UNIVERSITY OF THE AEGEAN

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Εγχειρίδιο διαγνωστικού τεστ 6+

Co-funded by the European Union

Περιεχόμενα

I. Εισαγωγή

Η εκμάθηση των μαθηματικών είναι συσσωρευτική: το νέο περιεχόμενο βασίζεται σε στέρεες προηγούμενες γνώσεις. Εάν λείπουν θεμελιώδεις ιδέες και έννοιες, γίνεται όλο και πιο δύσκολο για τους μαθητές/τριες και τις μαθήτριες να κατανοήσουν ουσιαστικά τα επόμενα θέματα. Τα ευρήματα διεθνών και εθνικών ερευνών δείχνουν ότι ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών/τριών και των μαθητριών δεν πληροί τα ελάχιστα πρότυπα στα μαθηματικά. Για την καθημερινή διδασκαλία αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται έγκαιρες, πρακτικές διαδικασίες για να καταστεί ορατή η κατάσταση της μάθησης και να οργανωθεί έγκαιρη υποστήριξη. Εδώ έρχεται το έργο της Ε.Ε. «Διαγνωστικό εργαλείο στα μαθηματικά (DiToM)». Σε συνεργασία μεταξύ Ιταλίας, Γαλλίας, Σουηδίας, Κροατίας, Ελλάδας, Ισπανίας και Γερμανίας, έχουν αναπτυχθεί πέντε αλληλένδετα εργαλεία αξιολόγησης για να παρέχουν στους/στις εκπαιδευτικούς μια συνοπτική εικόνα της τάξης τους σε εκπαιδευτικά σημεία μετάβασης. Τα σημεία αξιολόγησης ακολουθούν ένα διετές ρυθμό:

1. Νηπιαγωγείο → Αρχή Α' δημοτικού
2. Τέλος Β' δημοτικού / Αρχές Γ' δημοτικού
3. Τέλος Δ' δημοτικού / Αρχές Ε' δημοτικού
4. Τέλος ΣΤ' δημοτικού / Αρχές Α' γυμνασίου
5. Τέλος Β' Γυμνασίου / Αρχές Γ' Γυμνασίου

Τι είναι το διαγνωστικό τεστ (screening);

Το διαγνωστικό τεστ (screening) είναι μια σύντομη, ατομική αξιολόγηση που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ολόκληρη την τάξη μέσα σε ένα μόνο μάθημα. Παρέχει μια αρχική, δομημένη επισκόπηση των βασικών εννοιών που έχουν ήδη κατακτηθεί και των τομέων στους οποίους οι μαθητές/τριες/τριες μπορεί να χρειάζονται επιπλέον υποστήριξη. Το screening δεν αντικαθιστά την ατομική, ποιοτική αξιολόγηση της τρέχουσας κατάστασης της μαθηματικής σκέψης ενός παιδιού. Χρησιμεύει ως σημείο εκκίνησης: τα αποτελέσματα μπορούν να ακολουθηθούν από στοχευμένες παρατηρήσεις, συνεντεύξεις και μέτρα υποστήριξης.

Γιατί είναι χρήσιμο αυτό;

- Παρέχει μια γρήγορη επισκόπηση: ποιες βασικές δεξιότητες είναι σε καλό βαθμό και πού είναι χρήσιμη η επανεξέταση ή η επέκταση.
- Επιτρέπει μια καθοδηγούμενη υποστήριξη: εντοπίζει τους/τις μαθητές/τριες που ενδέχεται να δυσκολεύονται με τα ελάχιστα πρότυπα των βασικών μαθηματικών. Με αυτό τον τρόπο μπορείτε να οργανώσετε έγκαιρη υποστήριξη.
- Οδηγεί σε διαγνωστικές αποφάσεις: τα αποτελέσματα της αξιολόγησης παρέχουν μια σαφή πρώτη κατεύθυνση, υποδεικνύοντας ποιοι μαθητές/τριες μπορεί να ωφεληθούν από περαιτέρω διαγνωστικά μέτρα (π.χ. πιο εμπεριστατωμένη ανάλυση των εργασιών ή συνεντεύξεις παρακολούθησης).
- Υποστηρίζει τη μετάβαση: σας επιτρέπει να εστιάσετε την προσοχή σας στις βασικές δεξιότητες κατά τις κρίσιμες σχολικές μεταβάσεις.

Οι ασκήσεις είναι προσανατολισμένες στην τάξη, η διαχείριση περιγράφεται με σαφήνεια και η βαθμολόγηση είναι γρήγορη. Οι εκπαιδευτικοί λαμβάνουν μια συνοπτική περίληψη σε επίπεδο τάξης, καθώς και υποδείξεις για τους/τις μαθητές/τριες που αξίζει να εξεταστούν πιο προσεκτικά σε συγκεκριμένους τομείς περιεχομένου. Με βάση αυτά, μπορούν να προγραμματίσουν σύντομα διαστήματα επανάληψης, διαφοροποιημένες ασκήσεις ή ασκήσεις γεφύρωσης.

Το παρόν εγχειρίδιο παρέχει έναν συνοπτικό οδηγό για τον σκοπό και τη χρήση του εργαλείου αξιολόγησης, εξηγεί τη δομή του τεστ, τους τύπους των ασκήσεων και τους στοχευμένους στόχους αξιολόγησης, δίνει σαφείς οδηγίες για τη διαχείριση στην τάξη, περιγράφει τη βαθμολόγηση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και προσφέρει πρακτικές ιδέες για την επακόλουθη διδασκαλία και τη στοχευμένη υποστήριξη.

Ο στόχος είναι ένα πρακτικό, αξιόπιστο και εύχρηστο εργαλείο αξιολόγησης που παρέχει στους/στις εκπαιδευτικούς γρήγορο προσανατολισμό, επικεντρώνει την προσοχή σε πιθανές δυσκολίες και υποστηρίζει συγκεκριμένα την αποτελεσματική βοήθεια, ώστε όσο το δυνατόν περισσότεροι μαθητές/τριες να μαθαίνουν τα μαθηματικά με σιγουριά, κατανόηση και αυτοπεποίθηση.

II. Τι σημαίνει «βασικές μαθηματικές δεξιότητες»

Η ανάπτυξη διαγνωστικών τεστ απαιτεί μια θεωρητική βάση. Για σύντομα τεστ αξιολόγησης ολόκληρης της τάξης, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εστιάζουμε σε εκείνες τις δεξιότητες χωρίς τις οποίες δεν είναι δυνατή η εκμάθηση του επόμενου περιεχομένου με τρόπο που να έχει νόημα. Σύμφωνα με την κλασική άποψη των Gagné & Briggs, κάθε νέα μαθησιακή γνώση βασίζεται σε ένα ελάχιστο αριθμό απαραίτητων προαπαιτούμενων, στους οποίους αναφέρεται ο όρος «βασικές μαθηματικές δεξιότητες». Εάν αυτές δεν είναι διαθέσιμες, η επιτυχής απόκτηση του νέου περιεχομένου είναι αδύνατη και, ως εκ τούτου, οι κατάλληλες εργασίες βασίζονται σε ό,τι έχει ήδη κατακτηθεί. Στα μαθηματικά, η μάθηση είναι κατά συνέπεια ιεραρχική και σωρευτική.

Εννοιολογική κατανόηση: ικανότητες, έννοιες, δεξιότητες και βασικές δεξιότητες

Στο πλαίσιο του έργου, διακρίνουμε μεταξύ ικανοτήτων και δεξιοτήτων, οι οποίες είναι αλληλεξαρτώμενες στην πρακτική της τάξης. Οι ικανότητες αναφέρονται σε μια διορατική ετοιμότητα να ενεργεί κανείς κατάλληλα σε μαθηματικές καταστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο, οι έννοιες αποτυπώνουν ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων. Η ενεργοποίηση των ικανοτήτων προκύπτει σε μια δεξιότητα, όπως η πρακτική απόδοση από την πλευρά των μαθητών/τριών και των μαθητριών. Οι βασικές δεξιότητες είναι εκείνες οι δεξιότητες η απουσία των οποίων εμποδίζει ή παρεμποδίζει ουσιαστικά την περαιτέρω μάθηση. Λειτουργούν ως απαραίτητες προϋποθέσεις για το επόμενο περιεχόμενο. Το επίκεντρο των ερωτήσεων είναι η αριθμητική και η άλγεβρα, λόγω της ιεραρχικής δομής τους και της σημασίας τους και για άλλους τομείς των μαθηματικών (π.χ. γεωμετρία), η οποία είναι συμβατή τόσο σε εθνικό όσο και σε διακρατικό επίπεδο.

Τα παρακάτω παραδείγματα αποσαφηνίζουν την έννοια των βασικών δεξιοτήτων.

Πρώτο επίπεδο: εκτέλεση της πρόσθεσης με δομημένο τρόπο
Η άσκηση 25 + 7 απαιτεί κάτι περισσότερο από τη σταδιακή μέτρηση. Μια ισχυρή αίσθηση της πράξης εμφανίζεται όταν οι μαθητές/τριες αναγνωρίζουν τις σχέσεις μέρους-μέρους-συνόλου (π.χ. 25 και 7 ως μέρη ενός συνόλου), αναλύουν τους αριθμούς με ευελιξία (π.χ. 7 = 5 + 2) και βασίζονται στην επόμενη δεκάδα (π.χ. 25 + 5 = 30, στη συνέχεια +2 = 32). Εδώ, οι έννοιες (αξία θέσης, ισότητα), οι ικανότητες (ευέλικτος υπολογισμός, αιτιολογημένη διαδικασία) και η δεξιότητα που προκύπτει (δομημένη πρόσθεση) λειτουργούν από κοινού. Εάν αυτή η βασική δεξιότητα λείπει, το επόμενο «επίπεδο», μεγαλύτερα αριθμητικά εύρη ή πιο αποτελεσματικές στρατηγικές, παραμένουν δύσκολα προσβάσιμα.

Δεύτερο επίπεδο: διαχείριση επέκτασης αριθμητικών τομέων
Η ασφαλής κατανόηση των φυσικών αριθμών (αποσύνθεση, αντίστροφες πράξεις, αξία θέσης και αναφορές στον αριθμητικό άξονα) αποτελεί προϋπόθεση για τη μεταφορά διαδικασιών σε δεκαδικούς και κλάσματα (π.χ. πρόσθεση/αφαίρεση, στρογγυλοποίηση, εκτίμηση) προκειμένου να ξεπεραστούν τα επιστημολογικά εμπόδια που συνεπάγεται η εκμάθηση μαθηματικών εννοιών (Brousseau, 1997). Τα κενά σε αυτές τις βασικές δεξιότητες συχνά οδηγούν σε διαδικαστική εργασία χωρίς κατανόηση, η οποία με τη σειρά της εμποδίζει την πρόσβαση σε αλγεβρικές εκφράσεις, εξισώσεις και λειτουργικές σχέσεις. Αυτό καταδεικνύει τον προγνωστικό χαρακτήρα των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων για τις αλγεβρικές απαιτήσεις.

Η κατανόηση των βασικών δεξιοτήτων ενσωματώνεται στις ερωτήσεις έτσι ώστε να:

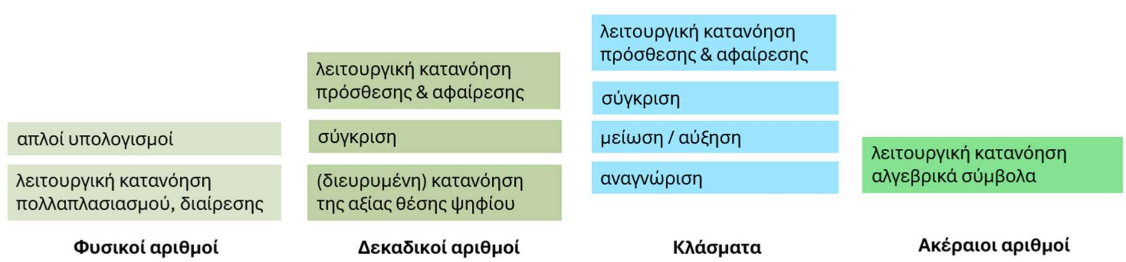
- αντιπροσωπεύουν τις απαραίτητες προϋποθέσεις για το επόμενο βήμα μάθησης, και
- είναι συναφή με το περιεχόμενο και επομένως μπορούν να εντοπιστούν με σύντομες ερωτήσεις, και
- προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς μια πρώτη δομημένη κατεύθυνση ως προς το ποιοι/ες μαθητές/τριες ενδέχεται να χρειάζονται περαιτέρω διαγνωστικά βήματα και πού μπορεί να στοχεύσει η υποστήριξη. Ο στόχος δεν είναι να αποδοθούν ετικέτες, αλλά να αποκαλυφθούν έγκαιρα οι βασικές προϋποθέσεις, έτσι ώστε η μετέπειτα μάθηση να μπορεί να προχωρήσει σε σταθερή βάση.

Κατά την άποψή μας, κάθε γνωστικό πεδίο περιλαμβάνει βασικές δεξιότητες, οι οποίες μπορεί να αποδειχθούν κρίσιμες σε διάφορα σημεία της μαθησιακής πορείας, συμπεριλαμβανομένου του τέλους μιας ενότητας, όταν απαιτείται μια ικανότητα για να καταστεί δυνατή η περαιτέρω μάθηση. Η ανάπτυξη βασικών δεξιοτήτων είναι επομένως συνεχής σε όλες τις τάξεις. Η έγκαιρη αναγνώριση των ελλείψεων σε προαπαιτούμενες γνώσεις παραμένει ουσιαστικής σημασίας, ώστε οι μαθητές/τριες να μπορούν να συνεχίσουν να αποκτούν νέες γνώσεις με κατανόηση.

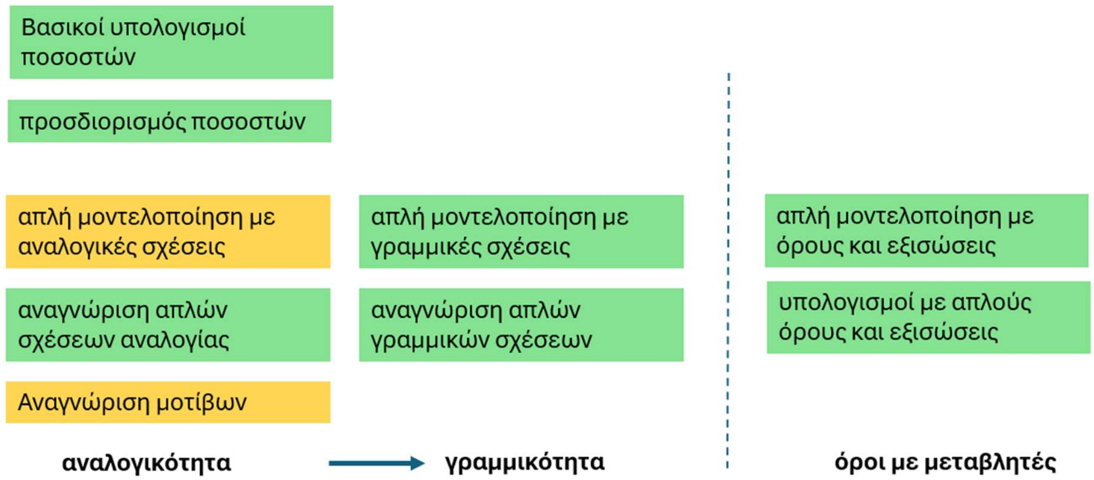
III. Δομή Διαγνωστικών τεστ 6+ και 8+

Η δομή των τεστ στο DiToM βασίζεται στις θεματικές ενότητες της αριθμητικής και της άλγεβρας. Λαμβάνεται υπόψη η ιεραρχική δομή της θεματικής ενότητας. Η δομή των τεστ επικεντρώνεται στην ανάπτυξη και επέκταση του αριθμητικού εύρους με την έννοια του τεχνικού υπολογισμού, στο βαθμό που οι υπολογιστικές διαδικασίες εκτελούνται μη αλγοριθμικά και αλγοριθμικά με βάση μια βασική κατανόηση. Το διάγραμμα δείχνει τη δομή των τεστ σε αυτή τη θεματική ενότητα για τις τάξεις 6+ και 8+.

Η εξέταση για την τάξη 6+ βασίζεται στα δομικά στοιχεία της τάξης 4+, τα οποία εστιάζουν στους φυσικούς αριθμούς. Εάν οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στον τομέα των φυσικών αριθμών στην τάξη 6+, συνιστάται η χρήση της εξέτασης για την τάξη 4+.



Στον τομέα της άλγεβρας ή της προ-άλγεβρας, η δομική κατανόηση απλών μαθηματικών δομών τόσο σε εσωτερικές όσο και σε εξωτερικές μαθηματικές εφαρμογές αξιολογείται υπό την πτυχή της αναλογικότητας και της γραμμικότητας. Ομοίως, στον τομέα των όρων με αριθμούς ή μεταβλητές σε διαφορετικές κατευθύνσεις σε βασικές καταστάσεις εφαρμογής, καθώς και για την κατανόηση των όρων, στο βαθμό που αποτελεί μέρος μιας βασικής κατανόησης.



IV. Εφαρμογή του τεστ DiToM

- **Εξηγήστε στους/στις μαθητές/τριες τον σκοπό του τεστ και καθησυχάστε τους/τες.**

- Το τεστ δεν βαθμολογείται.
- Τους επιτρέπει να αξιολογήσουν τι γνωρίζουν και τι δεν γνωρίζουν, ώστε να μπορούν στη συνέχεια να προτείνουν τις κατάλληλες ασκήσεις. Επομένως, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να εργαστούν μόνοι/ες τους.
- Τονίστε τη σημασία της ολοκλήρωσης των ασκήσεων. Όσο περισσότερες ερωτήσεις απαντήσουν, τόσο πιο εύκολο θα είναι να προσδιοριστούν οι γνώσεις, οι δεξιότητες και οι δυσκολίες τους και να τους/τις βοηθήσετε να τις ξεπεράσουν.
- Μπορείτε επίσης να πείτε ότι αυτή είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιείται αυτό το τεστ και ότι οι άνθρωποι που το σχεδίασαν θέλουν να μάθουν αν είναι κατάλληλο.

- **Δομή του τεστ**

- Η εξέταση χωρίζεται σε τρία μέρη, το καθένα από τα οποία αποτελείται από διάφορες ασκήσεις.
- Όλες οι ασκήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

- **Διάρκεια:** Για κάθε μέρος υπολογίζεται η μέγιστη διάρκεια..

- Δοκιμασία βαθμού 6, μέγιστη διάρκεια 45 λεπτά: 15 για προ-άλγεβρα, 10 για αναλογικότητα, 20 για αριθμητική.
- Δοκιμασία βαθμού 8, μέγιστη διάρκεια 40 λεπτά: 15 για προ-άλγεβρα, 10 για αναλογικότητα, 15 για αριθμητική.
- Είναι σημαντικό να ενημερώσετε τους/τις μαθητές/τριες για τη διάρκεια κάθε μέρους πριν από την εξέταση και να τους/τις εξηγήσετε ότι θα διακόψετε όσους/ες δεν έχουν τελειώσει, για λόγους δικαιοσύνης μεταξύ τους.

- **Μορφή ασκήσεων**

- Ανοιχτές ασκήσεις: υπάρχει χώρος για να απαντήσετε (είτε με προτάσεις είτε με αριθμούς).
- Κλειστές ασκήσεις (ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής): προτείνονται διάφορες απαντήσεις και ο/η μαθητής/τρια πρέπει να απαντήσει επιλέγοντας μόνο μία. Ενημερώστε τους/τις μαθητές/τριες ότι αν αποφασίσουν να αλλάξουν την απάντησή τους σε μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής, πρέπει να γράψουν «Όχι» δίπλα στην πρώτη απάντηση και «Ναι» δίπλα στη νέα.

- **Πώς να απαντήσετε**

- Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανών.
- Οι μαθητές/τριες μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιοδήποτε κενό μέρος της σελίδας ως πρόχειρο, ιδίως για να γράψουν τους υπολογισμούς τους.
- Οι μαθητές/τριες μπορούν να εργαστούν στα τρία μέρη με τη σειρά, με το δικό τους ρυθμό. Οι μαθητές/τριες που έχουν ολοκληρώσει ένα μέρος της εξέτασης πρέπει να περιμένουν τις οδηγίες του/της καθηγητή/τριας για να συνεχίσουν με το επόμενο μέρος.

- **Αλληλεπίδραση με τους/τις μαθητές/τριες κατά τη διάρκεια της εξέτασης**

- Εάν ο/η εκπαιδευτικός κληθεί να απαντήσει, δεν δίνει καμία ένδειξη που θα καθοδηγούσε την απάντηση στις ερωτήσεις. Ο στόχος είναι να εντοπιστούν οι δυσκολίες των μαθητών/τριών.

V. Παρουσίαση των ασκήσεων

Άσκηση 1.1: Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν.

a) $3 \cdot \underline{42} = 126$

c) $54 : \underline{9} = 6$

b) $172 = 4 \cdot \underline{43}$

d) $\underline{81} : 3 = 27$

Λύση

a) Πρώτη λύση: Ο αριθμός που λείπει μπορεί να ερμηνευθεί ως 126 διαιρούμενο με 3. Ο υπολογισμός του πηλίκου 126/3 δίνει ως αποτέλεσμα 42.
Δεύτερη λύση: Σημειώστε ότι 120=3·40 και 126=120+6. Απομένει 6=3·2. Το αποτέλεσμα 126 επιτυγχάνεται εισάγοντας 40+2=42.

b) Πρώτη λύση: Ο αριθμός που λείπει μπορεί να ερμηνευθεί ως το αποτέλεσμα της διαίρεσης του 172 με το 4. Ο υπολογισμός του πηλίκου 172/4 δίνει ως αποτέλεσμα το 43.
Δεύτερη λύση: Σημειώστε ότι 160=4·40 και 172=160+12. Απομένει 12=4·3. Το αποτέλεσμα 172 επιτυγχάνεται εισάγοντας 40+3=43.

c) Ο αριθμός που λείπει μπορεί να ερμηνευθεί είτε ως το αποτέλεσμα του 54 διαιρούμενου με το 6, είτε ως ο αριθμός που συμπληρώνει την ισότητα 6·___=54. Θυμόμαστε τους αριθμητικούς κανόνες και το αποτέλεσμα είναι 9.

d) Πρώτη λύση: Ο αριθμός που λείπει είναι 3 φορές μεγαλύτερος από το 27, δηλαδή 3·27=81.
Δεύτερη λύση: Δοκιμάζοντας το 90 δίνει το πηλίκο 30, το οποίο είναι 3 μεγαλύτερο από το 27. Το πηλίκο 3 επιτυγχάνεται εισάγοντας το 9. Η απάντηση 27 επιτυγχάνεται εισάγοντας 90-9=81.

Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την άσκηση

Αυτή η ερώτηση στοχεύει στην κατανόηση της δομικής σχέσης μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Στα τέσσερα υποερωτήματα, οι μαθητές/τριες καλούνται να βρουν έναν αριθμό που λείπει σε μια ισότητα που περιλαμβάνει είτε πολλαπλασιασμό είτε διαίρεση. Για να απαντήσουν σωστά σε αυτές τις ερωτήσεις, οι μαθητές/τριες πρέπει να προσδιορίσουν τον ρόλο των γνωστών και άγνωστων αριθμών και να μετακινηθούν ευέλικτα μεταξύ των πράξεων. Πρέπει να ερμηνεύσουν τις εξισώσεις όχι απλώς ως προτροπές για υπολογισμό, αλλά ως εκφράσεις μιας σχέσης μέρους-όλου στην οποία μια ποσότητα προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση δύο άλλων και να αναγνωρίσουν το σύμβολο ισότητας ως σχέση ισοδυναμίας. Αυτή η λειτουργική ευελιξία είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας βαθύτερης αριθμητικής κατανόησης και είναι απαραίτητη για τη μετάβαση σε πιο πολύπλοκες έννοιες.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η αναγνώριση και η άπταιστη χρήση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης είναι μια βασική δεξιότητα για τη μετέπειτα μαθηματική μάθηση. Αυτή η κατανόηση αποτελεί τη βάση για τη συλλογιστική με αναλογίες, αναλογίες, αλγεβρικές εκφράσεις και λειτουργικές σχέσεις. Σύμφωνα με το DiToM, τέτοιες δεξιότητες ταξινομούνται ως βασικές μαθηματικές δεξιότητες, επειδή η απουσία τους μπορεί να εμποδίσει ή ακόμη και να μπλοκάρει τη μελλοντική πρόοδο της μάθησης. Οι μαθητές/τριες που μπορούν να ερμηνεύσουν μια εξίσωση δομικά — κατανοώντας, για παράδειγμα, ότι «3 · ___ = 126» σημαίνει «126 : 3» — δεν επιδεικνύουν απλώς διαδικαστική μνήμη: ασχολούνται με μαθηματική συλλογιστική. Η έγκαιρη ανάπτυξη αυτής της ικανότητας εξασφαλίζει ότι οι μαθητές/τριες θα είναι καλύτερα προετοιμασμένοι/ες για να χειριστούν συμβολικές αναπαραστάσεις και επίλυση προβλημάτων πολλαπλών βημάτων στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την άσκηση;

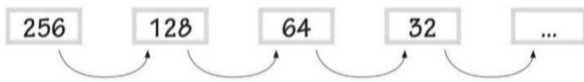
Οι μαθητές/τριες που δεν έχουν ακόμη εσωτερικεύσει τη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης συχνά παρουσιάζουν παρανοήσεις. Ένα συνηθισμένο λάθος είναι να ερμηνεύουν όλες τις εξισώσεις ως απαιτούσες πολλαπλασιασμό προς τα εμπρός, ακόμη και όταν απαιτείται η αντίστροφη πράξη. Για παράδειγμα, όταν συναντούν την εξίσωση «172 = 4 · ___», οι μαθητές/τριες μπορεί να υπολογίσουν λανθασμένα «172 · 4» αντί να διαιρέσουν. Άλλοι/ες μπορεί να μαντέψουν με βάση την απομνημόνευση, χωρίς να λάβουν υπόψη τη δομή της εξίσωσης. Η παρερμηνεία της λειτουργίας του σημείου ισότητας —ως υπόδειξη για υπολογισμό και όχι ως σύμβολο ισοδυναμίας— μπορεί επίσης να οδηγήσει σε διαδικαστικές αλλά λανθασμένες απαντήσεις. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές/τριες επιχειρούν σύνθετες γραπτές μεθόδους (όπως η μακρά διαίρεση, π.χ. 126=120+6=3x40 + 3x2 ή 126:3=40+2=42), όπου η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των αριθμών θα ήταν πιο κατάλληλη. Αυτές οι συμπεριφορές μπορεί να υποδηλώνουν έλλειψη δομικής επίγνωσης, καθώς και περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Είναι σημαντικό να συνδέονται ρητά οι σχετικές αριθμητικές πράξεις (π.χ. «6 · 4 = 24», «24 : 4 = 6» και «24 : 6 = 4») για να τονιστεί η αντιστρεψιμότητα των πράξεων. Η ενθάρρυνση των μαθητών/τριών/τριών να εκφράσουν με λόγια τη συλλογιστική τους, για παράδειγμα ρωτώντας τους/τις «Ποιος είναι ο αριθμός που, όταν πολλαπλασιαστεί με το 4, δίνει 172;», υποστηρίζει την κατανόηση. Τέλος, η μετακίνηση της θέσης του αγνώστου (αρχή, μέση ή τέλος της εξίσωσης) θα πρέπει να εξασκηθεί για να εμβαθυνθεί η ευέλικτη κατανόηση της δομής της εξίσωσης. Για να υποστηρίξετε τους μαθητές/τριες που δυσκολεύονται με αυτή την έννοια, είναι χρήσιμο να εργαστείτε με οπτικές αναπαραστάσεις, όπως πίνακες, μοντέλα ράβδων ή διαγράμματα ομαδοποίησης, που καθιστούν ορατές τις πολλαπλασιαστικές δομές (Polotskaia & Savard, 2021). Αυτά τα μοντέλα επιτρέπουν στους/στις μαθητές/τριες να δουν πώς μια ποσότητα μπορεί να αποτελείται από ίσα μέρη ή να αποσυντεθεί σε αυτά, αντικατοπτρίζοντας αντίστοιχα τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

Άσκηση 1.2: Αριθμητικά μοτίβα και αναγνώριση κανόνων

Ποιον κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε για να συνεχίσουμε την παρακάτω ακολουθία αριθμών;



- ☐ Αφαιρώ 32
- ☐ Αφαιρώ 128
- ☐ Διαιρώ με το 4
- ☑ Διαιρώ με το 2

Λύση

Οι μαθητές/τριες μπορούν να ξεκινήσουν ελέγχοντας ποιες επιλογές είναι πιθανώς σωστές, δοκιμάζοντας τις προτεινόμενες πράξεις με οποιονδήποτε από τους τρεις πρώτους αριθμούς. Για παράδειγμα, με το 256:

$256 - 32 = 224$ (δεν ισούται με 128, επομένως αυτή η επιλογή δεν μπορεί να είναι σωστή)

$256 - 128 = 128$ (ταιριάζει με την ακολουθία)

$\frac{256}{4} = 64$ (δεν ισούται με 128, επομένως αυτή η επιλογή δεν μπορεί να είναι σωστή)

$\frac{256}{2} = 128$ (ταιριάζει με την ακολουθία)

Δοκιμή της (μέχρι στιγμής σωστής) δεύτερης και τέταρτης επιλογής με 128:

$128 - 128 = 0$ και $\frac{128}{2} = 64$. Μόνο ο τελευταίος υπολογισμός ταιριάζει με την ακολουθία. Η μόνη εναπομένουσα επιλογή (διαίρεση με το 2) επιβεβαιώνεται με τον τρίτο αριθμό 64, υπολογίζοντας $\frac{64}{2} = 32$.

Εναλλακτικά, οι μαθητές/τριες/τριες μπορούν να ξεκινήσουν αφαιρώντας και διαιρώντας γειτονικά ζεύγη αριθμών:

$$256 - 128 = 128\,, \qquad 128 - 64 = 64\,, \qquad 64 - 32 = 32$$

$$\frac{256}{128} = 2\,, \qquad \frac{128}{64} = 2\,, \qquad \frac{64}{32} = 2$$

Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τον κανόνα που διέπει μια αριθμητική ακολουθία. Το συγκεκριμένο παράδειγμα (256, 128, 64, 32, …) απαιτεί την αναγνώριση μιας γεωμετρικής προόδου, στην οποία κάθε αριθμός είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του προηγούμενου με το δύο. Η άσκηση παρουσιάζει πολλαπλές επιλογές, προτρέποντας τους/τις μαθητές/τριες να αποφασίσουν ποιος κανόνας (π.χ. «αφαιρέστε το 32» ή «διαιρέστε με το 2») εξηγεί σωστά το μοτίβο. Έτσι, η βασική δεξιότητα που εξετάζεται είναι η ικανότητα των μαθητών/τριών/τριών να αναγνωρίζουν πολλαπλασιαστικές δομές. Αυτό περιλαμβάνει κάτι περισσότερο από διαδικαστική γνώση — απαιτεί αναγνώριση μοτίβων, δομικό συλλογισμό και πρώιμη αλγεβρική σκέψη.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα αναγνώρισης των κανονικοτήτων στα αριθμητικά μοτίβα είναι μια βασική μαθηματική δεξιότητα, καθώς αποτελεί τη βάση για πιο προχωρημένες έννοιες, όπως οι συναρτήσεις, η άλγεβρα και ο αναλογικός συλλογισμός. Οι μαθητές/τριες που μπορούν να διακρίνουν τους κανόνες στις ακολουθίες είναι καλύτερα προετοιμασμένοι/ες για να ασχοληθούν αργότερα με γενικεύσεις και συμβολικές αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με έρευνες στη μαθηματική εκπαίδευση (π.χ. Kieran, 2018, Radford 2013), η αναγνώριση μοτίβων υποστηρίζει την ανάπτυξη μιας σχεσιακής κατανόησης των αριθμών και των πράξεων. Στο πλαίσιο του DiToM, η αναγνώριση της αριθμητικής δομής θεωρείται απαραίτητη για την πλοήγηση στην αυξανόμενη αφαίρεση των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον, η κατανόηση των γεωμετρικών ακολουθιών — όπως η διαίρεση στο μισό — θέτει επίσης σημαντικά θεμέλια για την ερμηνεία των εκθετικών σχέσεων, μια έννοια που συναντάται στις επόμενες τάξεις.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την εργασία;

Μια συχνή παρανόηση σε αυτή την άσκηση είναι η ερμηνεία της ακολουθίας ως αθροιστική και όχι πολλαπλασιαστική. Οι μαθητές/τριες μπορεί να υποθέσουν ότι οι αριθμοί μειώνονται κατά ένα σταθερό ποσό και να επιλέξουν «αφαίρεση 32», επειδή η διαφορά μεταξύ 64 και 32 ταιριάζει σε αυτό το μοτίβο, παρόλο που δεν ισχύει με συνέπεια στα προηγούμενα βήματα. Τέτοια λάθη αποκαλύπτουν μια γραμμική προκατάληψη, η οποία είναι συνηθισμένη όταν οι μαθητές/τριες δεν είναι εξοικειωμένοι/ες με τη γεωμετρική μεταβολή. Άλλοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να μαντέψουν χωρίς να ελέγξουν το μοτίβο σε πολλαπλούς όρους, επιδεικνύοντας μη συστηματική συλλογιστική. Επιπλέον, εάν οι μαθητές/τριες δεν βλέπουν ακόμη τη διαίρεση ως το αντίστροφο της πολλαπλασιασμού, μπορεί να μην αναγνωρίσουν το «διαιρέστε με 2» ως επαναλαμβανόμενη δομή. Αυτά τα μοτίβα σφαλμάτων υποδηλώνουν μια αδύναμη ή ανεπαρκώς ανεπτυγμένη αντίληψη της λειτουργικής δομής και της ακολουθίας.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες που δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν αριθμητικά μοτίβα επωφελούνται από δομημένες ασκήσεις που αντιπαραβάλλουν ρητά τις προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Η χρήση οπτικών βοηθημάτων, όπως αλυσίδες αριθμών ή δενδροδιαγράμματα, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές/τριες να αναγνωρίσουν πώς αλλάζουν οι τιμές από βήμα σε βήμα. Δραστηριότητες που απαιτούν από τους/τις μαθητές/τριες να δημιουργήσουν τις δικές τους ακολουθίες από δεδομένους κανόνες (π.χ. «Δημιουργήστε μια ακολουθία όπου κάθε αριθμός είναι ο μισός από τον προηγούμενο») μπορούν να αναπτύξουν την επίγνωση των μοτίβων και να εμβαθύνουν την κατανόηση των πράξεων. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ενθαρρύνουν το λεκτικό συλλογισμό — για παράδειγμα, «Πώς άλλαξε ο αριθμός από 256 σε 128;» — για να προωθήσουν τη μεταγνώση και να καταστήσουν ορατές τις στρατηγικές. Με την πάροδο του χρόνου, η σύνδεση αυτών των μοτίβων με πραγματικές καταστάσεις (π.χ. δίπλωμα χαρτιού, διπλασιασμός βακτηρίων) μπορεί να ενισχύσει την έννοια της γεωμετρικής προόδου και να καταστήσει τα αφηρημένα μοτίβα πιο απτά.

Άσκηση 1.3: Προτεραιότητα πράξεων

Υπολογίστε:

$14 + 2 \cdot 3 =$ 20

Λύση

Σημειώστε ότι ο πολλαπλασιασμός έχει προτεραιότητα έναντι της πρόσθεσης.

Πρώτα υπολογίστε το γινόμενο 2·3=6, μετά προσθέστε 14+6=20. Σε έναν υπολογισμό:

$$14 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$$

Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση ελέγχει την κατανόηση των μαθητών/τριών σχετικά με τη συμβατική σειρά των πράξεων, και συγκεκριμένα την προτεραιότητα του πολλαπλασιασμού έναντι της πρόσθεσης. Οι μαθητές/τριες πρέπει να ερμηνεύσουν και να αξιολογήσουν σωστά την έκφραση «14 + 2 · 3», εφαρμόζοντας τον κανόνα ότι ο πολλαπλασιασμός εκτελείται πριν από την πρόσθεση. Αυτό απαιτεί όχι μόνο διαδικαστική ευχέρεια, αλλά και επίγνωση της ιεραρχικής δομής των αριθμητικών πράξεων. Επομένως, η άσκηση υπερβαίνει τη γνώση των γεγονότων και αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να αναλύουν και να δομούν σωστά τις αριθμητικές εκφράσεις — ένα κρίσιμο βήμα προς τον αλγεβρικό γραμματισμό.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η κατανόηση της σειράς των πράξεων είναι βασική προϋπόθεση για την εργασία με πιο σύνθετες αριθμητικές εκφράσεις και, στη συνέχεια, με αλγεβρικές εκφράσεις και εξισώσεις. Στο πλαίσιο του DiToM, η ικανότητα επεξεργασίας εκφράσεων πολλαπλών βημάτων σύμφωνα με τις μαθηματικές συμβάσεις θεωρείται βασική δεξιότητα, καθώς αποτελεί τη βάση του συμβολικού συλλογισμού και της γενικής ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Οι μαθητές/τριες που εσωτερικεύουν αυτούς τους κανόνες μπορούν να ερμηνεύουν τις εκφράσεις με αξιοπιστία, να χειρίζονται τους όρους με αυτοπεποίθηση και να αποφεύγουν τις συνηθισμένες παγίδες στους υπολογισμούς. Αυτή η ικανότητα δεν είναι μόνο απαραίτητη στο πλαίσιο των αριθμητικών πράξεων, αλλά μπορεί επίσης να μεταφερθεί άμεσα στην εργασία με εκφράσεις και τύπους, στην επίλυση εξισώσεων και στην ανάλυση συναρτήσεων σε επόμενες τάξεις.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την εργασία;

Ένα τυπικό λάθος σε αυτή την άσκηση είναι η αξιολόγηση της έκφρασης από αριστερά προς τα δεξιά χωρίς να τηρείται η προτεραιότητα των πράξεων — δηλαδή, προσθέτοντας πρώτα το 14 και το 2 για να βγει το 16 και μετά πολλαπλασιάζοντας με το 3 για να βγει το 48. Αυτό το λάθος αποκαλύπτει μια γραμμική προκατάληψη στον υπολογισμό και μια έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης της προτεραιότητας των πράξεων. Ένα άλλο προειδοποιητικό σημάδι είναι η διστακτικότητα ή η υπερβολική εξάρτηση από ανεπίσημες στρατηγικές συλλογισμού («απλά κάνε ό,τι είναι γραμμένο πρώτα»), που υποδηλώνει ότι οι μαθητές/τριες μπορεί να εφαρμόζουν την συνηθισμένη σειρά ανάγνωσης αντί για τη μαθηματική δομή. Μερικοί μαθητές/τριες μπορεί επίσης να προσπαθήσουν να εισάγουν ακατάλληλα παρενθέσεις, δείχνοντας ανασφάλεια σχετικά με τον τρόπο οργάνωσης των εκφράσεων. Ακόμα και αν οι μαθητές/τριες καταλήξουν στο σωστό αποτέλεσμα, η χρήση της μεθόδου «δοκιμής και σφάλματος» ή της εικασίας αντί για δομημένο συλλογισμό μπορεί να αποτελεί ένδειξη εννοιολογικών κενών.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Η στοχευμένη υποστήριξη πρέπει να ξεκινά με την οπτικοποίηση της δομής των εκφράσεων, για παράδειγμα μέσω της χρήσης χρωματικού κώδικα, παρενθέσεων ή οπτικών μοντέλων που δείχνουν την ομαδοποίηση. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να μοντελοποιήσουν την αξιολόγηση των εκφράσεων βήμα προς βήμα και να ενθαρρύνουν τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν με λόγια τη συλλογιστική τους: «Πρώτα, κάνω 2 φορές 3, επειδή ο πολλαπλασιασμός έχει προτεραιότητα έναντι της πρόσθεσης. Στη συνέχεια, προσθέτω 14». Ομοίως, οι εικονικές αναπαραστάσεις των δύο μεθόδων υπολογισμού μπορούν να βοηθήσουν στη διάκριση και την κατανόηση των προτεραιοτήτων υπολογισμού. Η εξάσκηση με μια ποικιλία εκφράσεων — συμπεριλαμβανομένων εκείνων με και χωρίς παρενθέσεις— μπορεί να βοηθήσει να διευκρινιστεί πότε και γιατί έχει σημασία η σειρά. Οι μαθητές/τριες επωφελούνται επίσης από την εξερεύνηση λανθασμένων στρατηγικών και τη συζήτηση για το γιατί οδηγούν σε λανθασμένα αποτελέσματα. Με την πάροδο του χρόνου, η τακτική έκθεση και η δομημένη αναστοχαστική σκέψη βοηθούν στην εσωτερικοποίηση των κανόνων και ενισχύουν την αυτοπεποίθηση των μαθητών/τριών στην αντιμετώπιση υπολογισμών πολλαπλών βημάτων.

Άσκηση 1.4: Μετάφραση γραπτού κειμένου σε μαθηματικές εκφράσεις

Ο Θωμάς έλαβε τις παρακάτω οδηγίες:

Ο αριθμός 4 προστίθεται στο 5.

Το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το 8.

Ποιον υπολογισμό πρέπει να κάνει ο Θωμάς για να βρει το αποτέλεσμα;

- ☐ $5 + 4 \cdot 8$
- ☑ $(5 + 4) \cdot 8$
- ☐ $5 + (4 \cdot 8)$
- ☐ $5 \cdot 8 + 4$

Λύση

Το αποτέλεσμα της πρώτης εντολής Ο αριθμός 4 προστίθεται στο 5 μπορεί να εκφραστεί ως 5+4.

Η δεύτερη εντολή Το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με 8 απαιτεί ολόκληρη η έκφραση 5+4 να πολλαπλασιαστεί με 8. Δεν αρκεί να γράψουμε 5+4·8, καθώς αυτή η έκφραση πολλαπλασιάζει μόνο το 4 με το 8. Οι παρενθέσεις γύρω από το 5+4 εγγυώνται ότι και οι δύο όροι πολλαπλασιάζονται με το 8. Η απάντηση είναι (5+4)·8.

Δεδομένου ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικές πράξεις, οι ακόλουθες απαντήσεις είναι επίσης σωστές:

$$(4 + 5) \cdot 8, \quad 8 \cdot (5 + 4), \quad 8 \cdot (4 + 5)$$

Εάν ο/η μαθητής/τρια δώσει μία από αυτές τις απαντήσεις, πρέπει να προσδιορίσει τη δεύτερη επιλογή (5+4)·8 ως ισοδύναμη απάντηση.

Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να ερμηνεύουν μια σύντομη λεκτική ακολουθία που περιγράφει δύο διαδοχικές πράξεις — πρώτα μια πρόσθεση και μετά έναν πολλαπλασιασμό — και να μεταφράζουν αυτή την ακολουθία σε μια συμβολική έκφραση. Οι μαθητές/τριες δεν καλούνται να υπολογίσουν το αποτέλεσμα, αλλά να προσδιορίσουν τη σωστή μαθηματική αναπαράσταση των οδηγιών, επειδή οι λεκτικές οδηγίες και η αντίστοιχη αριθμητική έκφραση δεν είναι σημασιολογικά σύμφωνες (Vergnaud, 1983). Αυτό απαιτεί την αναγνώριση της σειράς των πράξεων που ενσωματώνεται στη γλώσσα και τη δημιουργία ενός όρου ανάλογα (π.χ. (4 + 5) · 8). Η βασική δεξιότητα που εξετάζεται είναι η μετάφραση από τη φυσική γλώσσα σε τυπική σημειογραφία, συμπεριλαμβανομένης της χρήσης παρενθέσεων για τη διατήρηση της σωστής υπολογιστικής δομής και των προτεραιοτήτων των πράξεων.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα να αναπαριστά κανείς συμβολικά λεκτικές ή συμφραζόμενες πληροφορίες είναι θεμελιώδης για τη μαθηματική παιδεία. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτή η δεξιότητα θεωρείται βασική, διότι επιτρέπει στους μαθητές/τριες να μεταβαίνουν μεταξύ διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης —λεκτικής, συμβολικής, εικονικής και λειτουργικής— και να χειρίζονται τη δομή (Kieran & Martìnez-Hernàndez, 2022) των αριθμητικών εκφράσεων. Αυτή η μεταφραστική ικανότητα είναι απαραίτητη όχι μόνο στην αριθμητική, αλλά και στην άλγεβρα, όπου οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν τακτικά καταστάσεις που απαιτούν τη δημιουργία ή την ερμηνεία εκφράσεων από προβλήματα με λέξεις, διαγράμματα ή καθημερινά σενάρια. Η έγκαιρη κατάκτηση αυτής της δεξιότητας υποστηρίζει την ανάπτυξη της λειτουργικής σκέψης, της ευελιξίας στην επίλυση προβλημάτων και της ευχέρειας στην εργασία με μαθηματικά μοντέλα.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την εργασία;

Ένα συνηθισμένο λάθος σε αυτή την άσκηση είναι η κατασκευή της έκφρασης με λάθος σειρά, όπως η ερμηνεία του «4 προστίθεται στο 5» ως «4 + 5» (το οποίο είναι μαθηματικά σωστό), αλλά στη συνέχεια η λανθασμένη εφαρμογή του πολλαπλασιασμού: είτε «4 + (5 · 8)» είτε «4 · 5 + 8». Αυτό αντανακλά τη δυσκολία αναγνώρισης της ακολουθίας των πράξεων που ενσωματώνεται στη γλώσσα. Μερικοί μαθητές/τριες μπορεί να αγνοήσουν την ανάγκη για παρενθέσεις, γράφοντας «4 + 5 · 8», το οποίο οδηγεί σε λανθασμένη σειρά πράξεων αν υπολογιστεί. Άλλοι/ες μπορεί να επικεντρωθούν μόνο στην τελική πράξη και να γράψουν «9 · 8 = 72» ως απάντηση, παρακάμπτοντας την πραγματική εργασία της συμβολικής μετάφρασης. Αυτά τα μοτίβα υποδηλώνουν κενά στην κατανόηση της διαδικασίας και δυσκολίες στο συντονισμό της γλώσσας με τη μαθηματική δομή.

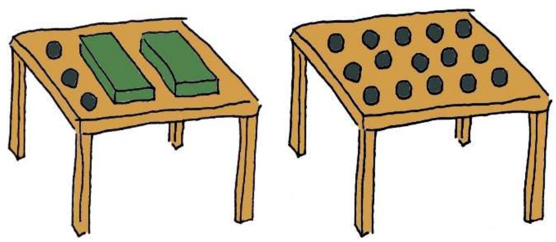
Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Για να υποστηρίξετε τους/τις μαθητές/τριες σε αυτόν τον τομέα, είναι σημαντικό να τους/τις ενθαρρύνετε να αναπτύξουν μια ολοκληρωμένη κατανόηση της ακολουθίας των υπολογισμών, ώστε να λαμβάνουν υπόψη τη δομή του υπολογισμού και τη σειρά των πράξεων. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δείξουν πώς να «χτίσουν έναν όρο» από μια προφορική πρόταση και να χρησιμοποιήσουν οπτικά βοηθήματα οργάνωσης (όπως δέντρα πράξεων ή διαγράμματα ροής) για να βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να ακολουθήσουν τη σωστή σειρά των πράξεων. Η έμφαση στο ρόλο των παρενθέσεων στην ομαδοποίηση των πράξεων μπορεί να αποτρέψει την παρερμηνεία. Οι ρουτίνες της τάξης που περιλαμβάνουν «μετάφραση» μεταξύ γλώσσας και συμβόλων μπορούν επίσης να ενισχύσουν την ευελιξία των μαθητών/τριών στην αναπαράσταση. Με την πάροδο του χρόνου, το να ενθαρρύνετε τους/τις μαθητές/τριες να λένε τι σημαίνει η έκφραση (π.χ. «πρώτα προσθέτω, μετά πολλαπλασιάζω») βοηθά στην εδραίωση της κατανόησης της συμβολικής δομής.

Άσκηση 1.5: Ισοδυναμία ποσοτήτων

Η εικόνα δείχνει μπίλιες και κουτιά, τοποθετημένα σε δύο τραπέζια. Κάθε κουτί περιέχει τον ίδιο αριθμό μπιλιών. Υπάρχει ο ίδιος αριθμός μπιλιών σε κάθε τραπέζι. Πόσες μπίλιες υπάρχουν σε κάθε κουτί;

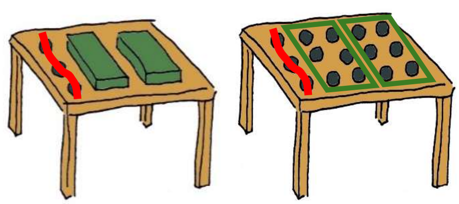
Απάντηση: 6



Λύση

Αυτή η εργασία μπορεί να επιλυθεί με τυπικές ή άτυπες μεθόδους.

Μια λύση είναι να αφαιρέσετε πρώτα τρεις μπίλιες από κάθε τραπέζι και να ομαδοποιήσετε τις 12 μπίλιες που απομένουν στο Τραπέζι 2 σε δύο ομάδες με τον ίδιο αριθμό μπιλιών (εδώ, 6 μπίλιες).



Αυτή η συλλογιστική μπορεί να υποστηριχθεί με τους υπολογισμούς 15-3=12 και 12:2=6.

Σημειώστε ότι η διαδικασία αφαίρεσης και ομαδοποίησης μπορεί να γίνει είτε στην εικόνα, είτε νοερά, είτε με υπολογισμό.

Μια δεύτερη λύση μπορεί να βασιστεί στη δοκιμή τιμών μέχρι να υπάρχει ο ίδιος αριθμός μπιλιών και στους δύο πίνακες. Αυτή η δοκιμή μπορεί να γίνει ως νοερός υπολογισμός, αλλά μπορεί επίσης να συνοψιστεί με έναν πίνακα:

Αριθμός μπιλιών στο ένα κουτί	3	4	5	6
Σύνολο στο τραπέζι 1	9	11	13	15
Σύνολο στο τραπέζι 2	15	15	15	15

Μια τρίτη, τυπική λύση μπορεί να βασιστεί στην εισαγωγή του x ως τον αριθμό των μπιλιών σε ένα κουτί και στην αναπαράσταση του προβλήματος συμβολικά με την εξίσωση 2x+3=15, η οποία μπορεί να λυθεί με αλγεβρικές μεθόδους. Ωστόσο, αυτή η λύση δεν είναι πιθανό να χρησιμοποιηθεί από μαθητές/τριες της 6ης τάξης και άνω.

Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να ερμηνεύουν μια οπτική αναπαράσταση μιας σχέσης μέρους-συνόλου που περιλαμβάνει ισότητα. Στους/στις μαθητές/τριες παρουσιάζονται δύο πίνακες, ο καθένας από τους οποίους περιέχει ένα συνδυασμό ορατών μπιλιών και κουτιών που κρύβουν τον ίδιο άγνωστο αριθμό μπιλιών. Η βασική απαίτηση είναι να συμπεράνουν τον αριθμό των μπιλιών σε ένα κουτί με βάση την πληροφορία ότι και οι δύο πίνακες περιέχουν τον ίδιο συνολικό αριθμό μπιλιών. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές/τριες πρέπει να εξισώσουν νοητικά τις ποσότητες και στις δύο πλευρές και να λύσουν την άγνωστη παράμετρο — μια μορφή άτυπης επίλυσης εξισώσεων με βάση την οπτική ισορροπία. Η εργασία στοχεύει επομένως στο δομικό συλλογισμό, στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη και στην ικανότητα ερμηνείας της ισοδυναμίας σε ένα μη συμβολικό πλαίσιο.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ερμηνεία της ισότητας είναι ένας κρίσιμος πρόδρομος του αλγεβρικού συλλογισμού. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτό αναγνωρίζεται ως βασική δεξιότητα, επειδή αξιοποιεί την κατανόηση των μαθητών/τριών για την ισοδυναμία και την αντικατάσταση — κεντρικές έννοιες τόσο στην αριθμητική όσο και στην αρχική άλγεβρα. Με το σκεπτικό ότι δύο διαφορετικές διαμορφώσεις πρέπει στην πραγματικότητα να είναι ίσες συνολικά, οι μαθητές/τριες ασκούν τη σχεσιακή σκέψη αντί να βασίζονται μόνο στον άμεσο υπολογισμό (Radford, 2014). Αυτή η δεξιότητα υποστηρίζει την μετέπειτα ικανότητα επίλυσης εξισώσεων, εξισορρόπησης μετασχηματισμών και εργασίας με άγνωστες ποσότητες σε συμβολική μορφή. Επιπλέον, τέτοιες μη συμβολικές εργασίες αποτελούν μια ουσιαστική γέφυρα για τους/τις μαθητές/τριες που εξακολουθούν να αναπτύσσουν την αυτοπεποίθησή τους με τις τυπικές αναπαραστάσεις, επιτρέποντας την εννοιολογική πρόσβαση μέσω της οπτικής δομής.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες που δυσκολεύονται με αυτή την άσκηση ενδέχεται να μην αναγνωρίσουν την ισοδυναμία μεταξύ των δύο πλευρών. Ένα τυπικό λάθος είναι να προσπαθούν να μετρήσουν μόνο τις ορατές μπίλιες, αγνοώντας την κρυμμένη ποσότητα στα κουτιά ή υποθέτοντας μια σταθερή τιμή (π.χ. «κάθε κουτί πρέπει να έχει 10 μπίλιες»). Άλλοι/ες μπορεί να αναγνωρίσουν την ανάγκη ισορροπίας, αλλά να υπολογίσουν λάθος ή να ευθυγραμμίσουν λανθασμένα τη συλλογιστική τους, ίσως μαντεύοντας τον αριθμό σε ένα κουτί χωρίς να ελέγξουν αν αυτό οδηγεί σε ίσα σύνολα. Μια άλλη ομάδα μαθητών/τριών μπορεί να αντιμετωπίσει την οπτική εικόνα περιγραφικά και όχι αναλυτικά, αναφέροντας ό,τι είναι ορατό χωρίς να προσπαθήσει να συμπεράνει το άγνωστο. Αυτές οι συμπεριφορές υποδηλώνουν κενά στη δομική κατανόηση, ιδίως στην ερμηνεία των αγνώστων ως ποσοτήτων που πρέπει να προσδιοριστούν μέσω συμπερασμάτων που γίνονται με βάση τις γνωστές ποσότητες.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες επωφελούνται από την εργασία με πρακτικά υλικά που καθιστούν συγκεκριμένη την έννοια της ισοδυναμίας, π.χ. για να προχωρήσουν στις επόμενες τάξεις με σχετικούς αριθμούς. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν αφηγηματικά πλαίσια («Και τα δύο παιδιά πήραν τον ίδιο αριθμό μπίλιες — πόσες υπάρχουν στο κουτί;») για να ενισχύσουν την εμπλοκή και να εντάξουν το πρόβλημα σε ένα οικείο πλαίσιο. Το σχέδιο και η επισήμανση διαγραμμάτων όπου οι μαθητές/τριες γράφουν εξισώσεις όπως «$3 + x = 7$» μπορεί να βοηθήσει στη γεφύρωση του οπτικού συλλογισμού και της συμβολικής αναπαράστασης. Επιπλέον, η επαναλαμβανόμενη εξάσκηση στην αναγνώριση ίσων αλλά διαφορετικά συγκροτημένων συνόλων ενισχύει την έννοια της ισοδυναμίας και υποστηρίζει τη μετάβαση από την προσθετική συλλογιστική στην πρώιμη λειτουργική σκέψη. Όπως πάντα, οι μαθητές/τριες πρέπει να ενθαρρύνονται να εξηγούν το συλλογισμό τους και να ελέγχουν αν οι προτεινόμενες τιμές διατηρούν την ισορροπία.

Άσκηση 2.1: Αναπαράσταση και ερμηνεία ισοδύναμων κλασμάτων

Γραμμοσκιάστε τον δεύτερο κύκλο, ώστε να έχει γραμμοσκιασμένο το ίδιο κλάσμα με τον πρώτο και γράψτε τη σχετική ισότητα με τη βοήθεια κλασμάτων.

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{6}}$$

Λύση

Το σκιασμένο τμήμα του κύκλου στα δεξιά πρέπει να έχει την ίδια αναλογία μέρους προς σύνολο με τον κύκλο στα αριστερά. Δεδομένου ότι η αναλογία μέρους προς σύνολο στον κύκλο στα αριστερά είναι 1:3, η αναλογία στον κύκλο στα δεξιά πρέπει να είναι 2:6. (Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να αιτιολογηθεί διαισθητικά: αν χωρίσουμε ένα στρογγυλό κέικ σε έξι κομμάτια αντί για τρία, χρειαζόμαστε διπλάσια κομμάτια για να έχουμε την ίδια ποσότητα κέικ).

Μπορούμε επίσης να προχωρήσουμε τυπικά επεκτείνοντας το κλάσμα ως εξής:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση εστιάζει στην ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής ισοδύναμων κλασμάτων σε δύο αναπαραστατικές πτυχές: πρώτα σε οπτική μορφή (σκίαση τμημάτων ενός κύκλου) και στη συνέχεια σε συμβολική σημειογραφία (γραφή μιας ισότητας κλασμάτων). Στο μέρος (α), οι μαθητές/τριες καλούνται να συμπληρώσουν μια οπτική αναπαράσταση σκιάζοντας την ίδια αναλογία ενός κύκλου όπως φαίνεται σε ένα δεδομένο μοντέλο. Στο μέρος (β), αναμένεται να εκφράσουν αυτή τη σχέση ως μαθηματική ταυτότητα χρησιμοποιώντας κλάσματα. Η βασική δεξιότητα που εξετάζεται είναι ο συντονισμός μεταξύ της οπτικής κατανόησης του μέρους-συνόλου και της τυπικής αναπαράστασής του ως ισοδύναμων αριθμητικών κλασμάτων.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της κατανόησης των ρητών αριθμών και, ως εκ τούτου, αποτελεί βασική μαθηματική δεξιότητα. Αποτελεί το εννοιολογικό θεμέλιο για τις πράξεις με κλάσματα, την αναλογική συλλογιστική, τις έννοιες των αναλογιών και την αλγεβρική ισοδυναμία. Στο πλαίσιο του DiToM, η αναγνώριση ότι κλάσματα με διαφορετική μορφή μπορούν να αντιπροσωπεύουν την ίδια ποσότητα θεωρείται ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη ευελιξίας στη σκέψη των αριθμών. Οι μαθητές/τριες πρέπει να κατανοήσουν ότι ένα κλάσμα δεν αντιπροσωπεύει μόνο έναν αριθμό, αλλά και μια σχέση μεταξύ ενός μέρους και ενός συνόλου — και ότι αυτή η σχέση παραμένει σταθερή ακόμη και όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής μεταβληθούν ανάλογα. Οι ασκήσεις που συνδυάζουν οπτικά και συμβολικά επίπεδα προωθούν την βαθύτερη κατανόηση και υποστηρίζουν τη μετάβαση στον αφηρημένο συλλογισμό στα μεταγενέστερα μαθηματικά.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την εργασία;

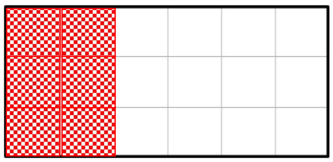
Οι μαθητές/τριες μπορεί να σκιάσουν έναν λανθασμένο αριθμό τμημάτων στον δεύτερο κύκλο, π.χ. αντιστοιχίζοντας τον αριθμό ενός σκιασμένου τμήματος αντί για το αναλογικό μέγεθος. Αυτό αποκαλύπτει μια στρατηγική μέτρησης αντί για σχεσιακή σκέψη, υποδηλώνοντας ότι βλέπουν τον αριθμητή ως στατικό αριθμό και όχι ως μέρος ενός συνόλου. Στο μέρος (β), οι μαθητές/τριες μπορεί να αντιγράψουν το δεδομένο κλάσμα χωρίς μετασχηματισμό, να γράψουν μη ισοδύναμα αλλά παρόμοια κλάσματα (π.χ. διπλασιάζοντας μόνο τον αριθμητή) ή να μπερδέψουν τη σειρά του αριθμητή και του παρονομαστή. Μερικοί/ές μπορεί να παραλείψουν εντελώς το σύμβολο της ισότητας, υποδηλώνοντας αβεβαιότητα σχετικά με τις συμβάσεις της σημειογραφίας των κλασμάτων. Αυτά είναι προειδοποιητικά σημάδια αδύναμης εννοιολογικής κατανόησης και περιορισμένης εμπειρίας στη σύνδεση οπτικών και συμβολικών αναπαραστάσεων.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Για να αποκτήσουν μια σταθερή κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων, οι μαθητές/τριες πρέπει να εργάζονται τακτικά με χειραπτικά και οπτικά μοντέλα — όπως κύκλους κλασμάτων, ράβδους ή πλακίδια — για να βλέπουν και να δημιουργούν ίσα μέρη σε διαφορετικές διαμερίσεις. Έμφαση πρέπει να δοθεί στον προσδιορισμό του πόσα μέρη από πόσα αποτελούν την ίδια αναλογία και πώς αλλάζουν παράλληλα τόσο ο αριθμός των σκιασμένων μερών όσο και ο συνολικός αριθμός των μερών. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να καθοδηγήσουν τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν με λόγια τη διαδικασία κλιμάκωσης, π.χ. «Διπλασίασα τον αριθμό των μερών και διπλασίασα τον αριθμό των σκιασμένων». Αυτό υποστηρίζει την εσωτερικοποίηση της πολλαπλασιαστικής δομής που βρίσκεται πίσω από την ισοδυναμία. Οι δραστηριότητες γεφύρωσης — π.χ. σκίαση, στη συνέχεια γραφή και τέλος λεκτική εξήγηση — είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές στη σταθεροποίηση της σύνδεσης μεταξύ οπτικών αναπαραστάσεων και τυπικών εξισώσεων κλασμάτων.

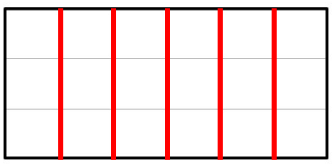
Άσκηση 2.2: Σκίαση ενός δεδομένου τμήματος ενός ορθογωνίου

Χρωματίστε τα $\frac{2}{6}$ του παρακάτω ορθογωνίου:

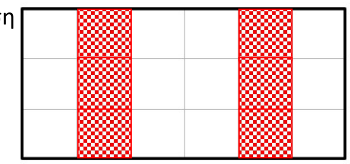


Λύση

Η λύση που παρουσιάζεται παραπάνω βασίζεται στη διαίρεση του ορθογωνίου σε έξι ίσα μέρη (στήλες) και στην επιλογή δύο από αυτά τα μέρη.

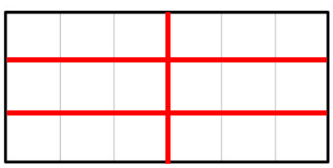


Άλλη μια σωστή απάντηση

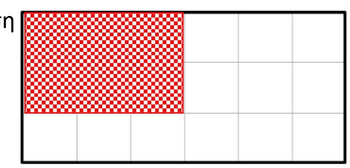


Φυσικά, οποιαδήποτε δύο από αυτά τα έξι κομμάτια μπορούν να σκιαγραφηθούν για να επιτευχθεί η σωστή λύση.

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να χωρίσουμε το ορθογώνιο σε έξι ίσα κομμάτια, για παράδειγμα:

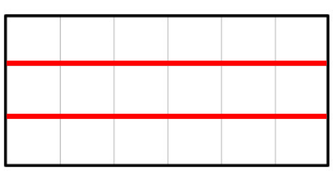


Άλλη μια σωστή απάντηση

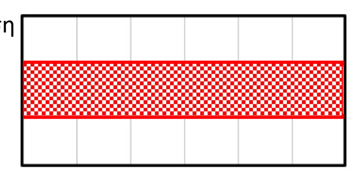


Οποιαδήποτε απάντηση που καλύπτει 6 μικρά τετράγωνα από τα συνολικά 18 μικρά τετράγωνα είναι σωστή.

Είναι επίσης σωστό να ερμηνεύσουμε $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ και να σκιάσουμε ένα κομμάτι από τα τρία.



Άλλη μια σωστή απάντηση



Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να κατασκευάσουν μια οπτική αναπαράσταση ενός δεδομένου κλάσματος, σκιάζοντας ένα συγκεκριμένο τμήμα μιας ορθογώνιας επιφάνειας. Οι μαθητές/τριες πρέπει να προσδιορίσουν τον σωστό αριθμό ίσων τμημάτων και να σκιάσουν τον αριθμό των τμημάτων που αντιστοιχεί στον αριθμητή, αναγνωρίζοντας παράλληλα ότι ο συνολικός αριθμός των τμημάτων αντιστοιχεί στον παρονομαστή. Αυτό απαιτεί την ερμηνεία των κλασμάτων ως τελεστών σε περιοχές, δηλαδή τη χρήση ενός κλάσματος για τον προσδιορισμό του μεγέθους ενός ολόκληρου τμήματος που εξετάζεται. Η εργασία απαιτεί ακριβή υποδιαίρεση, χωρική εκτίμηση και αναλογικό συλλογισμό.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η οπτική αναπαράσταση ενός κλάσματος είναι ένα βασικό βήμα για την ανάπτυξη της σχεσιακής και αναλογικής σκέψης, καθώς και για τη γεφύρωση της άτυπης και της τυπικής γνώσης των κλασμάτων. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτή η δεξιότητα θεωρείται θεμελιώδης, καθώς υποστηρίζει την μετέπειτα κατανόηση της ισοδυναμίας, της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων και του συλλογισμού που σχετίζεται με το εμβαδόν στη γεωμετρία. Η αναπαράσταση των κλασμάτων σε ένα οπτικό μοντέλο, όπως ένα ορθογώνιο, ενισχύει επίσης την κατανόηση ότι τα κλάσματα δεν αφορούν απλώς διακριτά μέρη (όπως μπίλιες ή μετρητές), αλλά και συνεχείς ποσότητες και περιοχές. Οι μαθητές/τριες που μπορούν να μετακινούνται με ευελιξία μεταξύ της σημειογραφίας των κλασμάτων και των οπτικών μοντέλων τείνουν να αναπτύσσουν βαθύτερες, πιο συνδεδεμένες έννοιες αριθμών και είναι καλύτερα προετοιμασμένοι για την αφηρημένη εργασία στην άλγεβρα και πέραν αυτής.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την εργασία;

Συνηθισμένα λάθη περιλαμβάνουν τη σκίαση λανθασμένου αριθμού τμημάτων, συχνά λόγω λανθασμένου υπολογισμού ή λανθασμένης αναγνώρισης του συνολικού αριθμού των υποδιαιρέσεων. Οι μαθητές/τριες μπορεί να σκιάσουν τμήματα που δεν είναι ίσα σε μέγεθος, παραβιάζοντας έτσι την απαίτηση ότι τα κλασματικά τμήματα πρέπει να έχουν ίση επιφάνεια. Άλλοι/ες μπορεί να σκιάσουν τυχαία χωρίς να δημιουργήσουν καμία σχέση με το δεδομένο κλάσμα, δείχνοντας έλλειψη κατανόησης του μέρους-όλου. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές/τριες αγνοούν τον παρονομαστή και απλώς μετρούν τις μονάδες (π.χ. σκιάζουν δύο μέρη ανεξάρτητα από το πόσα είναι συνολικά). Αυτά τα μοτίβα υποδηλώνουν δυσκολίες στο συντονισμό του συμβολικού κλάσματος με το οπτικό μοντέλο και στην κατανόηση του δομικού περιορισμού που ορίζει ένα έγκυρο κλάσμα.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Η στοχευμένη υποστήριξη πρέπει να περιλαμβάνει πρακτικές δραστηριότητες με λωρίδες κλασμάτων, δίπλωμα χαρτιού ή μοντέλα επιφάνειας με βάση πλέγμα. Οι μαθητές/τριες πρέπει να ενθαρρύνονται να χωρίζουν πρώτα τα σχήματα σε ίσα μέρη πριν εφαρμόσουν τον τελεστή (π.χ. «Σκιάστε 3 από τα 4 ίσα μέρη»). Είναι χρήσιμο να παρουσιάζονται παραδείγματα και μη παραδείγματα — π.χ. ορθογώνια όπου τα μέρη δεν είναι ίσα — για να διευκρινιστεί τι θεωρείται έγκυρη αναπαράσταση κλασμάτων. Η σύνδεση των εργασιών σκίασης με τη συμβολική γραφή και τη λεκτική εξήγηση («Το χώρισα σε 6 ίσα μέρη και σκίασα τα 4 από αυτά, οπότε είναι τέσσερα έκτα») υποστηρίζει την ενσωμάτωση των αναπαραστάσεων. Με την πάροδο του χρόνου, οι μαθητές/τριες πρέπει να εξασκηθούν με διαφορετικά σχήματα και προσανατολισμούς για να γενικεύσουν την κατανόησή τους πέρα από συγκεκριμένα σχήματα.

Άσκηση 2.3: Αναλογικός συλλογισμός με ποσότητες και τιμές

Τα 2 κιλά πατάτες κοστίζουν 5 €.Πόσο κοστίζουν τα 6 κιλά πατάτες;

Απάντηση: 15 €

Λύση

Ο/Η μαθητής/τρια που αναγνωρίζει ότι 6 kg είναι 3 φορές περισσότερο από 2 kg μπορεί να συμπεράνει ότι 6 kg πρέπει να κοστίζουν 3 φορές περισσότερο από 2 kg. Επομένως, η τιμή για 6 kg είναι 3·5=15 €.

Αυτή η αναλογική συλλογιστική μπορεί να υποστηριχθεί με ημι-τυπική σημειογραφία, όπως

$$\begin{array}{l} 2\text{ kg} \longrightarrow 5\text{ €} \\ 6\text{ kg} \longrightarrow ?\text{ €} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} 2\text{ kg} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\cdot \mathbf{3}"'] & 5\text{ €} \arrow[d, bend left, "\cdot \mathbf{3}"] \\ 6\text{ kg} \arrow[r] & ?\text{ €} \end{tikzcd}$$

Ή, πιο τυπικά:

$$\frac{5}{2} = \frac{?}{6} \quad \left(\text{or} \quad \frac{?}{6} = \frac{5}{2} \quad \text{or} \quad \frac{6}{2} = \frac{?}{5} \quad \text{or} \quad \frac{?}{5} = \frac{6}{2}\right)$$

Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να εφαρμόζουν πολλαπλασιαστικό συλλογισμό για την επίλυση ενός αναλογικού προβλήματος που αφορά τιμές και ποσότητες. Το πλαίσιο —ο προσδιορισμός της τιμής για 6 κιλά πατάτες, δεδομένου ότι 2 κιλά κοστίζουν 5 ευρώ— απαιτεί από τους/τις μαθητές/τριες να αναγνωρίσουν και να διατηρήσουν μια σταθερή αναλογία μεταξύ ποσότητας και τιμής. Για να λύσουν σωστά το πρόβλημα, οι μαθητές/τριες πρέπει είτε να κλιμακώσουν το ζεύγος ποσότητας-τιμής με συντελεστή 3 είτε να υπολογίσουν την τιμή μονάδας (τιμή ανά κιλό) και στη συνέχεια να πολλαπλασιάσουν. Η δεξιότητα που εξετάζεται είναι η κατανόηση και η εφαρμογή πολλαπλασιαστικών δομών σε λειτουργικές σχέσεις, η οποία αποτελεί βασικό θεμέλιο των προβλημάτων αναλογίας, αναλογίας και ποσοστού στα μεταγενέστερα μαθηματικά.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Ο αναλογικός συλλογισμός είναι μια σημαντική μαθηματική δεξιότητα στη δευτεροβάθμια μαθηματική εκπαίδευση. Σύμφωνα με το DiToM, η ικανότητα αναγνώρισης και εργασίας με σταθερές σχέσεις — όπως «2 kg → 5 €» που κλιμακώνεται σε «6 kg → ? €» — είναι κρίσιμη όχι μόνο στην αριθμητική, αλλά και στην άλγεβρα, στη λειτουργική κατανόηση, στη γεωμετρία, στις φυσικές επιστήμες και στην επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Οι μαθητές/τριες που κατέχουν αυτές τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μπορούν να γενικεύουν σε διάφορα πλαίσια και να επιλέγουν με ευελιξία αποτελεσματικές στρατηγικές (π.χ. διπλασιασμός, διαίρεση στο μισό, συλλογιστική μονάδας τιμής). Επιπλέον, η μετάβαση από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σύγκριση αντικατοπτρίζει ένα αναπτυξιακό άλμα στην μαθηματική κατανόηση που υποστηρίζει τη μελλοντική μάθηση σε γραμμικές συναρτήσεις και αναλογικά μοντέλα.

Τι είδους σφάλματα και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορεί να αναμένονται σε αυτή την εργασία;

Συνηθισμένα λάθη περιλαμβάνουν την προσθετική προσέγγιση, όπως η υπόθεση ότι αν 2 κιλά κοστίζουν 5 ευρώ, τότε 6 κιλά πρέπει να κοστίζουν 5 + 4 = 9 ευρώ. Αυτό αντανακλά την αδυναμία κατανόησης της πολλαπλασιαστικής φύσης της σχέσης. Μερικοί μαθητές/τριες μπορεί να πολλαπλασιάσουν άμεσα το 5 με το 6 (με αποτέλεσμα 30 €), παρερμηνεύοντας τη σημασία των αριθμών που εμπλέκονται. Άλλοι/ες μπορεί να δυσκολεύονται να συντονίσουν τις μονάδες — αναμειγνύοντας κιλά και ευρώ — ή απλά να μαντέψουν με βάση την εκτίμηση. Αυτά τα λάθη υποδηλώνουν κενά στη δομική κατανόηση και πιθανώς περιορισμένη εμπειρία με τη συλλογιστική που βασίζεται σε αναλογίες. Οι μαθητές/τριες που δεν εκφράζουν τη στρατηγική τους ή που βασίζονται στη μέθοδο δοκιμής και σφάλματος συχνά στερούνται ενός αξιόπιστου εννοιολογικού μοντέλου για την αναλογικότητα.

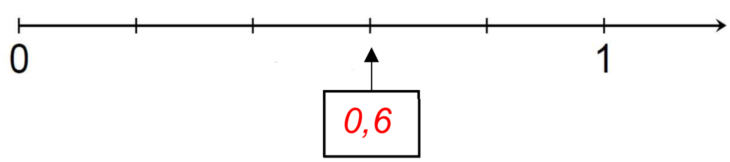
Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες επωφελούνται από προβλήματα πλούσια σε περιεχόμενο που αφορούν χρήματα, συνταγές ή μετρήσεις, όπου οι αναλογικές δομές εμφανίζονται φυσικά. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να παρουσιάζουν ρητά στρατηγικές όπως η σκέψη με βάση τη μοναδιαία τιμή («Αν 2 κιλά κοστίζουν 5 €, τότε 1 κιλό κοστίζει 2,50 €...») ή η κλιμάκωση με βάση τους παράγοντες («6 κιλά είναι 3 φορές 2 κιλά, οπότε η τιμή είναι 3 · 5 €»). Οπτικά βοηθήματα όπως διπλές αριθμητικές γραμμές, πίνακες αναλογιών και μοντέλα ράβδων μπορούν να κάνουν την πολλαπλασιαστική σχέση πιο εύκολη στην κατανόηση. Είναι επίσης χρήσιμο να αντιπαραβάλλετε τις στρατηγικές πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στις συζητήσεις στην τάξη, για να τονίσετε τις διαφορετικές επιπτώσεις τους. Ενθαρρύνοντας τους/τις μαθητές/τριες να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τη συλλογιστική τους, υποστηρίζετε τη μεταγνωστική ανάπτυξη και βοηθάτε στην εμβάθυνση της κατανόησης των αναλογικών δομών.

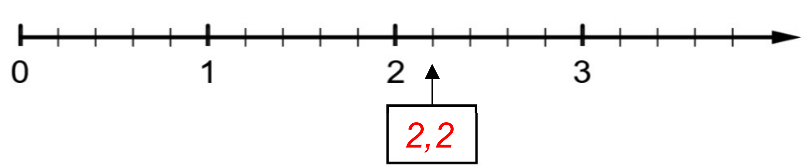
Άσκηση 3.1: Συμβολική αναπαράσταση αριθμών σε αριθμητικό άξονα

Γράψτε έναν αριθμό στο κουτί που αντιπροσωπεύει τη θέση στον αριθμητικό άξονα.

a)



b)



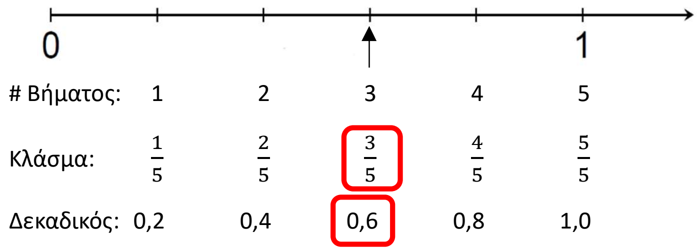
Λύση

Δύο πιθανές στρατηγικές:

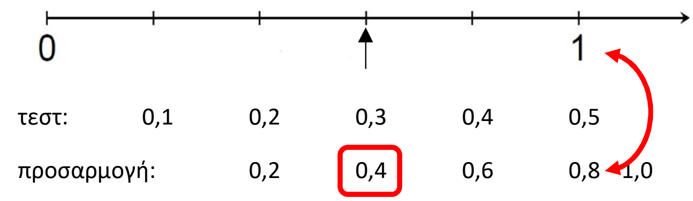
1) Μετρώντας τον αριθμό των βημάτων (ή υποδιαστημάτων) από το 0 έως το 1.

2) Δοκιμάζοντας ακολουθίες δεκαδικών αριθμών (ή κλασμάτων) από το 0 έως το 1.

Πρώτη λύση στο α): Αναλυτικά, η πρώτη στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί μετρώντας 5 βήματα από το 0 έως το 1.



Δεύτερη λύση: Μια πιθανότητα είναι να δοκιμάσουμε το 0,1 για την πρώτη θέση στα δεξιά του 0. Αυτή η επιλογή 0,1 έχει ως αποτέλεσμα το 0,5 που δεν ταιριάζει με το 1 στον αριθμητικό άξονα. Η αλλαγή στο 0,2 έχει ως αποτέλεσμα το 1,0 που ταιριάζει με το 1 στον αριθμητικό άξονα.



Βασική δεξιότητα που εξετάζεται με αυτή την εργασία

Αυτή η άσκηση στοχεύει στην ικανότητα των μαθητών/τριών να ερμηνεύουν έναν αριθμητικό άξονα που χωρίζεται σε υποδιαστήματα και να τοποθετούν ένα κλάσμα ή έναν δεκαδικό αριθμό κατάλληλα με βάση τη σχετική του θέση μεταξύ 0 και 1 (ή πέρα από αυτό). Οι μαθητές/τριες πρέπει να αναλύσουν τις υποδιαιρέσεις της γραμμής, να προσδιορίσουν τη μονάδα και να εντοπίσουν το σωστό κλάσμα ή δεκαδικό αριθμό που σηματοδοτεί ένα δεδομένο σημείο. Αυτό απαιτεί την κατανόηση των κλασμάτων ως αριθμών που αντιπροσωπεύουν μεγέθη, και όχι μόνο ως σχέσεων μέρους-συνόλου. Η άσκηση εξετάζει επίσης την ικανότητα συντονισμού συμβολικών και χωρικών αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα εντοπισμού των κλασμάτων σε έναν αριθμητικό άξονα είναι μια κρίσιμη μαθηματική δεξιότητα, καθώς αντανακλά μια μετατόπιση στην κατανόηση των κλασμάτων από μέρη αντικειμένων σε αριθμούς σε μια συνεχή κλίμακα. Αυτή η χωρική ερμηνεία των κλασμάτων θέτει τα θεμέλια για τη σύγκριση, την ταξινόμηση και τον υπολογισμό με κλάσματα. Στο πλαίσιο του DiToM, η εκτίμηση και η τοποθέτηση στον αριθμητικό άξονα θεωρούνται ισχυροί δείκτες εννοιολογικής σαφήνειας. Έρευνες (π.χ. Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) δείχνουν ότι οι μαθητές/τριες που κατανοούν τη μετρική δομή του αριθμητικού άξονα έχουν περισσότερες πιθανότητες να επιτύχουν στη μετέπειτα αριθμητική, άλγεβρα και γεωμετρία. Επιπλέον, ο αριθμητικός άξονας προσφέρει ένα ενοποιημένο μοντέλο που υποστηρίζει τις μεταβάσεις μεταξύ φυσικών αριθμών, κλασμάτων, δεκαδικών και αρνητικών αριθμών.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

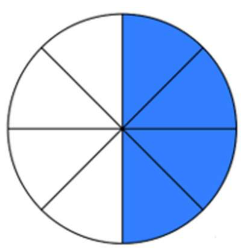
Οι μαθητές/τριες συχνά βασίζονται στην καταμέτρηση των γραμμών, υποθέτοντας μια δεκαδική υποδιαίρεση της μονάδας αντί να συλλογίζονται το κλασματικό μέγεθος. Για παράδειγμα, μπορεί να παρερμηνεύσουν τέσσερις διαιρέσεις ως «τέταρτα», ανεξάρτητα από το αν το σύνολο υποδιαιρείται σε ίσα μέρη ή όχι. Ένα άλλο συνηθισμένο λάθος είναι η τοποθέτηση του κλάσματος σε λάθος θέση—π.χ., η τοποθέτηση του 3/4 στο 2/3 λόγω έλλειψης αναλογικού συλλογισμού. Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να μαντέψουν με βάση την οπτική διαίσθηση αντί να υπολογίσουν τον παρονομαστή που υπονοείται από τις διαιρέσεις. Σε πιο προχωρημένες παραλλαγές, οι μαθητές/τριες μπορεί να δυσκολευτούν όταν ο αριθμητικός άξονας δεν ξεκινά από το 0 ή όταν εμπλέκονται καταχρηστικά κλάσματα ή μικτοί αριθμοί. Αυτά τα σφάλματα υποδεικνύουν ανεπαρκή ενσωμάτωση του μεγέθους, του συμβολισμού και της δομής. Υπάρχουν επίσης μαθητές/τριες που δίνουν έναν λανθασμένο δεκαδικό αριθμό ως λύση. Ανατρέξτε στην ερώτηση 3.4, η οποία αντιμετωπίζει αυτό το ζήτημα.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Για να υποστηρίξουμε τους μαθητές/τριες, είναι απαραίτητο να αφιερώσουμε χρόνο για να οικοδομήσουμε ένα ισχυρό νοητικό μοντέλο της αριθμογραμμής που να περιλαμβάνει κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαδραστικά εργαλεία όπως λωρίδες αναδίπλωσης, χάρακες κλασμάτων και ψηφιακές αριθμητικές γραμμές για να αναπτύξουν αναλογικό συλλογισμό. Η διδασκαλία θα πρέπει να επικεντρώνεται στο πώς να προσδιορίσουμε το μέγεθος ενός διαστήματος μονάδας, πώς να μετράμε κλασματικά βήματα και πώς να συσχετίσουμε αυτά τα βήματα με το γραπτό σύμβολο. Η σύγκριση διαφορετικών κλασμάτων στην ίδια γραμμή βοηθά στην ενίσχυση της κατανόησης του σχετικού μεγέθους και της ισοδυναμίας. Δραστηριότητες γεφύρωσης – όπως η σχεδίαση κλασμάτων σε μια γραμμή, στη συνέχεια η γραφή τους σε συμβολική μορφή και αντίστροφα ή η σύνδεση με εικονικές αναπαραστάσεις που είναι ήδη γνωστές στους/στις μαθητές/τριες (π.χ. διαγράμματα κύκλων) – ενισχύουν τις αναπαραστατικές συνδέσεις. Η συχνή φωνητική εκφορά («Αυτό είναι το τρίτο από τα τέσσερα τμήματα, άρα είναι τρία τέταρτα») προάγει την εσωτερίκευση της δομής.

Άσκηση 3.2: Επιλογή του σωστού κλάσματος ενός σκιασμένου κύκλου

Ποιο μέρος του κύκλου είναι χρωματισμένο;



☑ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{8}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$

Λύση

Στην αρχική εικόνα, υπάρχουν 4 σκιασμένα μέρη και συνολικά 8 μέρη. Το αντίστοιχο κλάσμα είναι

$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} \qquad \left(\text{or} \quad \frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}\right)$$

Μια άλλη πιθανότητα είναι να αγνοήσουμε τις γραμμές και να ερμηνεύσουμε το σκιασμένο μέρος ως το *μισό* ολόκληρου του κύκλου.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η δραστηριότητα στοχεύει στην ικανότητα των μαθητών/τριών να αναγνωρίζουν ένα κλάσμα με βάση μια οπτική αναπαράσταση μέρους-όλου και να επιλέγουν τη σωστή συμβολική αναπαράσταση αυτού του κλάσματος από πολλαπλές επιλογές. Στην εικόνα, ένας κύκλος είναι χωρισμένος σε οκτώ ίσα μέρη και τα τέσσερα από αυτά τα μέρη είναι σκιασμένα. Το σωστό κλάσμα είναι επομένως 4/8, το οποίο απλοποιείται σε 1/2. Ωστόσο, οι μαθητές/τριες δεν πρέπει μόνο να αναγνωρίσουν αυτή τη σχέση, αλλά και να τη διακρίνουν από άλλες πιθανές αλλά εσφαλμένες λύσεις, όπως το 1/4, το 1/8, ή ακόμα και το 8/4. Η βασική δεξιότητα που ελέγχεται είναι ο συντονισμός μεταξύ της οπτικής, αριθμητικής και δομικής κατανόησης των κλασμάτων.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η ικανότητα ερμηνείας των κλασμάτων από οπτικά μοντέλα και η σωστή αντιστοίχισή τους σε συμβολικές αναπαραστάσεις αποτελεί θεμελιώδη δεξιότητα στην κατανόηση των ρητών αριθμών. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτό το έργο αξιοποιεί την έννοια των κλασμάτων ως λόγων μέρους προς όλο, η οποία είναι κεντρική για πιο προχωρημένες έννοιες όπως η ισοδυναμία, οι πράξεις με κλάσματα και η αναλογικότητα. Σημαντικό είναι ότι η εργασία εισάγει μια εννοιολογική «παγίδα» —το 8/4 είναι αριθμητικά μεγαλύτερο από το όλο, παρόλο που οι αριθμοί είναι σωστοί (απλώς αντεστραμμένοι). Η αναγνώριση αυτής της αναντιστοιχίας απαιτεί κάτι περισσότερο από οπτική μέτρηση. Απαιτεί κατανόηση της δομής των κλασμάτων, της κλίμακας και της σημασίας τους.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

Η λανθασμένη λύση 8/4 είναι ιδιαίτερα ελκυστική επειδή περιλαμβάνει τους δύο αριθμούς που υπάρχουν στην εικόνα—8 μέρη συνολικά και 4 σκιασμένα—αλλά αντιστρέφει τη σειρά τους. Η επιλογή του 1/8 ή του 1/4 θα μπορούσε να υποδηλώνει παρερμηνεία της αναλογίας, είτε μετρώντας μόνο το σκιασμένο μέρος είτε παραλείποντας να λάβει υπόψη το σύνολο. Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες θα μπορούσαν να καταφύγουν σε οικεία «κλασματικά σημεία αναφοράς» όπως το 1/4 ή το 1/2 χωρίς ανάλυση. Αυτά είναι όλα προειδοποιητικά σημάδια ατελούς κατανόησης των κλασμάτων, ιδιαίτερα όσον αφορά τον συντονισμό μέρους-όλου και τη συμβολική ερμηνεία.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες επωφελούνται από πρακτικές δραστηριότητες χρησιμοποιώντας κύκλους κλασμάτων ή διπλώνοντας χάρτινα σχήματα, όπου μπορούν να διαιρέσουν και να χρωματίσουν φυσικά μέρη ενός συνόλου. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να τονίζουν τους ρόλους του αριθμητή και του παρονομαστή μέσω συνεπούς λεκτικής έκφρασης («4 μέρη χρωματισμένα από 8 ίσα μέρη – αυτό είναι 4 όγδοα… και το γράφω με αυτόν τον τρόπο: 4/8»). Η εξάσκηση στην αντιστοίχιση οπτικών μοντέλων με πολλαπλές εκφράσεις κλασμάτων, συμπεριλαμβανομένων αυτών που είναι μεγαλύτερα από 1, μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες να διακρίνουν μεταξύ κανονικών, ακατάλληλων και ισοδύναμων κλασμάτων. Η ενθάρρυνση των μαθητών/τριών να εξηγήσουν γιατί ένα κλάσμα όπως το 8/4 δεν μπορεί να αντιπροσωπεύει λιγότερο από ένα ακέραιο, καλλιεργεί την κριτική σκέψη και υποστηρίζει την κατανόηση. Η ανάδειξη κοινών λαθών μέσω καθοδηγούμενης συζήτησης (π.χ., «Γιατί κάποιος μπορεί να πιστεύει ότι το 8/4 είναι σωστό;») μπορεί να βοηθήσει να γίνουν οι παρανοήσεις ρητές και να αντιμετωπιστούν άμεσα.

Άσκηση 3.3: Σύγκριση καταχρηστικού κλάσματος με φυσικούς αριθμούς

Σημειώστε με ένα ✓ **όλους** τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από $\frac{10}{3}$

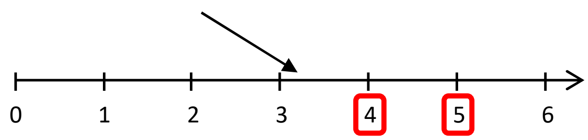
☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☑ 5

Λύση

Πρώτη λύση: Ξεκινήστε υπολογίζοντας $\frac{10}{3} = 3{,}33\ldots$ ή σπάζοντας το κλάσμα $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Ανάμεσα στους αριθμούς 2, 3, 4, 5, μόνο το 4 και το 5 είναι μεγαλύτερα από το 3,33.

Δεύτερη λύση: Τοποθετήστε το 10/3 σε μια αριθμογραμμή (ως κλάσμα, ως μικτός αριθμός 3 1/3, ή ως 3,33…) και συγκρίνετε τις θέσεις με τις 2, 3, 4, 5



Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να συγκρίνουν ένα κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του 1 (10/3) με διάφορους φυσικούς αριθμούς. Οι μαθητές/τριες πρέπει να εντοπίσουν όλους τους αριθμούς στο σύνολο {2, 3, 4, 5} που είναι μεγαλύτεροι από το 10/3. Αφού το 10/3 είναι ίσο με 3+1/3 ή περίπου 3,33, η σωστή λύση είναι να επιλέξουμε τόσο το 4 όσο και το 5. Σημαντικό είναι ότι το στοιχείο βαθμολογείται ως σωστό μόνο αν επιλεγούν και οι δύο τιμές και δεν επιλεγεί καμία από τις λανθασμένες επιλογές.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική;

Η σύγκριση κλασμάτων με ακέραιους αριθμούς είναι μια βασική μαθηματική δεξιότητα, καθώς συνδέει τα συστήματα ρητών και ακέραιων αριθμών, υποστηρίζοντας την ανάπτυξη ενός συνεκτικού μοντέλου αριθμητικής γραμμής. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτή η σύγκριση προάγει την κατανόηση του μεγέθους των κλασμάτων, της εκτίμησης και της μετάβασης μεταξύ κλασματικών και δεκαδικών ή μικτών αναπαραστάσεων. Η ικανότητα να προσδιορίζουμε αν ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από έναν ακέραιο αριθμό είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη ευελιξίας στην ερμηνεία αριθμητικών πληροφοριών. Επιπλέον, αυτή η δεξιότητα υποστηρίζει την επιτυχία σε εργασίες που περιλαμβάνουν μετρήσεις, κλιμάκωση και ερμηνεία συναρτήσεων – τομείς όπου οι ορθολογιστικές-φυσικές συγκρίσεις εμφανίζονται τακτικά.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

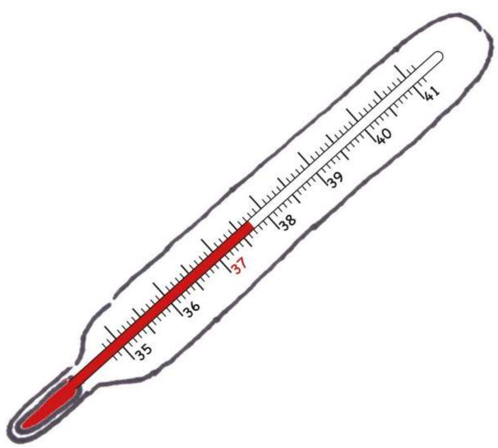
Οι μαθητές/τριες μπορεί να μετατρέψουν το 10/3 εσφαλμένα, π.χ., εκτιμώντας το ως 2 ή 5, οδηγώντας σε ανακριβείς απαντήσεις στα κουτάκια επιλογής. Μια κοινή παρανόηση είναι η εστίαση μόνο στον αριθμητή και τον παρονομαστή μεμονωμένα – π.χ., η υπόθεση ότι το 10/3 είναι μικρότερο από το 4 επειδή «το 3 είναι μεγαλύτερο από το 1». Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να επιλέξουν μόνο μία σωστή επιλογή (π.χ., 4), παρερμηνεύοντας την οδηγία της άσκησης ή αποτυγχάνοντας να αναγνωρίσουν ότι υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές τιμές. Άλλοι/ες μπορεί να τσεκάρουν όλους τους αριθμούς μεγαλύτερους από το 3, μαντεύοντας με βάση την μερική ανάκληση. Αυτά τα λάθη αποκαλύπτουν έλλειψη ευχέρειας με τα καταχρηστικά κλάσματα και δυσκολίες στον ευέλικτο συλλογισμό μεταξύ των αναπαραστάσεων (π.χ., μετατροπή του 10/3 σε 3⅓).

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να εξασκούνται τακτικά στη σύγκριση ακατάλληλων κλασμάτων τόσο με φυσικούς αριθμούς όσο και με μικτούς αριθμούς. Οπτικά εργαλεία όπως οι αριθμογραμμές ή οι λωρίδες κλασμάτων μπορούν να βοηθήσουν να διευκρινιστεί πού βρίσκεται ένα δεδομένο κλάσμα σε σχέση με τα βασικά αριθμητικά σημεία. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να καθοδηγήσουν τους/τις μαθητές/τριες να εκφράσουν ακατάλληλα κλάσματα σε μεικτή μορφή (π.χ., 10/3 = 3⅓) για να υποστηρίξουν την εκτίμηση και τη σύγκριση. Οι ασκήσεις που περιλαμβάνουν λεκτικό συλλογισμό («Είναι το 10/3 μεγαλύτερο ή μικρότερο από το 4;») και εργασίες επεξήγησης (π.χ., αιτιολόγηση γιατί το 3 δεν είναι σωστό) βοηθούν στην προώθηση της εννοιολογικής κατανόησης. Σε εργασίες με πολλαπλές σωστές απαντήσεις, είναι επίσης χρήσιμο να τονιστεί η λεκτική ερμηνεία της εργασίας – πώς να ερμηνεύονται με ακρίβεια και πλήρως οδηγίες του τύπου «σημειώστε όλα όσα ισχύουν».

Άσκηση 3.4: Ανάγνωση δεκαδικών αριθμών από ένα θερμόμετρο

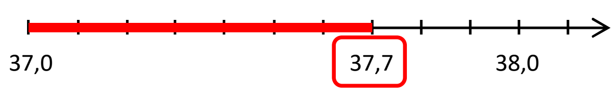
Γράψτε τη θερμοκρασία που δείχνει το θερμόμετρο σε °C.



Απάντηση: 37,7 °C

Λύση

Το θερμόμετρο είναι βαθμονομημένο σε δεκαδικούς αριθμούς (μονάδα βαθμός Κελσίου). Σύγκριση με μια αριθμογραμμή:



Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία εξετάζει την ικανότητα των μαθητών/τριών να ερμηνεύουν και να διαβάζουν δεκαδικούς αριθμούς σε μια βαθμονομημένη κλίμακα, ενσωματωμένη σε ένα πλαίσιο της πραγματικής ζωής (ένα θερμόμετρο). Στους μαθητές/τριες δείχνεται ένα αναλογικό θερμόμετρο με βαθμονομήσεις Κελσίου και μια κόκκινη στήλη υγρού που ανεβαίνει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο – συγκεκριμένα, στους 37,7 °C. Για να λύσουν σωστά την άσκηση, οι μαθητές/τριες πρέπει να προσδιορίσουν την ένδειξη της θερμοκρασίας από τη δοσμένη οπτική αναπαράσταση και να την εκφράσουν σε δεκαδική μορφή. Η βασική δεξιότητα που ελέγχεται εδώ είναι η ικανότητα ακριβούς ανάγνωσης και ερμηνείας δεκαδικών ποσοτήτων σε μια συνεχόμενη, μετρική κλίμακα σε ένα οικείο πλαίσιο.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Στο πλαίσιο του DiToM, η ερμηνεία μετρήσεων σε γραμμικές κλίμακες αποτελεί μια θεμελιώδη μαθηματική δεξιότητα, καθώς ενσωματώνει την κατανόηση αξίας θέσης, την εκτίμηση του μεγέθους και τον μετρικό συλλογισμό. Η ερμηνεία των δεκαδικών αριθμών είναι απαραίτητη για τις καθημερινές καταστάσεις – θερμοκρασία, χρήματα, μήκος, βάρος – και αποτελεί τη βάση για περαιτέρω εργασία σε ποσοστά, κλάσματα και συναρτήσεις. Επιπλέον, η ανάγνωση κλιμάκων σε αυθεντικά πλαίσια υποστηρίζει τον μαθηματικό γραμματισμό, καθώς οι μαθητές/τριες πρέπει να κατανοήσουν τα βαθμονομημένα εργαλεία μέτρησης στην υγεία, την επιστήμη ή την καθημερινή ζωή. Η σύνδεση μεταξύ οπτικών πληροφοριών και αριθμητικής αναπαράστασης ενισχύει την ικανότητα των μαθητών/τριών να συνδέουν συνεχείς ποσότητες με ακρίβεια στο συμβολισμό.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν τις λεπτές υποδιαιρέσεις στην κλίμακα, ειδικά αν οι αυξήσεις είναι δέκατα (βήματα 0,1) αντί για ακέραιους αριθμούς. Συνηθισμένα λάθη περιλαμβάνουν τη στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό (π.χ., 38 αντί για 37,7), την παράλειψη της υποδιαστολής (γράφοντας 377), ή την εσφαλμένη μέτρηση των γραμμών λόγω άγνοιας της δομής των δεκαδικών αριθμών. Άλλοι/ες μπορεί να συγχέουν την αξία κάθε διαστήματος – π.χ., υποθέτοντας ότι η απόσταση μεταξύ του 37 και του 38 διαιρείται σε 5 αντί για 10 ίσα μέρη. Αυτά τα λάθη συχνά προέρχονται από ανεπαρκή κατανόηση της αξίας θέσης, περιορισμένη ευχέρεια με τους δεκαδικούς αριθμούς ή έλλειψη εμπειρίας στην ερμηνεία των κλιμάκων μέτρησης.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες επωφελούνται από την επανειλημμένη έκθεση σε κλιμακωτά όργανα μέτρησης, όπως θερμόμετρα, χάρακες και ογκομετρικούς κυλίνδρους. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να δίνουν το παράδειγμα πώς να αναλύουν τα διαστήματα, να καθορίζουν το μέγεθος του βήματος και να μετρούν προς τα εμπρός χρησιμοποιώντας υποδιαιρέσεις δεκαδικών. Η χρήση διαφανών επιθέτων ή χρωματιστών μαρκαδόρων για την παρακολούθηση των επιπέδων υγρών μπορεί να βελτιώσει την οπτική ευθυγράμμιση. Οι μαθητές/τριες θα πρέπει επίσης να εξασκηθούν στην ανάγνωση και τη γραφή δεκαδικών αριθμών σε πλούσιες σε περιεχόμενο καταστάσεις, υποστηριζόμενοι/ες από μοντέλα αριθμογραμμής που γεφυρώνουν τη συμβολική και τη οπτική σκέψη. Η έμφαση στην ακρίβεια της γλώσσας («τρία δέκατα περισσότερα από τριάντα επτά») μπορεί να βοηθήσει στην ενίσχυση της εννοιολογικής σαφήνειας γύρω από την αξία θέσης των δεκαδικών ψηφίων. Τέλος, στοχευμένες εργασίες που συγκρίνουν τιμές όπως 37,7, 37,8 και 38,0 μπορούν να βελτιώσουν τη λεπτομερή διάκριση δεκαδικών ψηφίων.

Άσκηση 3.5: Σύγκριση δεκαδικών αριθμών

Προσδιορίστε τον μεγαλύτερο αριθμό:

☑ $3{,}33$ ☐ $3{,}303$ ☐ $3{,}03$ ☐ $3{,}3$

Λύση

Οι τέσσερις αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν ως

$$3{,}33 = 3 + 0{,}3 + 0{,}03$$

$$3{,}303 = 3 + 0{,}3 + 0{,}003$$

$$3{,}03 = 3 + 0{,}03$$

$$3{,}3 = 3 + 0{,}3$$

Συγκρίνοντας ζεύγη αριθμών, θα πρέπει να είναι προφανές ότι ο μεγαλύτερος αριθμός είναι 3,33.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να συγκρίνουν και να διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς, ειδικά αυτούς που είναι κοντά στην τιμή τους και διαφέρουν στον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων. Οι μαθητές/τριες πρέπει να προσδιορίσουν ποιο από τα τέσσερα δοσμένα δεκαδικά ψηφία (0,33, 0,303, 0,03, 0,3) είναι το μεγαλύτερο. Για να το επιτύχουν, πρέπει να καταλάβουν ότι η αξία θέσης καθορίζει το μέγεθος, όχι ο αριθμός των ψηφίων ή το φαινομενικό «μήκος» του δεκαδικού. Η άσκηση ελέγχει συγκεκριμένα την ακρίβεια στην ερμηνεία σε μια αριθμητική γραμμή μέχρι το εκατοστό και το χιλιοστό της θέσης και την ικανότητα αναγνώρισης ότι το 3,33 είναι μεγαλύτερο από το 3,303, παρόλο που το δεύτερο έχει περισσότερα ψηφία.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η σύγκριση δεκαδικών αριθμών είναι μια βασική μαθηματική δεξιότητα επειδή αντικατοπτρίζει την κατανόηση της αξίας θέσης στο δεκαδικό σύστημα πέρα από τους ακέραιους αριθμούς. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτό είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη ικανοτήτων στην εκτίμηση, τη μέτρηση και την αριθμητική στον πραγματικό κόσμο (π.χ. τιμές, ερμηνεία δεδομένων). Η σύγκριση δεκαδικών αριθμών υποστηρίζει επίσης μεταγενέστερη εργασία σε ποσοστά, άλγεβρα και επιστημονικά πλαίσια. Η εργασία αντικατοπτρίζει πώς συλλογίζονται οι μαθητές/τριες σχετικά με το σχετικό μέγεθος και αν επικεντρώνονται στην αξία αντί για την επιφανειακή δομή, όπως ο αριθμός των ψηφίων ή το οπτικό μήκος των τμημάτων. Αυτή η δεξιότητα είναι θεμελιώδης τόσο για τον νοερό υπολογισμό όσο και για την ερμηνεία δεδομένων σε μορφή πίνακα ή γραφήματος.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

Μια συχνή παρανόηση είναι ότι οι μεγαλύτεροι σε έκταση δεκαδικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι—π.χ., οι μαθητές/τριες μπορεί να επιλέξουν εσφαλμένα το 3,303 επειδή έχει τρία δεκαδικά ψηφία. Άλλοι μπορεί να συγκρίνουν μόνο το πρώτο ψηφίο μετά την υποδιαστολή και να παραβλέπουν τη δομή πέρα από αυτό (π.χ., υποθέτοντας ότι 3,3 > 3,33 επειδή το 3,3 έχει μόνο ένα δεκαδικό ψηφίο). Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να μην είναι σίγουροι πώς να ευθυγραμμίσουν τις δεκαδικές θέσεις και να συγκρίνουν νοερά τις τιμές, ειδικά όταν έχουν διαφορετικά μήκη. Αυτές οι απαντήσεις υποδεικνύουν εύθραυστη κατανόηση της αξίας θέσης των δεκαδικών ψηφίων, ιδιαίτερα στη διάκριση των δεκάτων, των εκατοστών και των χιλιοστών. Τα λάθη μπορεί επίσης να αντικατοπτρίζουν την απειρία σε συγκρίσεις με κοντινά δεκαδικά ψηφία, όπου αποτυγχάνουν οι διαισθητικές στρατηγικές.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν πίνακες αξίας θέσης για να ευθυγραμμίζουν και να συγκρίνουν δεκαδικούς ψηφίο προς ψηφίο. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να μοντελοποιήσουν στρατηγικές όπως η προσθήκη μηδενικών στο τέλος για να εξισώσουν τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων (π.χ., σύγκριση 3,300, 3,330, 3,303). Οπτικά εργαλεία όπως οι αριθμητικές γραμμές με δεκαδικούς δείκτες, τα μοντέλα με μπλοκ βάσης δέκα για δεκαδικούς αριθμούς ή οι αναπαραστάσεις σε πλέγμα μπορούν να βοηθήσουν στην εδραίωση της κατανόησης του μεγέθους. Η έμφαση στην αξία έναντι της εμφάνισης («Περισσότερα ψηφία δεν σημαίνουν περισσότερη αξία») είναι κρίσιμη. Η εξάσκηση με προβλήματα συλλογισμού («Ποιο είναι μεγαλύτερο και γιατί;») και παιχνίδια εκτίμησης που περιλαμβάνουν χρήματα, μήκος ή όγκο μπορεί να βοηθήσει στην ενσωμάτωση της σύγκρισης δεκαδικών αριθμών σε ουσιαστικά πλαίσια.

Άσκηση 3.6: Εύρεση αγνώστων προσθετέων σε εξισώσεις με δεκαδικούς

Συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν.

a) $1{,}8 + \underline{3{,}5} = 5{,}3$

b) $\underline{1{,}49} + 0{,}51 = 2$

Λύση

Μια λύση στο α) μέρος: Ο αριθμός που λείπει μπορεί να ερμηνευτεί με αφαίρεση.
____ = 5,3 - 1,8 = ["Διάλεξε την αγαπημένη σου μέθοδο αφαίρεσης"] =3,5

Μια άλλη λύση στο α) μέρος: Χρησιμοποιήστε τη στρατηγική της μερικής συμπλήρωσης, βήμα προς βήμα.

Βήμα 1: $1{,}8 + 3 = 4{,}8$

Βήμα 2: $4{,}8 + 0{,}2 + 0{,}3 = 5{,}3$

Απάντηση, βάσει των βημάτων 1 και 2: $3 + 0{,}2 + 0{,}3 = 3{,}5$.

(Απάντηση, βάσει των βημάτων 1 και 2 Η δεύτερη στρατηγική χρησιμοποιείται συνήθως στον νοερό υπολογισμό, πιο σπάνια με επίσημη σημειογραφία.)

Μια λύση στο β): Ο αριθμός που λείπει μπορεί να ερμηνευτεί με αφαίρεση.
____ = 2 - 0,51 = 1 + 1 - 0,51 = 1 + 0,49 = 1,49 (χρησιμοποιεί το αριθμητικό γεγονός 0,49+0,51=1,00)
Μια δεύτερη λύση, επίσης βασισμένη στην αφαίρεση, που δεν χρησιμοποιεί τον αριθμητικό συσχετισμό 0,49+0,51=1,00:
____ = 2 - 0,51 = 1 + 1 - 0,5 - 0,01 = 1 + 0,5 - 0,01 = 1 + 0,4 + 0,10 - 0,01 = 1,4 + 0,09 = 1,49
(Η δεύτερη λύση μπορεί να εκτελεστεί με έναν τυπικό επίσημο αλγόριθμο αφαίρεσης, τοποθετώντας τον δεύτερο αριθμό κάτω από τον πρώτο και χρησιμοποιώντας "δανεισμό" / "μεταφορά".)
Μια τρίτη λύση στο β): Χρησιμοποιήστε τη στρατηγική της μερικής ολοκλήρωσης, σε βήματα.

Βήμα 1: $0{,}49 + 0{,}51 = 1{,}00$ (number fact)

Βήμα 2: $1 + 1,00 = 2$

Απάντηση, βάσει των βημάτων 1 και 2: $0,49 + 1 = 1,49$.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να λύνουν για έναν άγνωστο προσθετέο σε μια εξίσωση πρόσθεσης δεκαδικών αριθμών, εφαρμόζοντας την κατανόησή τους για την αξία θέσης, τη δομή των εξισώσεων και τις αντίστροφες πράξεις. Και στα δύο μέρη, στους/στις μαθητές/τριες παρουσιάζεται ένα άθροισμα όπου λείπει ένα συστατικό:

- Στο α), πρέπει να προσδιορίσουν τι πρέπει να προστεθεί στο 1,8 για να γίνει 5,3.
- Στο β), πρέπει να προσδιορίσουν τι πρέπει να προστεθεί στο 0,51 για να πάρουμε 2.

Αυτό απαιτεί είτε αφαιρετική προσέγγιση (π.χ., 5,3 – 1,8) είτε εννοιολογική κατανόηση της προσθετικής σχέσης. Η βασική δεξιότητα εδώ είναι η ικανότητα ευέλικτης εφαρμογής της βασικής αλγεβρικής δομής και της δεκαδικής αριθμητικής.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η επίλυση αγνώστων σε αριθμητικές ισότητες είναι μια θεμελιώδης δεξιότητα-κλειδί για τη γεφύρωση της αριθμητικής και της άλγεβρας. Στο πλαίσιο του DiToM, τέτοιες εργασίες θεωρούνται ως πρώιμος αλγεβρικός συλλογισμός – οι μαθητές/τριες πρέπει να αντιμετωπίσουν την εξίσωση ως σύνολο και να κατανοήσουν τον δομικό ρόλο του αγνώστου. Επιπλέον, η ενασχόληση με δεκαδικές τιμές ενισχύει την ευχέρεια των μαθητών/τριών με τη δομή της βάσης του δέκα και υποστηρίζει την επιτυχία τους αργότερα σε εργασίες που σχετίζονται με τη μέτρηση, τα οικονομικά και τον αναλογικό συλλογισμό. Η ικανότητα μετάβασης μεταξύ γνωστών και αγνώστων χρησιμοποιώντας αντίστροφες πράξεις αντικατοπτρίζει βαθύτερη λειτουργική κατανόηση, αναγνωρίζοντας το σύμβολο της ισότητας ως σχέση ισοδυναμίας και συμβάλλει στην ανάπτυξη της αίσθησης της εξίσωσης.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

Ορισμένοι/ες μαθητές/τριες μπορεί να προσπαθήσουν να μαντέψουν αντί να εφαρμόσουν την αφαίρεση, ειδικά αν δεν είναι σίγουροι/ες πώς να χειριστούν την αξία θέσης των δεκαδικών ψηφίων. Ένα τυπικό σφάλμα είναι η μη ευθυγράμμιση των δεκαδικών ψηφίων (π.χ., αντιμετώπιση του 1,8 ως 18 ή παράλειψη ευθυγράμμισης των δεκάτων). Στο μέρος Β, οι μαθητές/τριες μπορεί να μπερδέψουν τη θέση του αγνώστου και να αφαιρέσουν το 0,51 από το 0 αντί από το 2. Άλλοι μπορεί να λύσουν την εξίσωση προσθέτοντας αντί να αφαιρούν, ή μπορεί να γράψουν ένα λογικά ανακριβές αποτέλεσμα που αριθμητικά «ταιριάζει» αλλά δεν σέβεται τη δεκαδική δομή. Αυτά τα λάθη υποδεικνύουν κενά στη διαδικασία, ανασφάλεια με τα δεκαδικά ψηφία ή έλλειψη δεξιοτήτων ερμηνείας εξισώσεων.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Η αποτελεσματική υποστήριξη περιλαμβάνει εξάσκηση στην επίλυση ανοιχτών αριθμητικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας αριθμογραμμές με δεκαδικούς αριθμούς, μοντέλα ράβδων ή μοντέλα εξισορρόπησης εξισώσεων για την οπτικοποίηση των σχέσεων, καθώς και την εφαρμογή έξυπνων στρατηγικών υπολογισμού. Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να ενθαρρύνονται να ξαναγράψουν τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας την αφαίρεση για να απομονώσουν τον άγνωστο και να εκτιμήσουν πρώτα το αποτέλεσμά τους για να αναπτύξουν μια αίσθηση του κατά πόσο μια απάντηση είναι λογική. Οι ασκήσεις που επικεντρώνονται στην ευθυγράμμιση των δεκαδικών ψηφίων και στην ανάλυση των αριθμών μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη ευχέρειας με την αριθμητική των δεκαδικών ψηφίων. Η ενθάρρυνση των λεκτικών εξηγήσεων («Τι θα προσθέτατε στο 1,8 για να πάρετε 5,3;») ενισχύει το συλλογισμό και συνδέει την αριθμητική με την αλγεβρική δομή.

Άσκηση 3.7: Εκτέλεση αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού δεκαδικών αριθμών

Υπολογίστε:

a) $23{,}5 - 1{,}12 =$ 22,38

b) $6 \cdot 2{,}5 =$ 15

Λύση

a) $23{,}5 - 1{,}12 = 22 + 0{,}50 - 0{,}12 = 22 + 0{,}38 = 22{,}38$ (χρησιμοποιεί αριθμητικό γεγονός $50 - 12 = 38$)

Η αφαίρεση 50-12 μπορεί να υπολογιστεί «συμπληρώνοντας» το 12 μέχρι το 20 και από εκεί μέχρι το 50: 50-12=8+30=38. (Η διαδικασία συμπλήρωσης μπορεί να απεικονιστεί σε μια αριθμογραμμή.)

b) $6 \cdot 2{,}5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0{,}5 = 12 + 3 = 15$

Εμφανίζοντας ρητά πώς εφαρμόζεται η επιμεριστική ιδιότητα: 6 επί 2,5 = 6 επί (2 συν 0,5) = 6 επί 2 συν 6 επί 0,5 = 12 συν 3 = 15
Σχόλιο: Ο υπολογισμός 6·0,5 μπορεί να ερμηνευτεί ως «6 μισά = 3 ολόκληρα» ή, συμβολικά, ως
6·0,5=3·2·0,5=3·1=3 (αριθμητικό γεγονός 2·0,5=1 «δύο φορές το ένα δεύτερο ισούται με ένα (ολόκληρο)»)
Μια άλλη λύση, επίσης βασισμένη στην παραγοντοποίηση 6=3·2:
6·2,5=3·2·2,5=3·5=15 (αριθμητικό γεγονός 2·2,5=5)
Εμφανίζοντας ρητά πώς εφαρμόζεται η ιδιότητα της προσεταιριστικής ιδιότητας:
6·2,5=(3·2)·2,5=3·(2·2,5)=3·5=15
Μια άλλη λύση, αυτή βασισμένη στην αποσύνθεση 6=4+2:
6·2,5=4·2,5+2·2,5=10+5=15
Εμφανίζοντας ρητά πώς εφαρμόζεται η επιμεριστική ιδιότητα: 6·2,5=(4+2)·2,5=4·2,5+2·2,5=10+5=15

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να εκτελούν με ακρίβεια αριθμητικές πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Στο μέρος A, τους ζητείται να υπολογίσουν τη διαφορά μεταξύ του 23,5 και του 1,12. Στο μέρος B, πρέπει να προσδιορίσουν το γινόμενο του 6 και του 2,5. Και τα δύο προβλήματα ελέγχουν την κατανόηση της αξίας θέσης, την ευχέρεια στις πράξεις και την ακρίβεια στον χειρισμό των δεκαδικών αριθμών – τόσο στην ευθυγράμμιση όσο και στους υπολογισμούς. Η εργασία αντικατοπτρίζει συνήθεις αλλά απαραίτητες δεξιότητες στο πλαίσιο του δεκαδικού συστήματος.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η εκτέλεση βασικών πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς αποτελεί θεμελιώδη μαθηματική δεξιότητα, όπως ορίζεται στο DiToM. Δεν είναι μόνο απαραίτητη για την καθημερινή αριθμητική (π.χ. διαχείριση χρημάτων, μετρήσεων ή δεδομένων), αλλά υποστηρίζει επίσης την αλγεβρική γενίκευση και τον αναλογικό συλλογισμό. Η ακριβής δεκαδική υπολογιστική αποτελεί θεμέλιο πολλών μαθηματικών τομέων, συμπεριλαμβανομένης της γεωμετρίας, της στατιστικής και της επίλυσης προβλημάτων σε επιστημονικά πλαίσια. Η ικανότητα υπολογισμών με δεκαδικούς αριθμούς αντικατοπτρίζει μια βαθιά ενσωμάτωση της γνώσης της αξίας θέσης, του αλγοριθμικού ελέγχου και των στρατηγικών εκτίμησης.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

Τα συνηθισμένα λάθη στο μέρος Α περιλαμβάνουν την ευθυγράμμιση των δεκαδικών ψηφίων (π.χ., αντιμετωπίζοντας το 23,5 ως 23,50 αλλά μη ευθυγραμμίζοντας σωστά με το 1,12), οδηγώντας σε λανθασμένη αφαίρεση. Οι μαθητές/τριες μπορεί επίσης να αφαιρούν ψηφία από λάθος θέσεις ή να αγνοούν εντελώς την υποδιαστολή. Κάποιοι/ες μπορεί επίσης να χρησιμοποιούν ακατάλληλες στρατηγικές, όπως επανειλημμένη πρόσθεση χωρίς δομικό έλεγχο. Αυτά τα λάθη συχνά υποδεικνύουν αδύναμη κατανόηση της αξίας θέσης, των ιδιοτήτων των πράξεων ή της τοποθέτησης της υποδιαστολής.

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

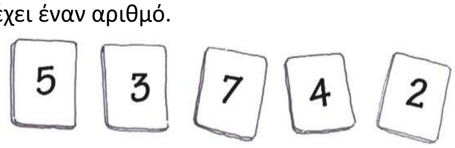
Η υποστήριξη θα πρέπει να περιλαμβάνει δομημένη εξάσκηση στην ευθυγράμμιση της αξίας θέσης, ειδικά με την αφαίρεση σε διαφορετικές δεκαδικές θέσεις. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν χαρτί με τετραγωνάκια ή πίνακες αξίας θέσης για να βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να ευθυγραμμίσουν σωστά τα ψηφία. Στρατηγικές εκτίμησης («Θα είναι η απάντηση γύρω στο 22 ή στο 10;») βοηθούν στην ανάπτυξη της αίσθησης των αριθμών και μια αίσθηση του κατά πόσο μια απάντηση είναι λογική. Για τον πολλαπλασιασμό, η χρήση μοντέλων εμβαδού ή αναπαραστάσεων με μπλοκ βάσης δέκα μπορεί να υποστηρίξει την εννοιολογική κατανόηση του πολλαπλασιασμού με δεκαδικούς αριθμούς. Είναι επίσης χρήσιμο να μοντελοποιήσουμε τόσο τυπικούς αλγορίθμους όσο και στρατηγικές νοερών υπολογισμών (π.χ., $6 \cdot 2{,}5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0{,}5 = 15$ ή $6 \cdot 2{,}5 = (3 \cdot 2) \cdot 2{,}5 = 3 \cdot (2 \cdot 2{,}5) = 3 \cdot 5 = 15$). Ο συχνός λεκτικός συλλογισμός ενισχύει την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο συμπεριφέρονται τα δεκαδικά ψηφία στις πράξεις.

Ασκήσεις 3.8 και 3.9.: Μεγιστοποίηση της τιμής ενός κλάσματος επιλέγοντας τον κατάλληλο αριθμητή ή παρονομαστή

Άσκηση 3.8

Παρακάτω υπάρχουν 5 κάρτες, η καθεμία

έχει έναν αριθμό.



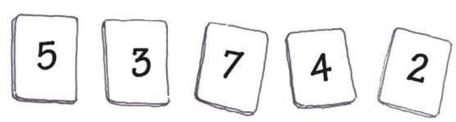
Επιλέξτε την κατάλληλη κάρτα ώστε να

προκύψει το μεγαλύτερο δυνατό κλάσμα.

Άσκηση 3.9

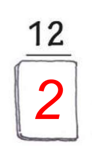
Παρακάτω υπάρχουν 5 κάρτες, η καθεμία

έχει έναν αριθμό.



Επιλέξτε την κατάλληλη κάρτα ώστε να

Προκύψει το μεγαλύτερο δυνατό κλάσμα.



Λύσεις

Η άσκηση 3.8 μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας την αρχή:

Βάζοντας έναν μεγαλύτερο αριθμό στον αριθμητή (πάνω), διατηρώντας τον ίδιο παρονομαστή, το κλάσμα γίνεται μεγαλύτερο.*

Ένας από τους αριθμούς 5, 3, 7, 4, 2 πρέπει να τοποθετηθεί στον αριθμητή. Αφού το 7 είναι ο μεγαλύτερος από αυτούς τους αριθμούς, το μεγαλύτερο δυνατό κλάσμα είναι το 7/13.

Η άσκηση 3.9 μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας την αρχή:

Βάζοντας έναν μικρότερο αριθμό στον παρονομαστή (κάτω), διατηρώντας τον ίδιο αριθμητή, το κλάσμα γίνεται μεγαλύτερο.*

Ένας από τους αριθμούς 5, 3, 7, 4, 2 θα πρέπει να τοποθετηθεί στον παρονομαστή. Εφόσον το 2 είναι ο μικρότερος από αυτούς τους αριθμούς, το μεγαλύτερο δυνατό κλάσμα είναι το 7/13.

*Θεωρούμε μόνο κλάσματα όπου ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Βασική δεξιότητα που ελέγχεται με αυτή την εργασία

Αυτή η εργασία αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών/τριών να κατανοούν τη δομή των κλασμάτων και να εφαρμόζουν την κατανόησή τους για να μεγιστοποιήσουν την τιμή ενός κλάσματος επιλέγοντας τον καταλληλότερο αριθμό από ένα σύνολο επιλογών. Οι μαθητές/τριες βλέπουν έναν αριθμό καρτών, καθεμία από τις οποίες δείχνει έναν διαφορετικό αριθμό, και τους ζητείται να τοποθετήσουν μία από αυτές σε μια δοσμένη κλασματική δομή με τέτοιο τρόπο ώστε η τιμή του κλάσματος που προκύπτει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Στο κλάσμα συνήθως είτε λείπει ο αριθμητής είτε ο παρονομαστής και οι μαθητές/τριες πρέπει να επιλέξουν τον αριθμό που θα κάνει την τιμή του κλάσματος τη μεγαλύτερη. Αυτό εξετάζει την ευέλικτη κατανόηση των μαθητών/τριών με αναλογίες και σχετικό μέγεθος.

Γιατί αυτή η δεξιότητα είναι βασική δεξιότητα;

Η κατανόηση του πώς οι αριθμητές και οι παρονομαστές επηρεάζουν το μέγεθος ενός κλάσματος είναι μια βασική ιδέα στην εκμάθηση των κλασμάτων. Στο πλαίσιο του DiToM, αυτή η ικανότητα αντικατοπτρίζει μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του μεγέθους των κλασμάτων – πώς η αύξηση του αριθμητή ή η μείωση του παρονομαστή επηρεάζει τη συνολική τιμή. Υποστηρίζει επίσης την ανάπτυξη της σχεσιακής σκέψης, στην οποία οι μαθητές/τριες σκέφτονται πέρα από τα επιφανειακά χαρακτηριστικά και αντ' αυτού συλλογίζονται δομικά τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών. Αυτές οι ιδέες είναι απαραίτητες για μεταγενέστερη εργασία σε αναλογίες, κλίμακες και αλγεβρική συλλογιστική.

Τι είδους λάθη και άλλα προειδοποιητικά σήματα μπορούν να αναμένονται με αυτή την εργασία;

Ένα κοινό λάθος είναι η επιλογή του μεγαλύτερου διαθέσιμου αριθμού, ανεξάρτητα από το αν βρίσκεται στον αριθμητή ή στον παρονομαστή, με την εσφαλμένη υπόθεση ότι «όσο μεγαλύτερο, τόσο καλύτερο». Αυτό υποδηλώνει μια διαδικαστική ή επιφανειακή στρατηγική χωρίς δομική κατανόηση. Άλλοι/ες μπορεί απλώς να επιλέξουν τυχαία ή να συγχύσουν τους ρόλους του αριθμητή και του παρονομαστή, για παράδειγμα, μεγιστοποιώντας τον ίδιο τον αριθμό αντί για την τιμή του κλάσματος που προκύπτει. Αυτά τα λάθη υποδηλώνουν ασταθή κατανόηση της συμπεριφοράς των κλασμάτων και περιορισμένη εμπειρία στη σύγκριση μη μοναδιαίων κλασμάτων. Οι μαθητές/τριες μπορεί επίσης να παρεξηγήσουν τον στόχο (π.χ., να προσπαθήσουν να πλησιάσουν περισσότερο το 1 αντί να μεγιστοποιήσουν την τιμή).

Τι είδους υποστήριξη θα μπορούσε να δοθεί στα παιδιά που παρουσιάζουν ελλείψεις σε αυτή την εργασία;

Η αποτελεσματική υποστήριξη περιλαμβάνει πρακτικές δραστηριότητες με κλάσματα σε λωρίδες ή αριθμητικές γραμμές, όπου οι μαθητές/τριες χειρίζονται τους αριθμητές και τους παρονομαστές για να παρατηρήσουν πώς αλλάζει το μέγεθος του κλάσματος. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να μοντελοποιήσουν συγκρίσεις όπως «3/4 έναντι 3/5» ή «4/7 έναντι 5/7» για να διερευνήσουν πώς ο αριθμητής ή ο παρονομαστής επηρεάζει το μέγεθος. Εργασίες που βασίζονται στη συζήτηση και την επεξήγηση —«Ποιο είναι μεγαλύτερο και γιατί;»— προάγουν τη βαθύτερη κατανόηση. Η οπτικοποίηση των κλασμάτων σε μια κοινή αριθμογραμμή ή η χρήση λογισμικού που δείχνει δυναμικά το μέγεθος των κλασμάτων μπορεί επίσης να βοηθήσει τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν αυτές τις σχέσεις. Με την πάροδο του χρόνου, η καθοδήγηση των μαθητών/τριών προς γενικεύσεις («Ένας μικρότερος παρονομαστής κάνει ένα κλάσμα μεγαλύτερο αν ο αριθμητής είναι σταθερός») υποστηρίζει τη μεταφορά και την αφαίρεση.

VI. Επιστημονική αξιολόγηση

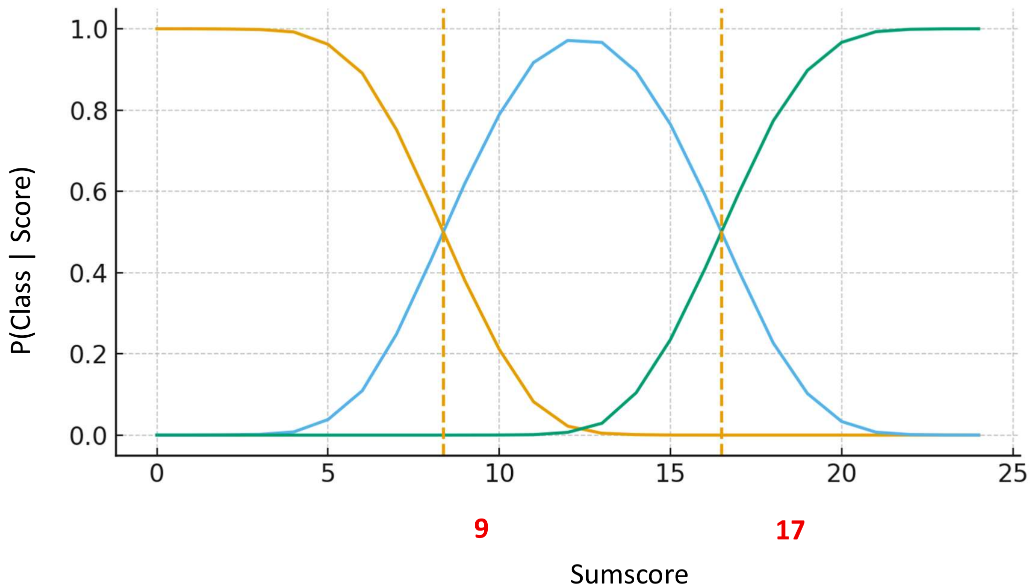
Το Διαγνωστικό τεστ 6+ (DiToM Screening 6+) αναπτύχθηκε με βάση τη σχετική θεωρία και ελέγχθηκε στο πλαίσιο μη αντιπροσωπευτικής μελέτης επικύρωσης. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω χρησιμεύουν για τον εντοπισμό μαθητών και μαθητριών που ενδέχεται να διατρέχουν κίνδυνο λόγω έλλειψης βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων κλειδιών για τη μετέπειτα μάθηση των Μαθηματικών στο σχολείο. Το τεστ υποστηρίζει τους/τις εκπαιδευτικούς στο τέλος της Στ΄ τάξης / αρχές της Α΄ Γυμνασίου ώστε να πραγματοποιούν μια εμπειρικά τεκμηριωμένη εκτίμηση της επίδοσης των μαθητών και μαθητριών και να εντοπίζουν εκείνους και εκείνες με αξιοσημείωτα αποτελέσματα, προκειμένου να δοθεί κατάλληλη υποστήριξη σε πρώιμο στάδιο.

Περιγραφή του δείγματος και κεντρικά αποτελέσματα

Το τεστ δοκιμάστηκε από τον Ιούνιο έως τον Ιούλιο του 2025, τις τελευταίες 3 εβδομάδες της σχολικής χρονιάς 2024/2025, σε 1841 μαθητές από σχολεία στην Ελλάδα, τη Γερμανία, τη Γαλλία, την Ισπανία, την Ιταλία, την Κροατία και τη Σουηδία.

Το τεστ περιλαμβάνει τα ακόλουθα μέρη: Βασικές Αριθμητικές Δεξιότητες με 11 ερωτήσεις, Αναλογίες με 3 ερωτήσεις, Τεχνικούς Υπολογισμούς με 12 ερωτήσεις. Εάν ένα ερώτημα απαντιόταν σωστά, δινόταν 1 μονάδα· εάν η λύση ήταν λανθασμένη, ελλιπής ή απουσίαζε, δινόταν 0 μονάδες. Η χορήγηση του τεστ πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τυποποιημένα κριτήρια (βλ. IV. Υλοποίηση του τεστ DiToM) και ακολούθησε ανάλυση των απαντήσεων. Καθώς το τεστ έχει σχεδιαστεί ως δοκιμασία ανίχνευσης (screening test) που εντοπίζει μαθητές και μαθήτριες οι οποίοι ενδέχεται να είναι σε κίνδυνο, αναμένονταν και επιδιώκονταν έντονα φαινόμενα οροφής, δηλαδή μη κανονική κατανομή αλλά κατανομή με αρνητική ασυμμετρία (left skewed distribution), κάτι που επιβεβαιώθηκε από τη δοκιμαστική εφαρμογή.

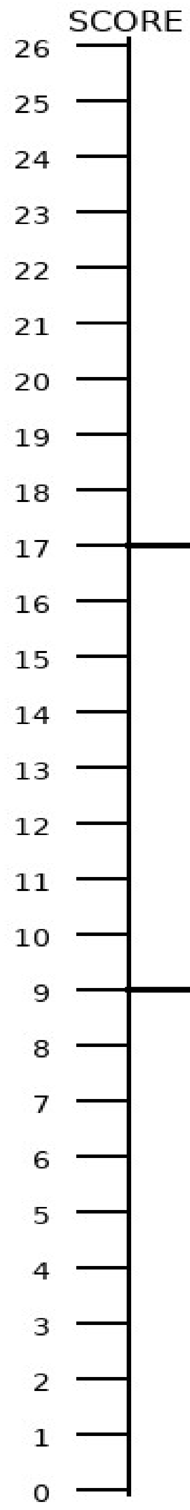
Για τις ανάγκες μιας επικοινωνίας προσανατολισμένης στην διδακτική πρακτική, δεν ορίζεται μία μόνο τιμή ορίου, αλλά δύο οριακές τιμές που διακρίνουν: μαθητές και μαθήτριες που είναι δυνητικά σε κίνδυνο, εκείνους και εκείνες που θα πρέπει να συνεχίσουν να παρακολουθούνται και όσους/όσες είναι δυνητικά όχι σε κίνδυνο. Ο προσδιορισμός της τιμής αποκοπής ήταν καθοδηγούμενος από τα δεδομένα μέσω λανθάνουσας ανάλυσης τάξεων (latent class analysis) με 3 σαφώς διακριτές τάξεις, οι οποίες είναι μη επικαλυπτόμενες και μονοτονικές. Οι εκ των υστέρων πιθανότητες (posterior probabilities) ένταξης σε κάθε τάξη παριστάθηκαν σε συνάρτηση με τη συνολική βαθμολογία, εξομαλύνθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για τον καθορισμό των κρίσιμων οριακών βαθμολογιών για αποφάσεις χρηματοδότησης, με βάση τα σημεία τομής των αντίστοιχων καμπυλών (βλ. Σχήμα 1), λαμβάνοντας ως κριτήριο εκ των υστέρων πιθανότητα $p=0,5$.



Η λανθάνουσα ανάλυση τάξεων ανέδειξε τρεις σαφώς διακριτές τάξεις, οι οποίες ερμηνεύονται ως: Κ1 → μαθητές και μαθήτριες με χαμηλή επίδοση στη δοκιμασία ανίχνευσης, Κ2 → μαθητές και μαθήτριες με μάλλον χαμηλή επίδοση και Κ3 → μαθητές και μαθήτριες με μη αξιοσημείωτη (τυπική) επίδοση στη δοκιμασία ανίχνευσης. Για τον προσδιορισμό της κρίσιμης βαθμολογίας επιλέχθηκε εκείνο το όριο μέχρι το οποίο υπάρχει 50% πιθανότητα ένταξης στην τάξη με χαμηλή επίδοση· το πρώτο αυτό όριο είναι επομένως οι 9 μονάδες. Οι μαθητές και οι μαθήτριες που συγκέντρωσαν 9 μονάδες ή λιγότερο χρειάζονται υποστήριξη ώστε να επεξεργαστούν σε βάθος τα βασικά στοιχεία, προκειμένου να μπορούν να οικοδομήσουν με κατανόηση το περιεχόμενο επόμενων μαθημάτων Μαθηματικών. Το δεύτερο όριο είναι οι 17 μονάδες. Οι μαθητές και οι μαθήτριες που συγκέντρωσαν βαθμολογία μεταξύ 10 και 17 μονάδων θα πρέπει να παρακολουθούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών κατά τις επόμενες εβδομάδες, ώστε να διαπιστωθεί εάν κατανοούν το διδαχθέν περιεχόμενο και αν μπορούν να το εφαρμόζουν αυτόνομα.

VII. Φύλλο αξιολόγησης

Η παρακάτω κλίμακα παρέχει αρχικές ενδείξεις για τις δεξιότητες με τις οποίες οι μαθητές/τριες είναι πιο πιθανό να συγκεντρώσουν βαθμούς στις ακόλουθες τρεις κλίμακες: 0-9 βαθμοί, 10-17 βαθμοί και 18-26 βαθμοί.



Αυτή η ομάδα δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όσον αφορά τις προϋποθέσεις για την εκμάθηση των μαθηματικών στο σχολείο.

C: Εκτός από τα A και B, οι μαθητές/τριες συχνά είναι σε θέση να …

… επιλέγουν το σωστό κλάσμα για έναν γραμμοσκιασμένο κύκλο, πολλαπλασιάζουν φυσικούς αριθμούς, αναπαριστούν συμβολικά δεκαδικούς αριθμούς/κλάσματα σε έναν αριθμητικό άξονα, συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς, μεγιστοποιούν την τιμή ενός κλάσματος επιλέγοντας έναν κατάλληλο παρονομαστή και εκτελούν δεκαδική αφαίρεση

Και οι μαθητές/τριες σπάνια είναι σε θέση να …

… εκτελούν διαίρεση με φυσικούς αριθμούς και αναπαριστούν συμβολικά δεκαδικούς αριθμούς/κλάσματα σε έναν αριθμητικό άξονα σε πιο σύνθετες τοποθετήσεις ή μικτές κλίμακες

Αυτή η ομάδα θα πρέπει να παρακολουθείται πιο στενά τις επόμενες εβδομάδες, προκειμένου να διαπιστωθεί εάν τα ακόλουθα περιεχόμενα μπορούν να κατανοηθούν και να εφαρμοστούν ανεξάρτητα.

B: Εκτός από το A, οι μαθητές/τριες συχνά είναι σε θέση να......

εκτελούν διαίρεση με φυσικούς αριθμούς συνήθως σωστά, να αναγνωρίζουν και να επεκτείνουν αριθμητικά μοτίβα, να βρίσκουν τους άγνωστους προσθετέους σε δεκαδικές εξισώσεις, να γραμμοσκιάζουν ένα δεδομένο κλάσμα ενός ορθογωνίου και να πολλαπλασιάζουν φυσικούς αριθμούς

Και οι μαθητές/τριες σπάνια είναι σε θέση να......

εκτελούν απλούς δεκαδικούς πολλαπλασιασμούς και να εξισώνουν ποσότητες

Αυτή η ομάδα διατρέχει κίνδυνο όσον αφορά τις προϋποθέσεις για την εκμάθηση των μαθηματικών στο σχολείο και θα πρέπει να λάβει ειδική υποστήριξη το συντομότερο δυνατόν.

A: Οι μαθητές/τριες είναι συχνά σε θέση να...

… αναπαριστούν ισοδύναμα κλάσματα, μεγιστοποιούν την τιμή ενός κλάσματος επιλέγοντας έναν κατάλληλο αριθμητή, διαβάζουν δεκαδικούς αριθμούς από ένα θερμόμετρο, εφαρμόζουν τη σειρά των πράξεων (κανόνες προτεραιότητας), συγκρίνουν ένα καταχρηστικό κλάσμα με φυσικούς αριθμούς και ερμηνεύουν ισοδύναμα κλάσματα

Και οι μαθητές/τριες σπάνια είναι σε θέση να...

… χρησιμοποιούν αναλογικό συλλογισμό με ποσότητες και τιμές και να μεταφράζουν γραπτό κείμενο σε μαθηματικές εκφράσεις

Βιβλιογραφία

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education. In *Proceedings of EDULEARN25 Conference*. Palma, Spain. Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7

Ehlert, A., & Fritz, A. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(2), 237–263.

Gaidoschik, M. (2025). *Das dezimale Stellenwertsystem: Verstehen, verinnerlichen und flexibel anwenden*. Hannover: Klett Kallmeyer.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. Educational Studies in Mathematics, 106(3), 447–469.

Prediger, S. (2008). Zahlaspekte verstehen und flexibel nutzen. In E. Cohors-Fresenborg et al. (Eds.), *Mathematiklernen ermöglichen* (pp. 85–100). Münster: Waxmann. ph-gmuend.de+3Edoc LMU München+3Wikipedia+3

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 76(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.

Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. ZDM, 46, 45–58.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Charlotte, NC: Information Age.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2004). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Seelze: Friedrich Verlag.