρίξει την κατανόηση. Επιπλέον, η χρήση τόσο προσθετικών (π.χ. «βρες το 50% και μετά πρόσθεσε») όσο και πολλαπλασιαστικών (π.χ. «πολλαπλασίασε επί 1,5») στρατηγικών και η ενθάρρυνση των μαθητών/τριών να διασταυρώνουν τα αποτελέσματα μέσω εκτίμησης, συμβάλλει στην προώθηση της στρατηγικής ευελιξίας.

Άσκηση 3.3: Ερμηνεία κυκλικών αναπαραστάσεων και μετατροπή σε ποσοστά

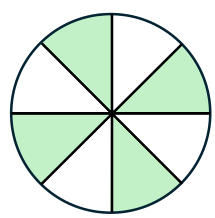
Ένα τμήμα των παρακάτω κύκλων είναι χρωματισμένο. Εκφράστε αυτά τα τμήματα με ποσοστά.

a)



Μέρος του κύκλου: 75 %

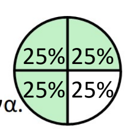
b)



Μέρος του κύκλου: 50 %

Λύση

a) Κάθε ένα από τα τέσσερα μέρη είναι το 25% του κύκλου.
Άρα 3 μέρη είναι το 3·25%=75% του κύκλου.
Αυτή η συλλογιστική μπορεί να υποστηριχθεί σχεδιάζοντας μια εικόνα.

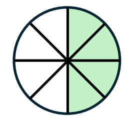


b) Κάθε ένα από τα οκτώ μέρη είναι το 12,5% του κύκλου (το μισό του 25%). Άρα 4 μέρη είναι το 4·12,5%=50% του κύκλου.

Ένας άλλος τρόπος για να λυθεί το πρόβλημα είναι να ερμηνεύσουμε το χρωματισμένο μέρος ως αποτελούμενο από 4 από τις 8 "σφήνες". Επομένως, το χρωματισμένο μέρος είναι 4 σφήνες και το σύνολο είναι 8 σφήνες, κάτι που είτε οδηγεί άμεσα στην ερμηνεία "μισό" = 50%, είτε στον υπολογισμό

$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} = 50\% \,, \qquad (\text{ή όμοια, } \frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 50\%)$$

Η απάντηση 50% μπορεί επίσης να προκύψει αναδιατάσσοντας τις τέσσερις σφήνες έτσι ώστε το «μισό» να εμφανίζεται πιο καθαρά.



Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να ερμηνεύουν μέρη ενός συνόλου από μια οπτική αναπαράσταση—στην προκειμένη περίπτωση, έναν κύκλο χωρισμένο σε ίσα τμήματα—και να μετατρέπουν αυτά τα μέρη σε ποσοστά. Η εργασία εμφανίζεται σε δύο μέρη:

- Το ερώτημα α) δείχνει έναν κύκλο χωρισμένο σε τέσσερις ίσους τομείς, με τους τρεις από αυτούς σκιασμένους.
- Το ερώτημα β) παρουσιάζει έναν κύκλο χωρισμένο σε οκτώ ίσους τομείς, όπου κάθε δεύτερος τομέας είναι σκιασμένος, με αποτέλεσμα τέσσερις σκιασμένοι τομείς από οκτώ.

Και στις δύο περιπτώσεις, η σωστή λύση απαιτεί την αναγνώριση του κλάσματος του κύκλου που είναι σκιασμένο και τη μετατροπή του σε ποσοστό. Αυτή η εργασία περιλαμβάνει τη μετάφραση οπτικών ποσοτήτων σε ρητούς αριθμούς ή κλάσματα και στη συνέχεια σε μορφή ποσοστού, επιδεικνύοντας ευχέρεια σε διάφορες αναπαραστάσεις.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η μετατροπή μεταξύ οπτικών μοντέλων, κλασμάτων και ποσοστών είναι μια κεντρική δεξιότητα στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Υποστηρίζει μια βαθύτερη κατανόηση των σχέσεων μέρους-όλου, του αναλογικού συλλογισμού και της εκτίμησης. Σύμφωνα με το DiToM, εργασίες όπως αυτή ενισχύουν την εννοιολογική ευελιξία και την ικανότητα σύνδεσης μαθηματικών αναπαραστάσεων – ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του μαθηματικού γραμματισμού. Οι δεξιότητες αυτές είναι επίσης σημαντικές σε πραγματικές καταστάσεις, όπως η ερμηνεία διαγραμμάτων, αναπαραστάσεων στατιστικής και δεδομένων, όπου οι σχέσεις μέρους-όλου συχνά ενσωματώνονται οπτικά και εκφράζονται σε ποσοστά.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Ένα κοινό λάθος που παρατηρείται και στα δύο μέρη της εργασίας είναι ότι οι μαθητές/τριες προσδιορίζουν πόσα μέρη είναι σκιασμένα, αλλά στη συνέχεια αναφέρουν εσφαλμένα αυτόν τον αριθμό ως ποσοστό. Για παράδειγμα, στο ερώτημα α), οι μαθητές/τριες μπορεί να απαντήσουν «3» επειδή τρία από τα τέσσερα μέρη είναι σκιασμένα – συγχέοντας την καταμέτρηση με το ισοδύναμο ποσοστό. Ομοίως, στο ερώτημα β), οι μαθητές/τριες συχνά γράφουν «4» επειδή τέσσερις από τους οκτώ τομείς είναι σκιασμένοι, παραβλέποντας την ανάγκη μετατροπής του κλάσματος 484/884 σε ποσοστό. Αυτά τα λάθη αντικατοπτρίζουν μια επιφανειακή επεξεργασία των οπτικών δεδομένων, όπου οι μαθητές/τριες μετρούν τα σκιασμένα τμήματα αλλά δεν ολοκληρώνουν τη μετατροπή της έννοιας σε μορφή ποσοστού. Ένα άλλο συχνό πρόβλημα είναι ότι οι μαθητές/τριες μπορεί να μην αναγνωρίσουν την κανονικότητα στο ερώτημα β), καθώς οι εναλλασσόμενοι σκιασμένοι τομείς παρεμποδίζουν την άμεση οπτική εντύπωση του «μισού». Ως αποτέλεσμα, ορισμένοι/ες μπορεί να το εκτιμήσουν λανθασμένα ως λιγότερο από 50% λόγω του ακανόνιστου μοτίβου. Αυτά τα λάθη υποδεικνύουν την ανάγκη για ισχυρότερες δεξιότητες στη γεφύρωση συγκεκριμένων και αφηρημένων αναπαραστάσεων, ειδικά στη μετάφραση μεταξύ μετρήσεων, κλασμάτων και ποσοστών.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Για να βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να κατακτήσουν αυτή την δεξιότητα, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν δομημένα οπτικά βοηθήματα, όπως τετραγωνισμένο χαρτί με 100 τετραγωνάκια, κυκλικά διαγράμματα ή αριθμογραμμές κλασμάτων, για να δείξουν ρητά πώς τα κλασματικά μέρη σχετίζονται με τα ποσοστά. Η ενθάρρυνση των μαθητών να ονομάσουν πρώτα το κλάσμα (π.χ., «3 στα 4») πριν το μετατρέψουν σε ποσοστό βοηθά στη διευκρίνιση του ενδιάμεσου βήματος. Είναι επίσης χρήσιμο να εξασκηθείτε με γνωστές κλασματικές μονάδες αναφοράς (π.χ., 1⁄2, 1⁄4) και τα αντίστοιχα ποσοστά τους. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να μοντελοποιήσουν αυτή τη διαδικασία ρητά: «Υπάρχουν 4 ίσα μέρη και τα 3 είναι σκιασμένα. Άρα είναι τρία τέταρτα. Τι είναι τα τρία τέταρτα ως ποσοστό;» Δραστηριότητες που περιλαμβάνουν αντιστοίχιση οπτικών μοντέλων, κλασμάτων, δεκαδικών αριθμών και ποσοστών μπορούν επίσης να ενισχύσουν την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων. Με την πάροδο του χρόνου, οι μαθητές/τριες μπορούν να εσωτερικεύσουν τις αντιστοιχίσεις και να γίνουν πιο σίγουροι/ες στην ερμηνεία οπτικών προβλημάτων ποσοστών.

Άσκηση 3.4: Υπολογισμοί με αρνητικούς αριθμούς

Συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν.

a) $12 - (-5) = \underline{\ 17\ }$

b) $11 \cdot \underline{(-4)} = -44$

Λύση

Το ερώτημα α) μπορεί να λυθεί ανακαλώντας ότι «μείον επί μείον κάνει συν» (πιο συγκεκριμένα: η αφαίρεση ενός αρνητικού αριθμού δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την πρόσθεση του αντίστοιχου θετικού αριθμού). Με βάση αυτή την αρχή, ο υπολογισμός είναι απλός:

$$12 - (-5) = 12 + 5 = 17$$

Το ερώτημα β) μπορεί να λυθεί παρατηρώντας πρώτα ότι το γινόμενο -44 είναι αρνητικός αριθμός, ενώ ο πρώτος παράγοντας 11 είναι θετικός αριθμός. Επομένως, η απάντηση στο β) πρέπει να είναι ένας αρνητικός αριθμός. Ο αντίστοιχος θετικός αριθμός ολοκληρώνει τον πολλαπλασιασμό 11·"________"=44. Αφού αυτός ο (θετικός) αριθμός είναι 4, η απάντηση στο β) είναι -4.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία επικεντρώνεται στην ικανότητα των μαθητών/τριών να αντιλαμβάνονται τις επιπτώσεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού που περιλαμβάνουν αρνητικούς αριθμούς. Απαιτεί από αυτούς/ές να επιλύσουν την άσκηση λαμβάνοντας υπόψη τη σωστή ερμηνεία των προσήμων (+ και −).

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η κατανόηση της συμπεριφοράς των αρνητικών αριθμών στις βασικές πράξεις είναι απαραίτητη για την ευχέρεια στην άλγεβρα. Αυτή η εργασία απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να εφαρμόσουν τον γνωστό κανόνα των προσήμων, αναπτύσσοντας την ικανότητα να χειρίζονται νοερά παραστάσεις με πρόσημο με βάση τη δομική κατανόηση, όχι μόνο τις διαδικασίες. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτή η εργασία υποστηρίζει την αίσθηση των συμβόλων, την δομική ευελιξία και τον εννοιολογικό συλλογισμό σχετικά με τις πράξεις και τις τάξεις μεγέθους – θεμελιώδη στοιχεία για την επίλυση εξισώσεων, την κατανόηση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων και την αξιολόγηση αλγεβρικών εκφράσεων.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Στο ερώτημα α), πολλοί/ές μαθητές/τριες αφαιρούν εσφαλμένα το 5 από το 12, παρερμηνεύοντας τα σύμβολα της αφαίρεσης. Στο ερώτημα β), ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να εισάγουν έναν θετικό ακέραιο χωρίς να λάβουν υπόψη τον κανόνα των προσήμων για τον πολλαπλασιασμό. Εναλλακτικά, κάποιοι/ες μπορεί να συσχετίζουν την αφαίρεση μόνο με «μικρότερα» αποτελέσματα και να μην μπορούν να συλλογιστούν δομικά.

Τέτοια λάθη υποδεικνύουν ελλιπή κατανόηση των κανόνων των πράξεων με αρνητικούς αριθμούς, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που περιλαμβάνουν πρόσημα μέσα σε παρενθέσεις. Δείχνουν επίσης αν οι μαθητές/τριες είναι σε θέση να σκέφτονται αντίστροφα με βάση ένα αποτέλεσμα – μια απαραίτητη δεξιότητα στην άλγεβρα.

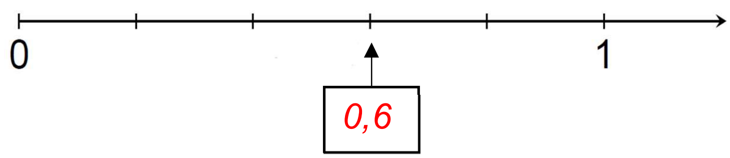
Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Οι μαθητές/τριες επωφελούνται από εργασίες που αντιπαραβάλλουν ρητά τους συνδυασμούς προσήμων (π.χ., (+)(+), (+)(−), (−)(+), (−)(−)) με οπτικά μοντέλα, όπως αριθμητικές γραμμές ή χρωματιστές μάρκες. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να παρέχουν δομημένα πλαίσια προτάσεων, π.χ., «Αφαίρεση ενός αρνητικού είναι το ίδιο με...» και να βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν λεκτικά τις πράξεις. Το να ζητήσετε από τους/τις μαθητές/τριες να δημιουργήσουν παραδείγματα όπου μεταβάλλουν σκόπιμα τα πρόσημα και να παρατηρήσουν το αποτέλεσμα μπορεί να βοηθήσει στην εσωτερίκευση των μοτίβων. Στο ερώτημα β), συγκεκριμένα, η εισαγωγή του τριγώνου της πολλαπλασιασμού (παράγοντας × παράγοντας = γινόμενο) και η εργασία προς τα πίσω από το γινόμενο βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να συμπεράνουν λογικά τα πρόσημα που λείπουν. Τελικά, η τακτική εξάσκηση σε αντίστροφα προβλήματα – εργασία από τα αποτελέσματα προς την αρχή – μπορεί να οικοδομήσει πιο ισχυρή αλγεβρική σκέψη.

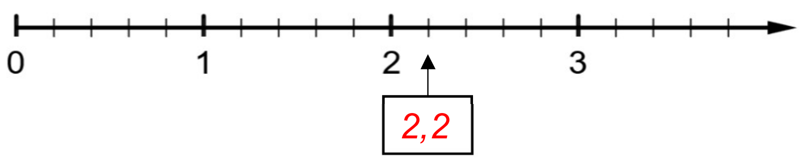
Άσκηση 3.5: Εντοπισμός δεκαδικών τιμών σε μια αριθμογραμμή

Γράψτε τον αριθμό που αντιστοιχεί στη θέση που βρίσκεται το κουτάκι κάτω από την αριθμογραμμή.

a)



b)

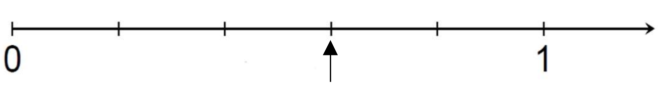


Λύση

Δύο πιθανές στρατηγικές:

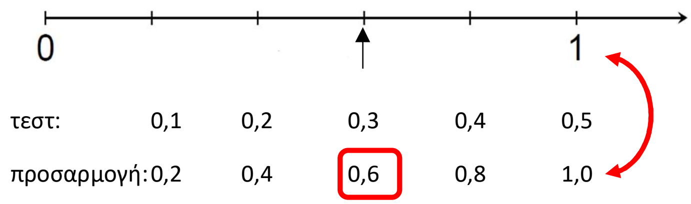
1) Μετρώντας τον αριθμό των βημάτων (ή υποδιαστημάτων) από το 0 στο 1,
2) Δοκιμή ακολουθιών δεκαδικών αριθμών (ή κλασμάτων) από το 0 έως το 1.

Πρώτη λύση στο α): Αναλυτικότερα, η πρώτη στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί μετρώντας 5 βήματα από το 0 στο 1.



# Βημάτων:	1	2	3	4	5
Κλάσματα:	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
Δεκαδικοί:	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

Δεύτερη λύση: Μια πιθανότητα είναι να δοκιμάσουμε το 0,1 για την πρώτη θέση δεξιά του 0. Αυτή η επιλογή 0,1 καταλήγει σε 0,5 που δεν ταιριάζει στο 1 στον αριθμητικό άξονα. Αλλαγή σε 0,2 έχει ως αποτέλεσμα το 1,0 που ταιριάζει με το 1 στον αριθμητικό άξονα.



Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να εντοπίζουν και να γράφουν δεκαδικούς αριθμούς με βάση τη θέση τους σε μια αριθμογραμμή. Και τα δύο μέρη περιλαμβάνουν την ερμηνεία ομοιόμορφα κατανεμημένων διαγραμμίσεων μεταξύ ακέραιων αριθμών και την εκχώρηση της σωστής δεκαδικής τιμής στη σημειωμένη θέση.

Αυτή η εργασία απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να συνδυάσουν την ερμηνεία της αριθμογραμμής, την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών και τον αναλογικό συλλογισμό.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Οι αριθμογραμμές προσφέρουν μια ισχυρή, οπτική αναπαράσταση των ρητών αριθμών, επικεντρώνοντας τόσο στο μέγεθος όσο και στη σχετική θέση. Η ικανότητα ερμηνείας κλασματικών ή δεκαδικών θέσεων σε μια αριθμογραμμή είναι θεμελιώδης για την κατανόηση της ισοδυναμίας, της πυκνότητας και των πράξεων με ρητούς αριθμούς. Σύμφωνα με τους Treppo & van den Heuvel-Panhuizen (2014), αυτή η δραστηριότητα υποστηρίζει την ανάπτυξη της νοητικής αίσθησης του αριθμού, της αναπαράστασης των ρητών αριθμών και της ικανότητας ευέλικτης τοποθέτησης και συλλογισμού για αριθμούς μεταξύ ακέραιων τιμών. Αυτές οι δεξιότητες είναι ζωτικής σημασίας όχι μόνο στη θεωρία αριθμών, αλλά και στη μέτρηση, στην ερμηνεία δεδομένων και στην αλγεβρική μοντελοποίηση.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σημάδια μπορούν να αναμένονται με αυτήν την εργασία;

Οι μαθητές/τριες που δυσκολεύονται με αυτή την εργασία συχνά:

- Λάθος μέτρηση των υποδιαιρέσεων, για παράδειγμα, η σύγχυση της τρίτης υποδιαίρεσης με το 0,3 αντί για το 0,6 στο Μέρος α, υποθέτοντας ότι κάθε υποδιαίρεση ισούται με 0,1 χωρίς να επαληθεύεται το διάστημα με βάση τον αριθμό των μερών που αντιστοιχούν.
- Στο ερώτημα β), οι μαθητές/τριες μπορούν να γράψουν 2,25 αντί για 2,2, εκτιμώντας κατά προσέγγιση ή καταφεύγοντας σε πιο οικείες δεκαδικές δομές.
- Άλλοι/ες μπορεί να μην αναγνωρίζουν το μέγεθος του βήματος, ειδικά όταν τα τμήματα δεν αντιστοιχούν σε δέκατα και έτσι χρησιμοποιούν εσφαλμένες τιμές βήματος.
- Η έλλειψη ακρίβειας κατά την ανάγνωση τιμών από τέτοιου είδους οπτικές αναπαραστάσεις είναι επίσης ένα προειδοποιητικό σημάδι ότι οι μαθητές/τριες δεν είναι ακόμη πλήρως εξοικειωμένοι με τη μη τυπική διαίρεση των αριθμητικών αξόνων.

Τέτοια λάθη υποδηλώνουν αδυναμίες στην αναλογική διαμέριση, στην κατανόηση της δεκαδικής θέσης ή στην προσεκτική ανάγνωση οπτικών δεδομένων.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί σε παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτό το έργο;

Για να ενισχύσουν αυτή την δεξιότητα, οι μαθητές/τριες επωφελούνται από πρακτική εργασία με σχεδιασμένες ή διαδραστικές αριθμογραμμές, όπου σημειώνουν οι ίδιοι/ες τις τιμές και δικαιολογούν τις τοποθετήσεις. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να υποστηρίξουν τη διαδικασία ρωτώντας: «Ποια είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημαδιών;» και «Σε πόσα μέρη χωρίζεται αυτό το διάστημα;» Η χρήση χρωματικής κωδικοποίησης για κάθε διάστημα ή λωρίδων αριθμών που τονίζουν τις ομοιόμορφες διαμερίσεις μπορεί να υποστηρίξει την καλύτερη εκτίμηση και μέτρηση. Η ενίσχυση των ισοδυναμιών κοινών κλασμάτων-δεκαδικών (π.χ., 1/4 = 0,25, 1/5 = 0,2) βοηθά επίσης τους/τις μαθητές/τριες να γίνουν πιο ευέλικτοι/ες στην τοποθέτηση των αριθμών σωστά. Τέλος, η συχνή εξάσκηση με μεγεθυμένες αριθμογραμμές (μεταξύ 0 και 1 ή μεταξύ 2 και 3) βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να συλλογίζονται αναλογικά και να αποφεύγουν την υπεργενίκευση μέσω των ακέραιων αριθμών.

VI. Επιστημονική αξιολόγηση

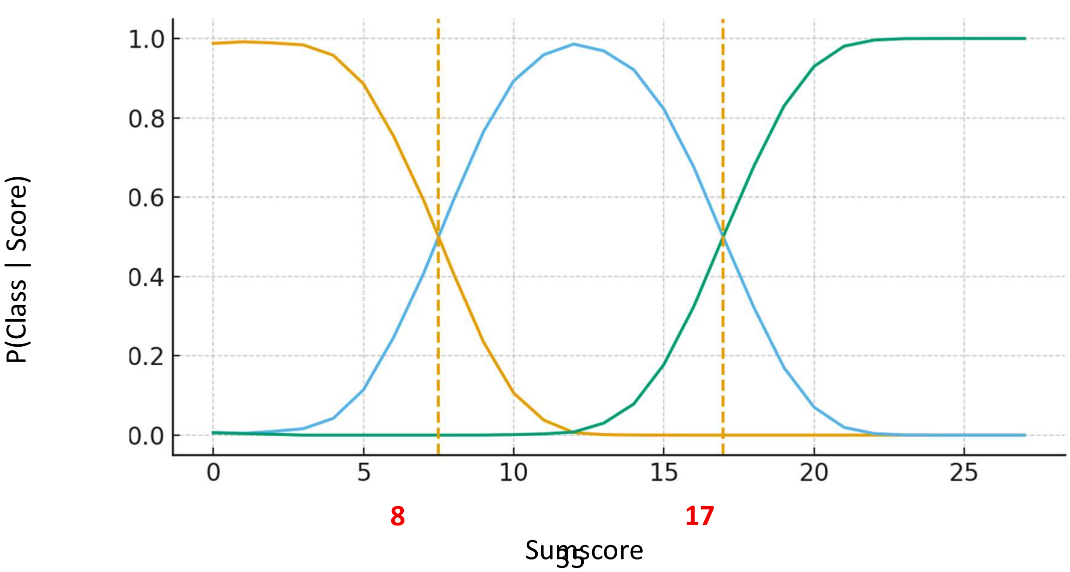
Το Διαγνωστικό τεστ 8+ (DiToM Screening 8+) αναπτύχθηκε με βάση τη σχετική θεωρία και ελέγχθηκε στο πλαίσιο μη αντιπροσωπευτικής μελέτης επικύρωσης. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω χρησιμεύουν για τον εντοπισμό μαθητών και μαθητριών που ενδέχεται να διατρέχουν κίνδυνο λόγω έλλειψης βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων κλειδιών για τη μετέπειτα μάθηση των Μαθηματικών στο σχολείο. Το τεστ υποστηρίζει τους/τις εκπαιδευτικούς στο τέλος της Β΄ τάξης Γυμνασίου / αρχές της Γ΄ Γυμνασίου ώστε να πραγματοποιούν μια εμπειρικά τεκμηριωμένη εκτίμηση της επίδοσης των μαθητών και μαθητριών και να εντοπίζουν εκείνους και εκείνες με αξιοσημείωτα αποτελέσματα, προκειμένου να δοθεί κατάλληλη υποστήριξη σε πρώιμο στάδιο.

Περιγραφή του δείγματος και κεντρικά αποτελέσματα

Το τεστ δοκιμάστηκε από τον Ιούνιο έως τον Ιούλιο του 2025, τις τελευταίες 3 εβδομάδες της σχολικής χρονιάς 2024/2025, σε 1841 μαθητές από σχολεία στην Ελλάδα, τη Γερμανία, τη Γαλλία, την Ισπανία, την Ιταλία, την Κροατία και τη Σουηδία.

Το τεστ περιλαμβάνει τα ακόλουθα μέρη: Βασικές Αριθμητικές Δεξιότητες με 9 ερωτήσεις, Αναλογίες με 7 ερωτήσεις, Τεχνικούς Υπολογισμούς με 8 ερωτήσεις. Εάν ένα ερώτημα απαντιόταν σωστά, δινόταν 1 μονάδα· εάν η λύση ήταν λανθασμένη, ελλιπής ή απουσίαζε, δινόταν 0 μονάδες. Η χορήγηση του τεστ πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τυποποιημένα κριτήρια (βλ. IV. Υλοποίηση του τεστ DiToM) και ακολούθησε ανάλυση των απαντήσεων. Καθώς το τεστ έχει σχεδιαστεί ως δοκιμασία ανίχνευσης (screening test) που εντοπίζει μαθητές και μαθήτριες οι οποίοι ενδέχεται να είναι σε κίνδυνο, αναμένονταν και επιδιώκονταν έντονα φαινόμενα οροφής, δηλαδή μη κανονική κατανομή αλλά κατανομή με αρνητική ασυμμετρία (left skewed distribution), κάτι που επιβεβαιώθηκε από τη δοκιμαστική εφαρμογή.

Για τις ανάγκες μιας επικοινωνίας προσανατολισμένης στην διδακτική πρακτική, δεν ορίζεται μία μόνο τιμή ορίου, αλλά δύο οριακές τιμές που διακρίνουν: μαθητές και μαθήτριες που είναι δυνητικά σε κίνδυνο, εκείνους και εκείνες που θα πρέπει να συνεχίσουν να παρακολουθούνται και όσους/όσες είναι δυνητικά όχι σε κίνδυνο. Ο προσδιορισμός της τιμής αποκοπής ήταν καθοδηγούμενος από τα δεδομένα μέσω λανθάνουσας ανάλυσης τάξεων (latent class analysis) με 3 σαφώς διακριτές τάξεις, οι οποίες είναι μη επικαλυπτόμενες και μονοτονικές. Οι εκ των υστέρων πιθανότητες (posterior probabilities) ένταξης σε κάθε τάξη παριστάθηκαν σε συνάρτηση με τη συνολική βαθμολογία, εξομαλύνθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για τον καθορισμό των κρίσιμων οριακών βαθμολογιών για αποφάσεις χρηματοδότησης, με βάση τα σημεία τομής των αντίστοιχων καμπυλών (βλ. Σχήμα 1), λαμβάνοντας ως κριτήριο εκ των υστέρων πιθανότητα p=0,5.



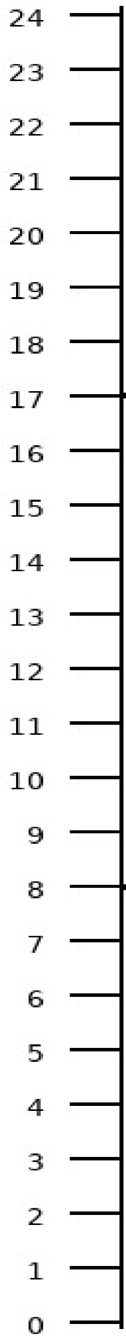
Η λανθάνουσα ανάλυση τάξεων ανέδειξε τρεις σαφώς διακριτές τάξεις, οι οποίες ερμηνεύονται ως: K1 → μαθητές και μαθήτριες με χαμηλή επίδοση στη δοκιμασία ανίχνευσης, K2 → μαθητές και μαθήτριες με μάλλον χαμηλή επίδοση και K3 → μαθητές και μαθήτριες με μη αξιοσημείωτη (τυπική) επίδοση στη δοκιμασία ανίχνευσης.

Για τον προσδιορισμό της κρίσιμης βαθμολογίας επιλέχθηκε εκείνο το όριο μέχρι το οποίο υπάρχει 50% πιθανότητα ένταξης στην τάξη με χαμηλή επίδοση. Αυτό το πρώτο όριο είναι επομένως 8 βαθμοί. Οι μαθητές και οι μαθήτριες που συγκέντρωσαν 8 μονάδες ή λιγότερο χρειάζονται υποστήριξη ώστε να επεξεργαστούν σε βάθος τα βασικά στοιχεία, προκειμένου να μπορούν να οικοδομήσουν με κατανόηση το περιεχόμενο επόμενων μαθημάτων Μαθηματικών. Το δεύτερο όριο είναι οι 17 μονάδες. Οι μαθητές και οι μαθήτριες που συγκέντρωσαν βαθμολογία μεταξύ 9 και 17 μονάδων θα πρέπει να παρακολουθούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών κατά τις επόμενες εβδομάδες, ώστε να διαπιστωθεί εάν κατανοούν το διδαχθέν περιεχόμενο και αν μπορούν να το εφαρμόζουν αυτόνομα.

VII. Φύλλο αξιολόγησης για το διαγνωστικό τεστ 8+

Η παρακάτω κλίμακα παρέχει αρχικές ενδείξεις για τις δεξιότητες με τις οποίες οι μαθητές/τριες είναι πιο πιθανό να συγκεντρώσουν βαθμούς στις ακόλουθες τρεις κλίμακες: 0-8 βαθμοί, 9-17 βαθμοί και 18-24 βαθμοί.

SCORE



Αυτή η ομάδα δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όσον αφορά τις προϋποθέσεις για την εκμάθηση των μαθηματικών στο σχολείο.

C: Εκτός από τα Α και Β, οι μαθητές/τριες συχνά είναι σε θέση να......

πραγματοποιούν υπολογισμούς με αρνητικούς αριθμούς, να δημιουργούν μια καλά δομημένη αλγεβρική έκφραση από μια γραπτή περιγραφή, να επιλύουν προβλήματα διαίρεσης σε πραγματικές καταστάσεις, να ερμηνεύουν και να εργάζονται με γραφήματα σε καταστάσεις αναλογίας, να μεταφράζουν λεκτικές φράσεις σε αλγεβρικές εκφράσεις, να επιλύουν προβλήματα που αφορούν αντίστροφη αναλογία και να κατανοούν και να υπολογίζουν την περίμετρο ενός ορθογωνίου.

Και οι μαθητές/τριες σπάνια είναι σε θέση να......

εφαρμόσουν αυτές τις δεξιότητες με ευελιξία σε σύνθετες, εργασίες μοντελοποίησης πολλών βημάτων σε άγνωστο πλαίσιο.

Αυτή η ομάδα θα πρέπει να παρακολουθείται πιο στενά τις επόμενες εβδομάδες, προκειμένου να διαπιστωθεί εάν τα ακόλουθα περιεχόμενα μπορούν να κατανοηθούν και να εφαρμοστούν ανεξάρτητα.

B: Εκτός από το Α, οι μαθητές/τριες είναι συχνά σε θέση να...

... αξιολογούν μια έκφραση με αντικατάσταση μεταβλητής, μετατρέπουν ένα κλάσμα σε ποσοστό, δημιουργούν μια αλγεβρική έκφραση από μια γραπτή περιγραφή πολλών βημάτων, δομούν μια γραπτή έκφραση από έναν κανόνα πολλών βημάτων, προσδιορίζουν τη λύση μιας απλής γραμμικής εξίσωσης, διακρίνουν μεταξύ απλών ευθέως ανάλογων και μη ανάλογων σχέσεων και προσδιορίζουν δεκαδικές τιμές σε έναν αριθμητικό άξονα

Και οι μαθητές/τριες σπάνια είναι σε θέση να...

... να εκτελούν υπολογισμούς που περιλαμβάνουν αρνητικούς αριθμούς, να λύνουν προβλήματα διαίρεσης ενσωματωμένα σε πλουσιότερα πραγματικά πλαίσια ή να μεταφράζουν πιο σύνθετες λεκτικές περιγραφές σε αλγεβρικές εκφράσεις.

Αυτή η ομάδα διατρέχει κίνδυνο όσον αφορά τις προϋποθέσεις για την εκμάθηση των μαθηματικών στο σχολείο και θα πρέπει να λάβει ειδική υποστήριξη το συντομότερο δυνατόν.

A: Οι μαθητές/τριες είναι συχνά σε θέση να......

διαβάζουν πληροφορίες από ένα σύστημα συντεταγμένων, να αναγνωρίζουν απλές ευθέως ανάλογες σχέσεις, να ερμηνεύουν κυκλικές αναπαραστάσεις και να τις μετατρέπουν σε ποσοστά, να επιλύουν απλά προβλήματα αναλογικού συλλογισμού σε ένα απλό πραγματικό πλαίσιο, να εντοπίζουν απλές δεκαδικές τιμές σε έναν αριθμητικό άξονα και να υπολογίζουν μια απλή ποσοστιαία αύξηση.

Και οι μαθητές/τριες σπάνια είναι σε θέση να......

αξιολογούν αλγεβρικές εκφράσεις αντικαθιστώντας τις μεταβλητές με τιμές, να μετατρέπουν κλάσματα σε ποσοστά σε πιο απαιτητικές καταστάσεις ή να δημιουργούν δομημένες εκφράσεις από μια γραπτή περιγραφή πολλών βημάτων.

Βιβλιογραφία

Brings, L., & Kleine, M. (2025). *Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education*. In Proceedings of EDULEARN25 Conference. Palma, Spain.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York: Macmillan.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Arithmetik: Grundschule* (8. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fraction development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and Instruction, 14*(5), 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012