Co-funded by
the European Union

Manuel de l’enseignant
Test diagnostique de début de 3e

Ce projet a été financé avec le soutien de la Commission européenne. Cette publication n'engage que son auteur et la Commission ne peut être tenue responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qui y sont contenues.

Sommaire

I. Introduction

L'apprentissage des mathématiques est cumulatif : les nouveaux contenus s'appuient sur des connaissances préalables. Si les idées et concepts fondamentaux font défaut, il devient de plus en plus difficile pour les élèves de construire une compréhension significative des contenus suivants. Les résultats d'études internationales et nationales montrent qu'une part importante des élèves n'atteignent pas le niveau minimum requis en mathématiques. Cela signifie qu'il est nécessaire de donner les moyens aux enseignants de détecter suffisamment tôt le niveau d'apprentissage de leurs élèves et d'organiser le soutien nécessaire dans une temporalité adaptée. C'est là qu'intervient le projet européen « Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM) ». Dans le cadre d'un partenariat entre l'Italie, la France, la Suède, la Croatie, la Grèce, l'Espagne et l'Allemagne, cinq instruments de diagnostics interdépendants ont été développés afin de fournir aux enseignants une vue d'ensemble concise de leur classe lors des moments de transitions scolaires. Les diagnostics suivent un rythme bisannuel :

1. Transition de la GS (grade 0) maternelle au CP (grade 1)
2. Fin de CE1 (grade 2) / début de CE2 (grade 3)
3. Fin du CM1 (grade 4) / début du CM2 (grade 5)
4. Fin de la 6e (grade 6) / début de la 5^{e} (grade 7)
5. Fin de la 4e (grade 8) / début de la 3^{e} (grade 9)

Qu'est-ce qu'un test diagnostique ?
Un diagnostic est une évaluation courte, réalisée en groupe, qui peut être administrée à toute la classe en une seule séance. Il fournit à l'enseignant un premier aperçu des notions fondamentales déjà bien acquises et des domaines dans lesquels certains élèves pourraient avoir besoin d'un soutien supplémentaire. Plus important encore, un diagnostic ne remplace pas une évaluation qualitative individuelle, axée sur le processus, de l'état des connaissances et compétences mathématiques d'un élève. Il sert de point de départ : les résultats peuvent être suivis d'observations ciblées, d'entretiens et de propositions de soutien.

En quoi cela est-il utile ?

- Donner un aperçu rapide des compétences fondamentales déjà acquises et de celles qui nécessitent des révisions ou d'être approfondies.
- Permettre un soutien guidé : identifier les élèves qui peuvent rencontrer des difficultés à atteindre les attentes minimales de base en mathématiques ; organiser un soutien précoce.
- Prendre des décisions diagnostiques : les résultats fournissent une première orientation indiquant quels élèves pourraient bénéficier d'évaluations diagnostiques supplémentaires (par exemple, des analyses plus approfondies de tâches ou des entretiens de suivi).
- Soutenir les transitions : concentrer l'attention sur les compétences clés lors des transitions scolaires cruciales.

Les tâches sont axées sur la classe, leur administration est clairement décrite et la notation est rapide. Les enseignants obtiennent un résumé concis au niveau de la classe ainsi que des indications sur les élèves qui méritent une attention particulière sur certains domaines mathématiques. Sur cette base, les enseignants peuvent planifier de courtes périodes de révision, des exercices différenciés ou des tâches pour faciliter les transitions entre niveaux scolaires.

Ce manuel fournit un guide concis sur l'objectif et l'utilisation du diagnostic, explique la conception du test, les types de tâches et les objectifs d'évaluation visés, donne des instructions claires pour l'administration en classe, décrit la notation et l'interprétation des résultats et propose des idées pratiques pour l'enseignement ultérieur

et le soutien ciblé.
L'objectif est de disposer d'un outil de diagnostic pratique, fiable et facile à utiliser qui permette aux enseignants de s'orienter rapidement, d'attirer rapidement l'attention sur les difficultés potentielles et de soutenir concrètement une aide efficace afin que le plus grand nombre possible d'élèves apprennent les mathématiques de manière sûre, avec compréhension et confiance.

II. Que signifie « compétences mathématiques clés » ?

L'élaboration d'un test diagnostique nécessite une base théorique. Pour les tests diagnostiques courts destinés à toute la classe, cela signifie qu'il faut se concentrer sur les compétences sans lesquelles le contenu ultérieur ne peut être appris de manière significative. Selon la position classique de Gagné & Briggs, chaque nouvelle exigence d'apprentissage repose sur un minimum de prérequis nécessaires, ce que désigne le terme « compétences mathématiques clés ». Si celles-ci ne sont pas acquises, l'acquisition réussie de nouveaux contenus est peu probable et les tâches appropriées à travailler s'appuient donc sur ce qui est déjà en place. En mathématiques, l'apprentissage est donc hiérarchique et cumulatif.

Compréhension conceptuelle : compétences, concepts, aptitudes et compétences clés

Dans le cadre du projet, nous faisons la distinction entre les compétences et les aptitudes, qui sont interdépendantes dans la pratique en classe. Les compétences font référence à une bonne disposition à agir de manière appropriée dans des situations mathématiques. L'acquisition de concepts permet ainsi d'acquérir une compréhension approfondie des relations mathématiques. L'activation pertinente des compétences se traduit par une aptitude, qui se manifeste par la performance pratique des élèves. Les compétences clés sont celles dont l'absence entrave ou empêche considérablement la poursuite de l'apprentissage. Elles constituent des prérequis indispensables pour l'acquisition de contenus ultérieurs. Les évaluations se concentrent sur l'arithmétique et l'algèbre, en raison de leur structure hiérarchique et de leur importance pour d'autres domaines des mathématiques (par exemple, la géométrie), qui sont compatibles tant au niveau national qu'international.

Les exemples suivants illustrent deux exemples afin de clarifier la compréhension des compétences clés.

Niveau primaire : effectuer des additions de manière structurée
La tâche 25 + 7 nécessite plus qu'un simple comptage par étapes. Un sens solide des opérations se manifeste lorsque les élèves reconnaissent les relations partie-partie-tout (par exemple, 25 et 7 comme parties d'un tout), décomposent les nombres de manière flexible (par exemple, 7 = 5 + 2) et s'appuient sur la dizaine suivante (par exemple, 25 + 5 = 30 ; puis 30 + 2 = 32). Ici, les concepts (valeur de position, égalité), les compétences (calcul flexible, procédure justifiée) et l'aptitude qui en résulte (addition structurée) fonctionnent ensemble. Si cette compétence clé fait défaut, le « niveau » suivant, à savoir des plages de nombres plus grandes ou des stratégies plus efficaces, reste difficile à atteindre.

Premier cycle du secondaire : gestion de l'extension des domaines numériques
Une bonne maîtrise des opérations avec les nombres naturels (décomposition, opérations inverses, valeur du chiffre selon sa position dans le nombre et références à la droite numérique) est une condition préalable au transfert des procédures aux décimaux et aux fractions (par exemple, addition/soustraction, arrondi, estimation) afin de surmonter les obstacles épistémologiques liés à l'apprentissage des concepts mathématiques (Brousseau, 1997). Les lacunes dans ces compétences clés conduisent souvent à un travail procédural sans compréhension, ce qui entrave l'accès aux expressions littérales, aux équations et aux relations fonctionnelles. Cela illustre le caractère prédictif des compétences clés en arithmétique pour les besoins algébriques.

La compétence clé « compréhension » est intégrée dans les tests afin de

- représenter les prérequis nécessaires à l'étape d'apprentissage suivante,
- être proche du contenu et donc être observable à l'aide de tâches courtes,

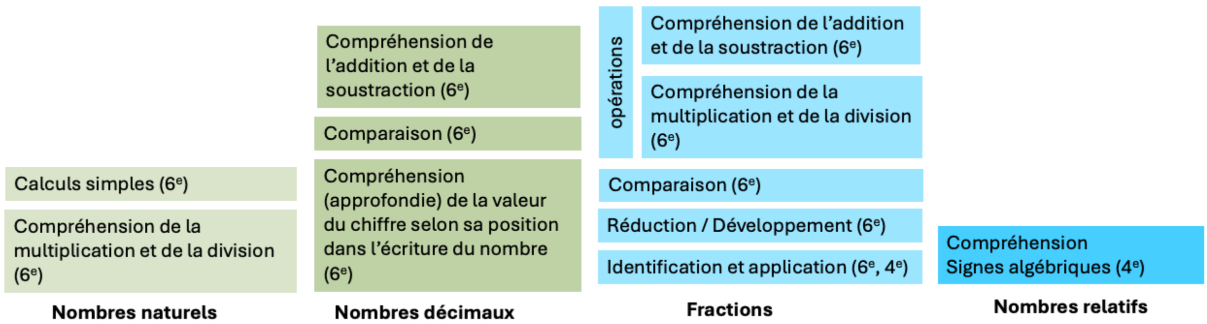
- offrir aux enseignants une première orientation structurée quant aux élèves qui pourraient nécessiter des évaluations diagnostiques supplémentaires et dans des domaines dans lesquels un soutien peut être ciblé. L'objectif n'est pas d'attribuer des étiquettes, mais de révéler rapidement les prérequis essentiels, afin que l'apprentissage ultérieur puisse se dérouler sur une base stable.

Selon nous, chaque domaine de contenu comprend des compétences clés qui peuvent devenir essentielles à différents moments d'un processus d'apprentissage, y compris à la fin d'une unité, lorsqu'une capacité est nécessaire pour permettre l'apprentissage ultérieur. Le développement des compétences clés est donc continu tout au long des années scolaires ; il reste essentiel d'identifier rapidement les prérequis manquants afin que les apprenants puissent continuer à acquérir de nouveaux contenus en les comprenant.

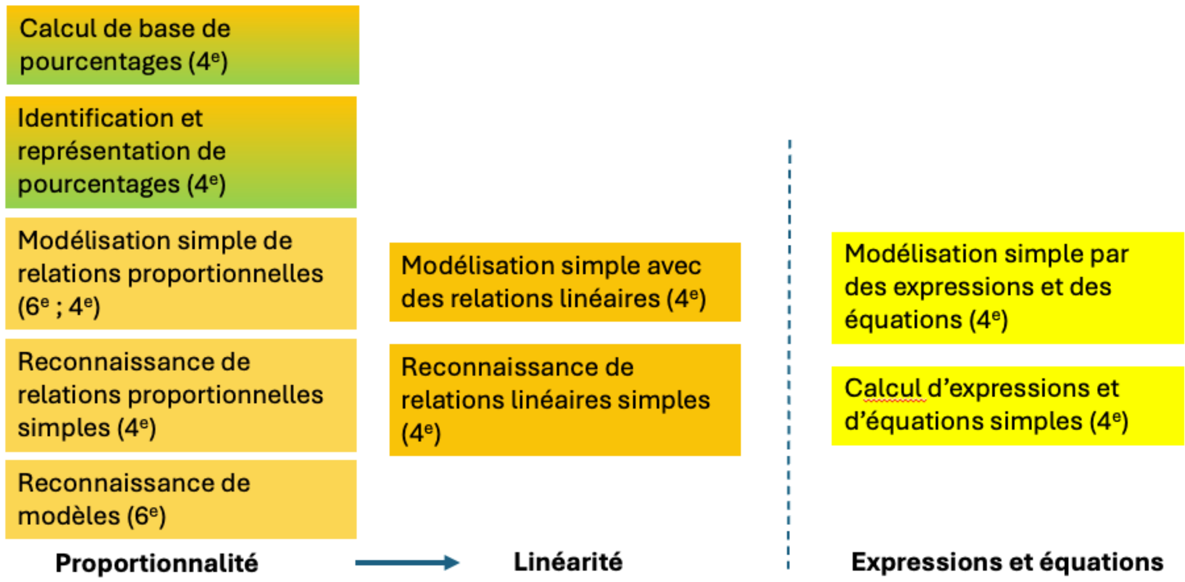
III. Structure des tests de début de 5e et de début de 3e

La structure des tests DiToM est basée sur les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre et prend en compte leur structure hiérarchique. La construction du test s'est concentrée sur le domaine du développement des nombres et de leur extension en lien avec un calcul technique, ceci dans la mesure où les procédures de calcul sont effectuées de manière non algorithmique ou algorithmique sur la base d'une compréhension profonde des nombres et des opérations. Le diagramme montre la structure du test dans ces domaines pour le collège.

Le test de début de 5e repose sur des éléments constitutifs de celui de début de CM2 qui se concentrent sur les nombres naturels, et dans lequel ce domaine est davantage différencié. Si les élèves ont des difficultés importantes dans le domaine des nombres naturels en début de 5e, il est recommandé d'utiliser le test de début de CM2.



Dans le domaine de l'algèbre ou de la pré-algèbre, la compréhension structurelle des structures mathématiques simples dans les applications mathématiques internes et externes est évaluée sous l'angle de la proportionnalité et de la linéarité. Il en va de même pour le domaine du calcul littéral avec des expressions littérales et des équations qui interviennent dans des situations d'application de base.



IV. Mise en œuvre des tests DiToM

- **Expliquer l'objectif du test aux élèves et les rassurer**

- Le test n'est pas noté.
- Il leur permet de faire le point sur ce qu'ils savent et ce qu'ils ne savent pas, afin de pouvoir ensuite leur proposer des exercices adaptés. Il est donc particulièrement important qu'ils travaillent seuls.
- Insister sur l'importance de répondre aux exercices. Plus ils répondront, plus il sera facile d'identifier leurs connaissances, leurs compétences et leurs difficultés, et de les aider à les surmonter.

- **Structure du test**

- Le test est divisé en trois parties, chacune composée de plusieurs exercices.
- Tous les exercices sont indépendants les uns des autres.

- **Durée :** une durée maximale indicative est estimée pour chaque partie.

- Test de début de 3e, durée maximale 40 minutes : 15 pour l'algèbre, 10 pour la proportionnalité, 15 pour l'arithmétique.
- Il est important d'indiquer la durée de chaque partie aux élèves avant le test et de préciser que l'enseignant interrompra les élèves qui n'auront pas terminé, par souci d'équité entre les élèves.

- **Format des exercices**

- Exercices ouverts : il y a de la place pour répondre (soit par des phrases, soit par un nombre).
- Exercices fermés (questions à choix multiples) : plusieurs réponses sont proposées et l'élève doit répondre en choisissant une ou plusieurs réponses.

- **Comment répondre ?**

- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Les élèves peuvent utiliser toute partie de la page laissée en blanc comme brouillon, en particulier pour noter leurs calculs.
- Les élèves qui ont terminé une partie du test doivent attendre que l'enseignant leur donne des instructions pour passer à la partie suivante.

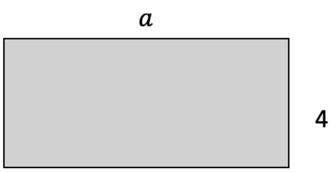
- **Solliciter les élèves pendant le test**

- Si l'enseignant est sollicité, il ne donne aucune indication qui pourrait orienter la réponse aux questions. L'objectif est d'identifier les difficultés des élèves.

V. Présentation des tâches

Tâche 1.1 : Périmètre d'un rectangle

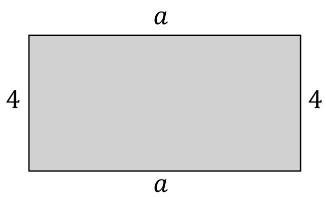
Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs de ses côtés.
Quel est le **périmètre (P)** du rectangle en fonction de a ?



P = 2a + 8

Solution

Les longueurs des quatre côtés doivent être additionnées.



Même si la tâche demande « la » formule, plusieurs réponses (équivalentes) sont correctes.

Par exemple :

$a + 4 + a + 4$ (ou $a + a + 4 + 4$, peu importe l'ordre des termes)

$2a + 8$ (ou $2(a + 4)$ ou $(a + 4) \times 2$ ou $2 \times a + 2 \times 4$)

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à construire une formule symbolique pour le périmètre d'un rectangle lorsque les longueurs des côtés sont données sous forme littérale. Le rectangle est étiqueté avec des longueurs de côtés a et 4 et la tâche demande aux élèves d'exprimer le périmètre P sous forme d'expression générale. Pour résoudre correctement la tâche, les élèves doivent comprendre qu'un rectangle a deux paires de côtés de longueurs égales et que la formule choisie doit additionner les longueurs des quatre côtés.

$P = 2 \times (a + 4)$
$P = (a + 4) \times 2$
ou, de manière équivalente : $P = 2a + 8$,

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{a} + 2 \times 4$$

Ou encore $a + 4 + a + 4$ (peu importe l'ordre des termes)

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Cette tâche favorise le développement de la pensée algébrique en encourageant les élèves à représenter les relations entre les quantités à l'aide de variables. Dans le cadre de DiToM, la construction de telles formules est essentielle pour acquérir une aisance symbolique et comprendre les relations fonctionnelles. Elle relie le raisonnement géométrique (périmètre) à l'expression littérale et renforce l'utilisation des variables en tant que nombres généralisés. Cette compétence prépare également les élèves à travailler ultérieurement avec des fonctions, des modèles paramétrés et la mise en équation.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une erreur très courante consiste pour les élèves à essayer de calculer une valeur numérique pour le côté marqué a, par exemple en le mesurant directement sur la figure, plutôt que de reconnaître que a est une variable et que la tâche nécessite une formule générale, et non un résultat spécifique. Cela indique un décalage entre la représentation algébrique et le calcul concret. Une autre erreur fréquente consiste à calculer le périmètre numériquement en insérant des valeurs estimées ou supposées (par exemple, « a est d'environ 6 cm, donc... »), ce qui montre que les élèves ont mal compris la nature de l'exercice. Cela révèle une mauvaise interprétation du format de l'exercice, qui est traité comme un problème de calcul plutôt que comme une généralisation symbolique. De plus, certains élèves fournissent la formule de l'aire du rectangle au lieu du périmètre, par exemple en écrivant $A = a \times 4$ ou $A = 4a$, confondant ainsi les concepts d'aire et de périmètre. Cela suggère soit une confusion conceptuelle entre les deux propriétés, soit des difficultés à extraire les informations pertinentes du texte.

Dans l'ensemble, ces erreurs révèlent des faiblesses dans :

- La compréhension du rôle des variables,
- la distinction entre différents concepts géométriques,
- l'interprétation précise d'instructions mathématiques.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves tirent profit d'exercices qui séparent clairement les tâches demandant des formules de celles demandant des résultats numériques. Les enseignants peuvent utiliser des rectangles découpés ou des manipulations numériques sur lesquels les élèves inscrivent des lettres sur les côtés et « parcourent » la forme pour compter la longueur totale. Des supports visuels aident à illustrer pourquoi les côtés opposés sont égaux et doivent être additionnés deux fois. Encourager les formulations verbales (« deux fois la somme de a et 4 ») aide à faire le lien entre la compréhension concrète et la notation algébrique. De plus, des tâches contrastées (par exemple, « 1) Écrivez une formule pour le périmètre, en termes de variable/inconnue a ; 2) Utilisez la formule pour calculer la valeur du périmètre pour $a = 5$ ») peuvent entraîner les élèves à lire les instructions avec précision.

Tâche 1.2 : Traduire une expression en langage naturel par une expression littérale

a) La somme de 3 et *x* $3 + x$

b) 3 de moins que *x* $x - 3$

c) Le double de *a* $2a$

Solution

a) La somme de 3 et de x s'écrit soit $3 + x$, soit $x + 3$.

b) 3 de moins que x peut s'écrit $x - 3$ (ou $x + (-3)$ ou $-3 + x$) .

c) Le double de a peut s'écrit $2 \times a$ ou $2a$ ou $a + a$.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette série d'exercices évalue la capacité des élèves à traduire le langage courant en notation algébrique. Chaque tâche présente une structure verbale différente qui correspond à une expression symbolique simple. Dans la tâche a (*la somme de 3 et* x), l'objectif est de reconnaître la structure additive ($3 + x$). La tâche b (3 *de moins que* x*)* teste si les élèves représentent correctement une relation soustractive en respectant l'ordre ($x - 3$). La tâche c (*le double de* a*)* exige une multiplication comme mise à l'échelle ($2a$). L'ensemble de ces tâches combine les conventions algébriques de base avec la précision linguistique, demandant aux apprenants de naviguer entre le langage naturel et l'expression symbolique.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La capacité à passer aisément des descriptions verbales aux représentations algébriques est fondamentale en mathématiques. Elle facilite la compréhension des relations fonctionnelles, pose les bases de l'interprétation et de la production d'expressions littérales, d'équations et de formules, et elle est essentielle pour modéliser des problèmes. Selon le cadre DiToM, cette capacité est essentielle pour acquérir une compréhension symbolique et développer une maîtrise significative des opérations au-delà des procédures mécaniques. Les élèves qui maîtrisent ce processus de traduction sont mieux armés pour interpréter des problèmes écrits et modéliser dans des contextes plus complexes.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Cette tâche révèle des idées fausses caractéristiques à différents niveaux. Dans la tâche b (*3 de moins que* x), de nombreux élèves inversent incorrectement l'ordre et écrivent $3 - x$, l'interprétant comme « 3 moins x ». Cela indique une difficulté à reconnaître la direction relationnelle dans les structures verbales. Pour la tâche c, une erreur fréquente est la confusion entre carré et double.
Collectivement, ces erreurs indiquent si les élèves sont capables d'analyser de respecter la syntaxe algébrique dans la traduction du langage naturel vers les écritures littérales et de comprendre les conventions mathématiques standard.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Pour renforcer cette compétence, l'enseignement peut mettre l'accent sur la structure du langage en relation avec la forme symbolique. Il est essentiel d'enseigner explicitement des expressions telles que « moins que », « plus que », « le produit de » et « le carré de », idéalement avec des exemples contrastés. Encourager les élèves à verbaliser leurs expressions (« x moins 3 signifie que je commence par x et que je soustrais 3 ») favorise l'interprétation procédurale et structurelle des expressions littérales et relie plus fermement le langage à la signification mathématique.

Tâche 1.3 : Produire une expression littérale pour représenter des relations

On appelle n le nombre de livres de Jenny. Laura a 10 livres de plus que Jenny. Kevin a deux fois plus de livres que Laura.

Quel est le nombre de livres de Kevin ?

☐ $10 + n$	☑ $2 \times (n + 10)$
☐ $10 + n + 2$	☐ $2 \times n + 10$

Solution

Première solution, pour un étudiant habitué à travailler avec des variables :

Étape 1 Jenny a n livres

Étape 2 Laura a 10 livres de plus que Jenny, donc Laura a $n + 10$ livres

Étape 3 Kevin a deux fois plus de livres que Laura, donc Kevin a $2 \times (n + 10)$ livres.

Deuxième solution, basée sur une notation informelle :

Laura = Jenny + 10

Kevin = 2 × Laura = $2 \times (\text{Jenny} + 10) = 2 \times (n + 10)$

Troisième solution, basée sur un test avec un nombre puis une généralisation :

Supposons que Jenny ait 17 livres. Laura a alors $17 + 10 = 27$ livres et Kevin $2 \times 27 = 54$ livres.

Le nombre 17 est caché dans 27 et la réponse est $2 \times 27 = 2 \times (17 + 10)$.

En généralisant en remplaçant 17 par$n$, on obtient la réponse $2 \times (n + 10)$.

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à traduire des relations données en deux étapes en langage naturel par une expression symbolique. Le problème décrit que Jenny possède n livres, Laura en possède 10 de plus que Jenny et Kevin en possède deux fois plus que Laura. Pour résoudre correctement la tâche, les élèves doivent reconnaître que la quantité de Laura est exprimée par $n + 10$, puis appliquer la multiplication pour trouver le total de Kevin, ce qui donne l'expression $2 \times (n + 10)$. Cela exige de prêter attention à la fois à la séquence des relations et au rôle structurel des parenthèses dans les expressions littérales.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La capacité à construire des expressions symboliques à partir de descriptions relationnelles est fondamentale en algèbre. Elle démontre la capacité d'un élève à identifier des dépendances fonctionnelles et à prendre en compte la structure des expressions, en particulier avec l'utilisation des parenthèses. Dans le cadre DiToM, une telle tâche représente une compétence mathématique clé, car elle nécessite de prendre en compte des nombres connus et inconnues, plusieurs opérations et facilite la transition du raisonnement arithmétique à la généralisation algébrique. En travaillant avec des espaces réservés abstraits et des opérations d'imbrication, les élèves commencent à réfléchir en termes de relations entre les variables, une étape essentielle vers la modélisation.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une erreur courante consiste à simplifier prématurément la structure en donnant l'expression $2n + 10$ au lieu de la bonne expression $2 \times (n + 10)$, ce qui indique que les élèves n'ont pas tenu compte de la priorité de la multiplication sur l'addition. D'autres peuvent s'arrêter après la première relation et écrire simplement $n + 10$, ce qui représente les livres de Laura plutôt que ceux de Kevin. Une autre erreur fréquente concerne l'interprétation de « deux fois plus » comme une augmentation de 2 plutôt que comme une multiplication par 2, ou le fait de ne pas tenir compte de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition. Dans certains cas, les élèves peuvent confondre les personnages ou le flux d'informations, ce qui indique qu'ils ont des difficultés à extraire ou interpréter plusieurs relations de l'énoncé. Ces difficultés révèlent des lacunes dans la compréhension structurelle, en particulier lorsqu'il s'agit de combiner une relation additive avec une relation multiplicative sous forme symbolique.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves tirent profit d'une explication verbale explicite des relations, guidée par des questions incitatives telles que « Que possède Laura par rapport aux livres de Jenny ? » et « Que possède Kevin par rapport à la quantité de livres de Laura ? ». L'utilisation de schémas peut permettre de rendre ces liens plus tangibles. De plus, s'entraîner à traduire des relations plus simples en une seule étape permet de renforcer la confiance avant de combiner les étapes. L'enseignement peut également aborder explicitement l'utilisation des parenthèses, en comparant des expressions telles que $2n + 10$ et $2 \times (n + 10)$ à l'aide d'exemples numériques concrets (par exemple avec un tableur). Encourager les élèves à exprimer leur raisonnement à haute voix peut de renforcer à la signification du symbolisme algébrique.

Tâche 1.4 : Produire une expression littérale pour représenter des relations

Un groupe de 13 amis va au cinéma. Chacun d'entre eux paie un billet à x € et achète du pop-corn pour 3,20 €.

Laquelle des expressions suivantes indique le prix payé par l'ensemble du groupe ?

☐ $13 + (x + 3{,}20)$ ☐ $13x + 3{,}20$

☐ $x\ (13 + 3{,}20)$ ☐ $13\ (x + 3{,}20)$

Solution

Première solution : chaque personne paie $x + 3{,}20$ et 13 personnes paient 13 fois ce que paie une personne.

La réponse est donc $13 \times (x + 3{,}20)$.

Deuxième solution, basée sur des tests avec un nombre et une généralisation :

Supposons qu'un billet coûte 5 €.

Chaque personne paie un billet à 5 € et achète du pop-corn pour 3,20 €, donc chaque personne paie 8,20 €.

13 personnes paient treize fois ce montant : $13 \times 8{,}20$. Il n'est pas nécessaire de calculer ce produit, ce qui importe, c'est ce qui est arrivé au nombre choisi 5 : $13 \times 8{,}20 = 13 \times (\mathbf{5} + 3{,}20) = 13 \times (x + 3{,}20)$.

La deuxième solution peut également être exécutée par comparaison et imitation (« suivre le nombre ») :

Avec le nombre	Avec variable
$5 + 3{,}20$	$x + 3{,}20$
$13 \times (5 + 3{,}20)$	$13 \times (x + 3{,}20)$

Compétence clé testée avec cette tâche

Cette tâche demande aux élèves de traduire une situation combinant une relation additive avec une relation multiplicative en une expression littérale. Le contexte est présenté en langue naturelle : 13 amis achètent chacun un billet de cinéma pour x euros et dépensent 3,20 € supplémentaires en pop-corn. Le coût total pour le groupe doit être représenté par une expression qui combine la variable et la constante et multiplie le coût individuel total par le nombre de personnes. L'expression correcte est donc $13 \times (x + 3{,}20)$. Pour choisir la bonne solution, les élèves doivent à la fois comprendre la structure narrative et savoir comment modéliser une addition répétée par une multiplication à l'aide de parenthèses.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La représentation de situations contextuelles sous forme d'expressions littérales reflète une compétence fondamentale en modélisation mathématique. Cette tâche illustre une transition fondamentale entre arithmétique et algèbre : plutôt que de calculer ou d'estimer, les élèves sont invités à généraliser et à représenter une relation. Selon le cadre DiToM, cette capacité joue un rôle central dans le développement de la pensée fonctionnelle, de la structure des expressions et de l'utilisation des variables. Elle favorise également une compréhension approfondie des opérations, du rôle des parenthèses et de la propriété de distributivité, compétences essentielles pour la manipulation des expressions et des équations.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s’attendre avec cette tâche ?

De nombreux élèves ont tendance à négliger la nécessité des parenthèses et choisissent des expressions telles que $13x + 3{,}20$. D'autres peuvent inverser la multiplication, en choisissant $x + 13 \times 3{,}20$, ou représenter de manière erronée seulement une partie de la situation. Ces distracteurs sont délibérément choisis pour révéler des erreurs spécifiques : par exemple, ne pas appliquer les priorités opératoires ou mal interpréter la manière dont la répétition des coûts est modélisée en algèbre. Dans certains cas, les élèves optent également pour l'option qui semble la plus simple numériquement sans en analyser la signification, ce qui suggère une lecture superficielle plutôt qu'au raisonnement relationnel.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Pour renforcer la compréhension des élèves, il peut être utile de visualiser le scénario à l'aide de tableaux ou de diagrammes, en affichant une ligne par personne et en totalisant les coûts par colonne. La modélisation explicite de tâches similaires, telles que « chaque personne paie x€ et y€, quel est le total pour n personnes ? », permet de se familiariser avec le rôle de parenthèses. Mettre l'accent sur l'utilisation des parenthèses à travers des expressions orales (« le tout par personne, puis multiplié par 13 ») aide les élèves à transposer les structures verbales sous forme algébrique. De plus, des discussions comparant les options données et évaluant ce que chaque expression représente peuvent aider les élèves à élaborer des stratégies métacognitives pour interpréter les choix symboliques. Il est également intéressant d’encourager l'élève (qui ne sait pas par où commencer) à commencer par tester avec n'importe quel nombre (choisi par lui-même).

Tâche 1.5 : Traduire un programme de calcul par une expression littérale

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisis un nombre
- Ajoute 4 à ce nombre
- Multiplie le résultat par 8.

On appelle x le nombre de départ. Quelle expression traduit le programme de calcul ci-dessus ?

☐ $8 \times x + 4$ ☐ $(x + 4) \times 8$

☐ $x + 4 \times 8$ ☐ $(8 \times 4) + x$

Solution

Première solution, en deux étapes.

Étape 1 En ajoutant 4 à x , on obtient le résultat $x + 4$

Étape 2 En multipliant le résultat $x + 4$ par 8, on obtient la réponse $8 \times (x + 4) = (x + 4) \times 8$.

Deuxième solution, basée sur un test avec un nombre et une généralisation : supposons que $x = 17$.

Étape 1 En ajoutant 4 à 17, on obtient le résultat $17 + 4 = 21$

Étape 2 En multipliant le résultat21 par 8, on obtient la réponse 21×8 .

Étape 3 Analysez ce qui est arrivé à 17 : $21 \times 8 = (17 + 4) \times 8 = (x + 4) \times 8$.

Comme dans la solution de l'exercice précédent, nous pouvons également « suivre le nombre » pour trouver la réponse :

Avec le nombre	Avec la variable
$17 + 4$	$x + 4$
$8 \times (17 + 4)$	$8 \times (x + 4)$

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche demande aux élèves de représenter un programme de calcul qui demande d'exprimer symboliquement le résultat de l'addition de 4 à x, puis de la multiplication du résultat par 8. Bien que les instructions verbales mentionnent des étapes supplémentaires, les choix de réponse ne font référence qu'à cette première chaîne d'opérations. L'expression correcte dans ce contexte est $(x + 4) \times 8$, ce qui exige des élèves qu'ils respectent l'ordre des opérations en regroupant $x + 4$ avec des parenthèses avant d'appliquer la multiplication.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Comprendre et représenter la structure hiérarchique des opérations est une compétence fondamentale en algèbre. Elle permet aux élèves de passer de l'interprétation arithmétique étape par étape à l'organisation de ces étapes sous une forme symbolique structurée. Selon le cadre DiToM, cela fait partie du développement des compétences en modélisation symbolique, en particulier l'utilisation de parenthèses pour clarifier la priorité des opérations. Cela est non seulement essentiel pour évaluer correctement les expressions, mais aussi pour renforcer la confiance dans la manipulation des formules et la résolution d'équations par la suite.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s’attendre avec cette tâche ?

Les distracteurs sont soigneusement choisis pour révéler des incompréhensions structurelles spécifiques. Par exemple, $8 \times x + 4$ représente l'erreur consistant à ne pas considérer les priorités opératoires. Le choix $x + 4 \times 8$ montre une lecture linéaire et une priorité opératoire non prise en compte. $(8 \times 4) + x$ ignore complètement la structure, suggérant une concentration superficielle sur les nombres impliqués plutôt que sur la relation. Ces choix de réponses ne sont pas aléatoires : ils indiquent si un élève comprend comment les parenthèses affectent l'ordre des opérations et s'il est capable d'analyser un programme de calcul en plusieurs étapes de manière structurelle plutôt que séquentielle.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Le soutien doit viser à renforcer la conscience des élèves quant aux parenthèses et leur compréhension de la priorité des opérations. Une approche possible est de laisser les élèves verbaliser chaque étape, puis de traduire chaque étape pas à pas. Il faut les encourager à comparer des expressions telles que $x + 4 \times 8$ et $(x + 4) \times 8$ avec des substitutions numériques (par exemple, $x = 2$) afin de vérifier si la structure correspond au sens voulu. Expliquer pourquoi les parenthèses sont nécessaires dans ce contexte aide les élèves à dépasser la simple traduction procédurale pour parvenir à une véritable compréhension de la structure. Les élèves peuvent également commencer par tester des nombres qu'ils ont eux-mêmes choisis et généraliser leur calcul.

Tâche 1.6 : Évaluer une expression avec substitution de variable

Quelle est la valeur de $1 + 3x$ pour $x = 8$?

- ☑ 25
- ☐ 32
- ☐ 39
- ☐ 48

Solution

La clé pour résoudre ce problème est de noter que $3x = 3 \times x$ doit être calculée avant d'ajouter 1.

Solution en une étape : définir $x = 8$ et calculer

$$1 + 3x = 1 + 3 \times 8 = 1 + 24 = 25$$

Solution en deux étapes : définir $x = 8$. Calculer d'abord $3x = 3 \times 8 = 24$. Calculez ensuite $1 + 24 = 25$.

Pour avoir une meilleure vue d'ensemble des calculs en deux étapes, nous pouvons les présenter sur des lignes séparées :

$$x = 8$$

$$3x = 3 \times x = 3 \times 8 = 24$$

$$1 + 3x = 1 + 24 = 25$$

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à évaluer une expression littérale en substituant une valeur donnée à la variable et en appliquant les priorités opératoires. Sachant que $3x$ signifie 3 fois x , la procédure correcte consiste à multiplier d'abord : $1 + 3 \times 8 = 1 + 24 = 25$.

Les élèves doivent remplacer correctement la variable, puis effectuer les opérations dans le bon ordre, en respectant la priorité des opérations.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La substitution est l'un des processus les plus fondamentaux de l'algèbre et constitue un pont entre les expressions symboliques et le raisonnement numérique. Dans le cadre de DiToM, l'évaluation d'expressions par substitution de valeurs aide à développer la maîtrise des opérations, le sens des symboles et la compréhension des variables. Ces compétences sont fondamentales pour aborder les fonctions, construire des tableaux et des graphiques et résoudre des problèmes concrets par l'algèbre. Elles favorisent également une compréhension flexible de la structure, en particulier la relation entre les symboles, les opérations et leur signification.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Les erreurs courantes consistent en une compréhension erronée de la structure de l'expression ou à ne pas appliquer l'ordre des opérations. Certains élèves peuvent calculer 1 + (3 + 8) = 12, en lisant à tort $3x$ comme $3 + x$ plutôt que $3 \times x$. D'autres peuvent évaluer incorrectement $3x$ comme 38 (en concaténant 3 et 8) et conclure par 39, ce qui reflète une mauvaise interprétation symbolique plutôt qu'une erreur de calcul. Les élèves qui choisissent 32 ont peut-être d'abord ajouté 1 à 3, puis multiplié la somme par 8 : (1 + 3) × 8 = 32. Le choix 48 correspond à la combinaison de deux erreurs : pas de respect des priorités opératoires et une interprétation erronée de 1+3=4 en 4 dizaines, combiné à 8 unités. Ces distracteurs révèlent des erreurs liées à la compréhension des variables, de la structure des expressions et du respect des priorités opératoires.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

L'enseignement doit mettre l'accent sur la lecture des expressions littérales d'un point de vue structurel et non procédural. Les enseignants peuvent faciliter l'apprentissage en encourageant les élèves à verbaliser les expressions (« un plus trois fois x ») et à les relier à l'évaluation par un nombre. L'utilisation de tableaux de valeurs qui séparent clairement chaque opération permet de clarifier la structure. Les activités de comparaison, telles que l'évaluation de $1 + 3x$ et $(1 + 3)x$, permettent de mettre en évidence la manière dont les parenthèses modifient l'ordre des opérations. Le renforcement des priorités opératoires par des exercices structurés, en particulier dans des contextes sans parenthèses, favorise la précision et la fluidité à long terme.

Tâche 1.7 : Tester une égalité

Pour quelle valeur de x l'égalité $7x + 3 = 80$ est-elle vérifiée ?

☐ $x = 7$

☐ $x = 8$

☐ $x = 10$

☐ $x = 11$

Solution

Première solution, basée sur le test des quatre nombres :

x	7	8	10	11
$7x + 3$	$49 + 3 = 52$	$56 + 3 = 59$	$70 + 3 = 73$	$77 + 3 = 80$

Correspond au nombre 80 donné dans l'équation

Deuxième solution, basée sur le calcul de $7x + 3$ avec certains des nombres suggérés : Nous pouvons commencer avec n'importe lequel des quatre nombres, par exemple $x = 10$, ce qui donne le calcul simple

$7x + 3 = 7 \times 10 + 3 = 70 + 3 = 73$ (ne correspond pas à 80)

La réponse 73 est inférieure à 80, nous avons donc besoin d'un nombre supérieur à 10. Le seul nombre de ce type parmi les quatre est $x = 11$, qui donne le calcul

$7x + 3 = 7 \times 11 + 3 = 77 + 3 = 80$ (correspond au nombre 80 donné dans l'équation)

Nous pouvons donc conclure que la bonne réponse est $x = 11$.

Troisième solution, résolution algébrique de l'équation (version courte) :

$7x + 3 = 80$ (soustraire 3)

$7x = 77$ (diviser par 7)

$$x = \frac{77}{7} = 11$$

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue si les élèves comprennent le concept d'équation et sont capables de déterminer si un nombre donné est une solution en substituant des valeurs. Les élèves doivent résoudre l'équation $7x + 3 = 80$ et trouver la valeur de x qui rend cette égalité vraie. La réponse correcte est $x = 11$, car la substitution de cette valeur donne : $7 \times 11 + 3 = 80$.

Pour répondre correctement, les élèves doivent non seulement effectuer le calcul, mais aussi comprendre qu'une solution d'une équation est un nombre qui équilibre ses deux membres.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Comprendre les équations comme des affirmations d'égalité et savoir les vérifier est fondamental en algèbre. Dans le cadre de DiToM, cette compétence appartient au domaine de l'interprétation symbolique et du raisonnement sur l'égalité. Elle prépare les élèves à résoudre des équations de manière systématique et à vérifier si une solution candidate satisfait une équation. Cette compréhension favorise une réflexion algébrique de plus haut niveau et renforce le sens des nombres.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Certains élèves peuvent substituer les valeurs mécaniquement, mais commettre des erreurs de calcul en évaluant $7x + 3$. D'autres peuvent avoir une mauvaise interprétation d'une équation, l'interprétant comme des instructions de calcul plutôt que comme une déclaration conditionnelle. Une erreur courante consiste à choisir $x = 10$, simplement parce que cela « semble proche », ce qui suggère une estimation plutôt qu'un raisonnement. Certains pourraient choisir $x = 8$ ou $x = 7$ en se basant sur des suppositions ou une substitution incomplète ou remplacer x par 7 comme chiffre d'un nombre dans le système décimal (77+3=80). Ces erreurs révèlent des difficultés dans la compréhension de la signification de l'égalité, ainsi que des faiblesses pour substituer.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves doivent être guidés à travers des activités qui mettent l'accent sur ce que signifie le fait qu'une valeur satisfasse une égalité. Des tableaux de valeurs dans lesquels les élèves testent les deux membres de l'égalité sur plusieurs valeurs peut aider à développer leur intuition. L'utilisation de métaphores ou de manipulations basées sur la balance peut favoriser la compréhension conceptuelle de l'égalité. Enfin, donner aux élèves la possibilité de créer leurs propres égalités et de tester des valeurs contribue à renforcer leur appropriation et leur compréhension des équations.

Tâche 2.1 : Résoudre un problème de recherche d'une quatrième proportionnelle dans un contexte réel

2kg de pommes coûtent 2,40 €. Détermine le prix de 5kg de pommes.

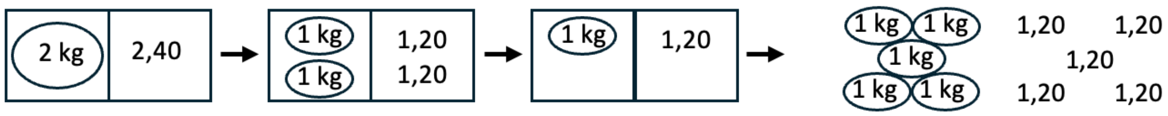
6

Solution

Solution basée sur la linéarité multiplicative : 2 kg coûtent 2,40 €, donc 4 kg coûtent 4,80 €. 1 kg supplémentaire coûte 1,20 €, donc 5 kg coûtent $4{,}80 + 1{,}20 = 6$ €.

Deuxième solution, basée sur un retour à l'unité : 2 kg coûtent 2,40 €, donc 1 kg coûte 1,20 €. 5 kg coûtent 5 fois plus cher : $5 \times 1{,}20 = 6$ €.

Les deux solutions peuvent être illustrées par des schémas. Par exemple, en ce qui concerne la dernière solution :



OU encore avec une notation symbolique semi-formelle :

$2 \text{ kg} : 2{,}40$ € (diviser par 2)
$1 \text{ kg} : 1{,}20$ € (multiplier par 5)
$5 \text{ kg} : 6$ €

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche demande aux élèves d'appliquer un raisonnement multiplicatif pour résoudre un problème de proportionnalité intégré dans un contexte quotidien familier. Étant donné que 2 kg de pommes de terre coûtent 2,40 €, les élèves doivent déterminer le prix de 5 kg. Cela implique de reconnaître un prix constant par kilogramme (1,20 € par kg) et de l'appliquer à une nouvelle quantité. Plusieurs procédures sont correctes : revenir au prix pour un kilogramme (diviser 2,40 € par 2 et multiplier par 5), raisonner avec les propriétés de linéarité multiplicative et/ou additive (par exemple interpréter 5 = 2 + 2 + 1 et additionner 2,40 + 2,40 + 1,20). La tâche évalue non seulement la capacité à calculer une quatrième proportionnelle, mais aussi la compréhension conceptuelle de la façon dont les quantités augmentent en proportion directe.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Le raisonnement proportionnel est une des pierres angulaires de la pensée mathématique. Il permet aux élèves d'interpréter et de modéliser des relations du monde réel. Dans le cadre de DiToM, ce type de tâche soutient les étapes clés du développement vers la pensée fonctionnelle. En outre, il favorise le sens des nombres et la flexibilité dans l'application de différentes stratégies à des situations proportionnelles.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

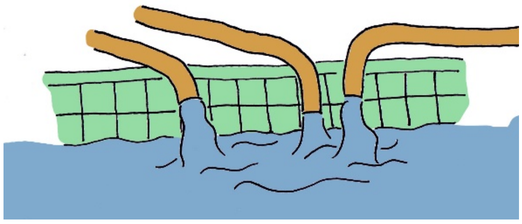
Les élèves peuvent utiliser à tort le raisonnement additif, par exemple en calculant « 2 kg → 2,40 €, donc 5 kg → 2,40 € + 5 € » ou en effectuant d'autres calculs incohérents, ce qui indique qu'ils ne comprennent pas le raisonnement proportionnel. D'autres pourraient tenter de multiplier par 2 puis de soustraire (par exemple, 2 kg → 2,40 €, 4 kg → 4,80 €, puis en déduire d'une manière ou d'une autre 5 kg), ce qui peut refléter une utilisation partielle de la stratégie. Certains apprenants se contentent de deviner un prix qui « semble raisonnable », ce qui montre une familiarité superficielle avec le contexte, mais un raisonnement proportionnel faible. Des erreurs peuvent également provenir d'un calcul inexact ou d'une division incorrecte (par exemple, diviser 5 par 2,40 au lieu de l'inverse).

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Le soutien doit être axé sur le développement d'une solide compréhension intuitive et procédurale de la proportionnalité. Les enseignants peuvent poser des questions telles que « Combien coûte 1 kg ? » ou « Que se passe-t-il si vous achetez deux fois plus ? ». Comparer plusieurs stratégies aide les élèves à développer leur flexibilité et à prendre l'habitude de vérifier leurs erreurs. Relier ces problèmes à des expériences d'achats réels peut également renforcer l'engagement et la compréhension.

Tâche 2.2 : Résoudre un problème impliquant une proportionnalité inverse

Une piscine met 6 heures à se remplir en utilisant 4 robinets identiques. Combien de ces robinets faudra-t-il pour remplir une piscine de même capacité en 2 heures ?



Solution

Solution basée sur un raisonnement proportionnel : puisque quatre robinets remplissent la piscine en 6 heures, chaque robinet remplit $\frac{1}{4}$ d'une piscine en 6 heures et $\frac{1}{12}$ d'une piscine en 2 heures. Nous en concluons qu'il faut 12 robinets pour remplir la piscine en 2 heures.

Pour étayer le raisonnement étape par étape, cette solution peut être présentée sous forme de notation semi-symbolique :

$$\text{4 robinets remplissent 1 piscine en 6 heures}$$

$$\text{1 robinet remplit } \frac{1}{4} \text{ d'une piscine en 6 heures}$$

$$\text{1 robinet remplit } \frac{1}{12} \text{ d'une piscine en 2 heures}$$

$$\text{12 robinets remplissent 1 piscine en 2 heures}$$

Raisonnement similaire, basé sur une formule : Le volume d'eau ajouté est proportionnel à (#robinets) × (temps). Nous savons que (en ignorant les unités)

$$(4 \text{ robinets}) \cdot (6 \text{ heures}) = 1 \text{ piscine}$$

$$(1 \text{ robinet}) \cdot (6 \text{ heures}) = \tfrac{1}{4} \text{ piscine}$$

$$(1 \text{ robinet}) \cdot (2 \text{ heures}) = \frac{1}{12} \text{ piscine}$$

$$(12 \text{ robinet}) \cdot (2 \text{ heures}) = 1 \text{ piscine}$$

Compétence clé testée avec cette tâche

Cette tâche implique un scénario réel dans lequel les élèves doivent comprendre la relation entre le temps et la quantité dans un processus de remplissage. Plus précisément, quatre robinets identiques remplissent une piscine en 6 heures. La question est maintenant la suivante : combien de robinets sont nécessaires pour remplir la même piscine en seulement 2 heures ? Pour résoudre l'exercice, les élèves doivent comprendre que plus la tâche doit être accomplie rapidement, plus il faut de robinets. Bien que cela ne soit pas explicitement indiqué, il s'agit d'un cas de proportionnalité inverse, où une quantité augmente à mesure que l'autre diminue. Une stratégie valable et accessible consiste à organiser les valeurs connues et souhaitées dans un tableau :

Nombre de robinets	Temps (en heures)
4	6
?	2

À partir de là, les élèves peuvent raisonner que, puisque le temps est divisé par 3 (de 6 à 2 heures), le nombre de robinets doit être multiplié par 3, ce qui donne : $4 \times 3 = 12$ robinets.
Cette stratégie met l'accent sur la pensée relationnelle et favorise une approche de raisonnement proportionnel sans recourir à des méthodes formelles ou abstraites.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La capacité à comprendre les relations dans lesquelles les quantités interagissent dans des directions opposées est un aspect essentiel de la proportionnalité. Contrairement aux proportions directes, les relations inverses exigent un autre type de conscience structurelle. Selon le cadre DiToM, la maîtrise de cette compétence aide les élèves à développer leur raisonnement quantitatif et les prépare à la pensée fonctionnelle. De telles situations permettent également de développer les compétences des élèves en matière de modélisation et de compréhension des relations du monde réel à l'aide d'outils mathématiques.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Certains élèves peuvent mal interpréter le scénario comme un cas de proportion directe, en supposant que la réduction du temps devrait également réduire le nombre de robinets, ce qui peut les amener à des réponses incorrectes telles que 1 robinet ou 2 robinets. D'autres peuvent appliquer des stratégies arithmétiques de manière incohérente ou inverser la proportionnalité, en divisant le nombre de robinets au lieu de l'augmenter. Une erreur fréquente consiste à traiter la situation de manière additive plutôt que multiplicative (par exemple, « 2 est inférieur à 6 de 4, donc soustraire 4 robinets »). Ces schémas indiquent un manque de familiarité avec les structures inverses.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

L'enseignant peut commencer par des modèles visuels ou des exemples concrets qui montrent comment un plus grand nombre de personnes ou d'appareils travaillant ensemble permettent d'accomplir une tâche plus rapidement. L'utilisation de tableaux comme celui ci-dessus permet de rendre explicites les relations multiplicatives. Il peut être également utile de poser des questions guidées comme « Que se passe-t-il si vous devez terminer en deux fois moins de temps ? » ou « Comment le temps change-t-il lorsque vous doublez le nombre de robinets ? ». Proposer des tâches de comparaison par paires (une directe, une inverse) peut aider à mettre en évidence les différences structurelles. Encourager les élèves à expliquer leur raisonnement à haute voix ou à comparer différentes solutions renforce également leur compréhension.

Tâche 2.3 : Identifier des relations proportionnelles dans des représentations tabulaires

Pour chaque tableau, coche la case si le prix est proportionnel au nombre de gâteaux.

a) Tableau 1

Gâteaux	1	2	5
Prix	5	10	50

☐

b) Tableau 2

Gâteaux	1	2	5
Prix	11	12	15

☐

c) Tableau 3

Gâteaux	1	2	5
Prix	3	6	15

☒

Solution

Deux stratégies pour identifier la proportionnalité directe entre deux variables :

1) Lorsque deux proportions sont comparées (par exemple, dans le tableau 1 : 1:5 et 2:10), les variables doivent varier selon le même facteur (dans ce cas, 2). Cependant, lorsque l'on compare 1:5 et 5:50, les variables varient selon des facteurs différents : 5 et 10. Par conséquent, le tableau 1 ne représente pas une relation proportionnelle.

2) Dans chaque proportion, le quotient des variables doit être le même (par exemple $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ ou $\frac{5}{1} = \frac{10}{2}$).

Dans cet exercice, le quotient $\frac{\text{prix}}{\text{nombre de gâteaux}}$ peut être interprété comme le prix par gâteau. Dans le tableau 1, le prix par biscuit est $5/1 = 5$, $10/2 = 5$, $50/5 = 10$, selon le nombre de gâteaux achetés. Par conséquent, le tableau 1 ne représente pas une relation proportionnelle.

Tableau 1, stratégie 1 représentée dans un tableau :

Facteur		2		2,5	
Gâteaux	1		2		5
Prix	5		10		50
Facteur		2		5	

Non OK

Tableau 1, stratégie 2 présentée dans un tableau :

Gâteaux	1	2	5
Prix	5	10	50
Quotient	5	5	10

Non (prix par gâteau différents : 5, 5, 10)

Dans le tableau 2, on constate facilement que les proportions 11:1 et 12:2 ne sont pas égales. Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer d'autres calculs pour conclure que les variables ne sont pas proportionnelles.

Dans le tableau 3, le prix unitaire est de 3 pour chacune des proportions et les variables sont donc directement proportionnelles.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à analyser des données fournies dans un contexte et présentées dans un tableau afin de déterminer s'il existe une relation proportionnelle entre deux quantités. Dans chacun des trois tableaux, les élèves doivent examiner si la relation entre les colonnes peut être décrite par un facteur multiplicatif constant, qui est la caractéristique déterminante de la proportionnalité directe. Les élèves doivent cocher la case si le tableau est directement proportionnel.

Pour réussir cette tâche, voici quelques exemples de résolution :

- Vérifiez si les quotients (par exemple, y : x) sont constants sur toutes les lignes
- Vérifiez si la multiplication croisée donne des produits équivalents
- Identifiez si une règle cohérente telle que « multiplier par 3 » ou « doubler » s'applique

Cette forme d'analyse nécessite de prêter attention aux modèles multiplicatifs sous-jacents, et pas seulement aux caractéristiques superficielles.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La compréhension des relations proportionnelles est un élément fondamental de la pensée fonctionnelle et algébrique. Dans le cadre de DiToM, cette tâche favorise le développement du raisonnement relationnel. La capacité à déterminer si une relation est proportionnelle constitue une base essentielle pour interpréter les fonctions linéaires, les problèmes d'échelle et les représentations graphiques. Elle favorise également la flexibilité dans le travail avec différentes représentations : tableaux, graphiques et langage naturel.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Certains élèves peuvent considérer des relations comme proportionnelles sur la base d'augmentations superficielles (par exemple, « les deux nombres augmentent ») sans vérifier la constance du rapport. D'autres peuvent comparer des différences absolues au lieu de rapports, confondant le raisonnement additif et le raisonnement multiplicatif. Par exemple, si les deux valeurs augmentent de 2, les élèves peuvent conclure à tort à une proportionnalité. Des erreurs peuvent également résulter d'un calcul imprudent (par exemple, une division incorrecte ou l'omission de valeurs). Ces erreurs reflètent des compétences insuffisamment développées en matière de comparaison multiplicative, d'interprétation de taux et de généralisation symbolique. Dans certains cas, les élèves peuvent mal classer un tableau non proportionnel en raison de la présence de chiffres d'apparence simple ou cocher tous les tableaux pour éviter l'analyse. Ces tendances soulignent la nécessité de développer des stratégies de structuration plus solides et de développer la vérification.

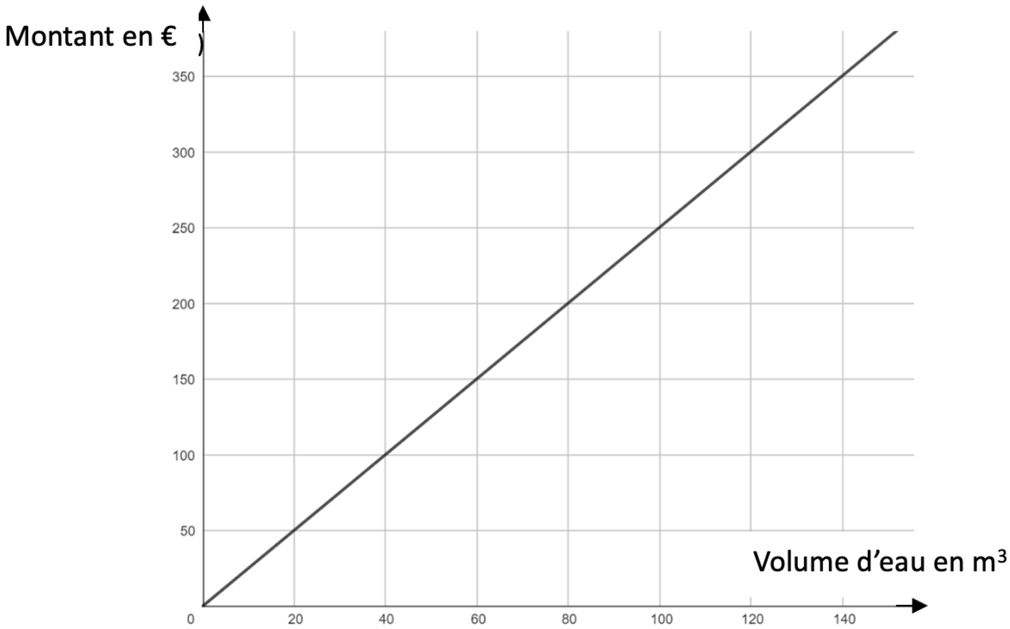
Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Un premier soutien consiste à demander aux élèves de tester systématiquement la proportionnalité. Les enseignants peuvent montrer comment expliquer verbalement les résultats (« Parce que 6 : 2 = 3 et 9 : 3 = 3, le rapport est constant ») et encourager les élèves à utiliser des listes de contrôle lorsqu'ils analysent des tableaux. Les tâches de discussion par paires, dans lesquelles les élèves défendent la proportionnalité d'un tableau, peuvent conduire à approfondir le raisonnement. Le fait de relier les tableaux à des scénarios proportionnels du monde réel (par exemple, des recettes, des prix, des vitesses) aide à ancrer la compréhension et favorise le transfert.

Tâche 2.4 : Utiliser des graphiques dans un contexte proportionnel

Sur le graphique ci-dessous :

- Le volume d'eau (en m³) est représenté en abscisse,
- Le montant (en euros) est représenté en ordonnée.

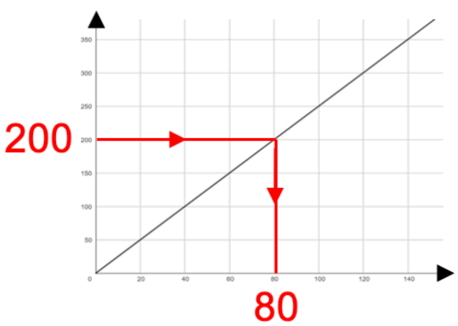


a) Détermine le volume d'eau en m^3 pour 200 €. *80* m^3

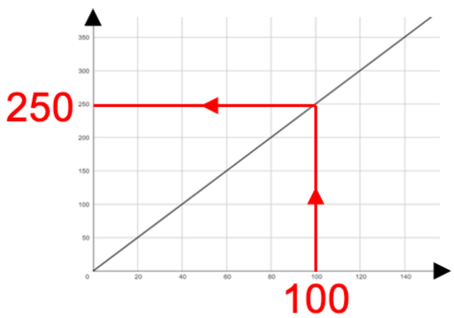
b) Calcule le prix en € de 300 m^3 d'eau. *750 €*

Solution

a)



b)



Dans la partie b), nous commençons par observer que 100 m^3 coûtent 250 euros.

Nous poursuivons en affirmant que 300 m^3 coûtent trois fois plus cher que 100 m^3 et concluons que 300 m^3 coûtent $3 \times 250 = 750$ €.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche en deux parties évalue la capacité des élèves à interpréter un graphique représentant une fonction l linéaire. Dans la partie A, la tâche consiste à lire une valeur directement sur le graphique : déterminer combien de mètres cubes d'eau sont disponibles pour 200 €. Dans la partie B, l'élève doit déterminer le prix de 300 m³ d'eau, une valeur qui dépasse la plage visible du graphique, et doit donc calculer en se basant sur une lecture graphique et prenant l'initiative de choisir une valeur en abscisse adaptée (100).

La compétence clé réside dans la capacité à relier la représentation graphique au raisonnement proportionnel sous-jacent et à faire la distinction entre la lecture du graphique et l'extrapolation basée sur un modèle.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La lecture et l'interprétation des graphiques constituent une compétence mathématique fondamentale. Cette tâche fait le lien entre l'interprétation visuelle des données et la pensée fonctionnelle. Selon le cadre de DiToM, ce type d'activité développe la capacité à : comprendre la pente comme un taux, utiliser un graphique comme outil d'aide à la décision, faire des liens entre des représentations graphiques, numériques et verbales. De plus, cette compétence soutient les compétences en modélisation mathématique, en particulier pour reconnaître quand les données doivent être étendues par un raisonnement proportionnel plutôt que par une estimation.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Dans la partie A, les élèves peuvent mal interpréter les axes (par exemple, mal aligner les valeurs en raison d'une échelle inhabituelle) ou interpoler incorrectement entre les points. S'ils ne comprennent pas que le graphique représente une relation continue, ils peuvent se référer uniquement aux valeurs indiquées sur la grille et ignorer les points intermédiaires. Dans la partie B, certains élèves peuvent tenter d'extrapoler visuellement malgré le fait que le graphique s'arrête à 140 m³, ce qui conduit à des réponses imprécises ou spéculatives. D'autres peuvent ne pas reconnaître la structure linéaire et se rabattre sur des stratégies de devinette ou sans rapport. Une autre erreur typique consiste à mal interpréter la pente, par exemple en pensant qu'elle augmente de manière non linéaire ou qu'elle change de manière imprévisible au-delà de la plage visible. Ces difficultés peuvent refléter des difficultés dans la compréhension de la croissance proportionnelle, de l'extrapolation linéaire ou des conventions de lecture des graphiques (telles que l'échelle et l'alignement des lignes de la grille).

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Un soutien ciblé devrait commencer par des exercices de lecture de graphiques guidés qui aident les élèves à aligner correctement les valeurs sur les deux axes, à reconnaître les taux constants et à utiliser des règles ou du papier calque pour maintenir l'orientation. Pour l'extrapolation (partie B), l'enseignement devrait mettre l'accent sur la manière de déterminer le taux unitaire à partir du graphique (par exemple, 1 € par m³ ou 5 € par 20 m³), puis d'étendre cette relation numériquement ou à l'aide d'un tableau. Les enseignants peuvent également encourager les élèves à exprimer avec des mots « ce que dit le graphique » (par exemple, « pour chaque 20 mètres cubes, le coût augmente de 50 € »), renforçant ainsi les liens verbaux, numériques et visuels.

Tâche 2.5 : Résoudre un problème de division dans un contexte réel

Un réservoir contient 810 litres d'eau. Chaque jour, 30 litres d'eau sont prélevés dans le réservoir.

Au bout de combien de jours le réservoir sera-t-il vide ?

27 jours

Solution

Les 30 litres prélevés quotidiennement donnent un total de $30 \times n$ litres prélevés après n jours.

Première solution, basée sur la division : Le nombre de jours nécessaires peut être exprimé comme suit

$$\frac{810}{30} = \frac{81}{3} = 27$$

Deuxième solution, basée sur la multiplication. Représentée ici dans un tableau :

Nombre de jours	1	10	20	7	27
volume	30	300	600	210	810

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité à résoudre un problème de division dans un contexte temporel, où une quantité totale (810 litres d'eau) est consommée à un rythme quotidien constant (30 litres par jour). La question est de savoir combien de prélèvements quotidiens égaux sont nécessaires pour vider complètement le réservoir de stockage. Cela implique d'interpréter la division comme « combien de fois 30 peut-il être divisé par 810 » ou, de manière équivalente :

810 : 30 = 27 jours

Cette interprétation nécessite une compréhension de la soustraction (ou de l'addition) répétée dans le temps et la capacité à traduire un processus du monde réel en une opération symbolique.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Dans le cadre de DiToM, cette tâche soutient les compétences clés en matière de raisonnement multiplicatif, de pensée fonctionnelle et de structuration algébrique de base. Les élèves doivent identifier la régularité sous-jacente (« 30 litres par jour ») et l'étendre à un processus répété. Cela renforce également la compréhension des taux, de la modélisation du temps et de l'interprétation de la division dans des contextes non spatiaux et axés sur les processus. Ce raisonnement sous-tend l'apprentissage ultérieur des fonctions linéaires, des modèles de croissance et des équations différentielles.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s’attendre avec cette tâche ?

Dans la pratique, de nombreux élèves abordent la tâche avec les stratégies suivantes :

- Soustraction répétée : soustraire 30 de 810 encore et encore et compter les étapes
- Addition répétée : ajouter 30 à chaque fois jusqu'à atteindre 810, puis compter le nombre d'étapes
- Erreurs d'estimation : sauter à des chiffres qui semblent plausibles, comme 30 ou 25
- Erreurs arithmétiques lors de la division longue ou placement incorrect des virgules décimales

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Le soutien doit viser à aider les élèves à construire un modèle interne de répartition égale dans le temps. Des supports visuels tels que des barres divisées en parties égales, des droites graduées ou des calendriers peuvent faciliter la compréhension. Les enseignants peuvent encourager les élèves à représenter la situation à l'aide d'expressions de division et à expliquer ce que chaque nombre représente. Le fait de relier ce problème à des routines de la vie quotidienne (par exemple, la consommation quotidienne d'eau, les portions de repas, la gestion du budget sur plusieurs jours) peut aider à le rendre plus familier. Mettre l'accent sur le regroupement stratégique, par exemple en divisant par 10 jours (10 × 30 = 300), favorise un raisonnement efficace et le contrôle de l'estimation.

Tâche 2.6 : Combiner les coûts fixes et variables dans un contexte réel

Sven a invité 15 amis pour sa fête d'anniversaire.

Il a payé 50€ pour la réservation d'une salle de jeux et 10€ par ami invité.

Combien Sven a-t-il payé en tout ?

200 euros

Solution

Sven doit payer 50 euros pour la salle de jeux, comme coût de base.

De plus, Sven doit payer 10 euros pour chacun de ses 15 amis. Cela représente un coût supplémentaire de $15 \times 10 = 150$ s d'euros.

Le coût total est de $50 + 150 = 200$ d'euros.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à appliquer les opérations arithmétiques dans un contexte réel impliquant des coûts fixes et variables. On indique aux élèves que Sven dépense 50 € pour une salle de jeux et 10 € supplémentaires pour chaque ami invité. La tâche consiste à déterminer le coût total de la fête d'anniversaire.

La stratégie attendue est la suivante :

1. Calculer le coût variable :
   15 chaînes × 10 € = 150 €

2. Ajouter le coût fixe :
   150 € + 50 € = 200 € de coût total

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Cette tâche pose les bases importantes de la pensée fonctionnelle et de l'algèbre élémentaire, en particulier le concept des modèles affines. Dans le cadre de DiToM, elle favorise le développement des compétences en modélisation mathématique, la maîtrise opérationnelle et l'interprétation des expressions symboliques dans des situations appliquées. Comprendre la distinction entre les composantes fixes et variables est essentiel dans de nombreux contextes de la vie réelle, tels que la budgétisation, la tarification et la planification des ressources. De plus, cette tâche renforce la capacité des élèves à structurer des problèmes en plusieurs étapes, une caractéristique clé de la résolution de problèmes mathématiques intermédiaires.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une erreur courante consiste à ne calculer que le coût variable et à omettre le coût fixe. Cela révèle une compréhension partielle de la structure de la tâche, où seule une composante (souvent la plus facilement calculable) est prise en compte. D'autres élèves peuvent inverser les étapes (par exemple, soustraire 50 € de 150 €) ou mal comprendre le rôle de chaque nombre. Certains peuvent multiplier par erreur toutes les valeurs entre elles ou tenter des opérations inutiles, ce qui reflète une mauvaise interprétation de la formulation du problème. Ces erreurs signalent des difficultés dans la lecture des tâches à plusieurs étapes, dans la mise en correspondance des quantités du monde réel avec les opérations et dans l'intégration de différentes composantes numériques en une seule solution cohérente.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les enseignants peuvent aider les élèves en structurant visuellement le problème, par exemple en utilisant un tableau à deux lignes (fixe et variable) ou en représentant le coût total sous forme de barre divisée en deux parties. Enseigner et s'exercer explicitement avec la formule « total = fixe + variable » dans différents contextes peut permettre de se familiariser avec les modèles affines.

De plus, inciter les élèves à relire la question et à vérifier si leur réponse inclut « tous » les coûts favorise la vérification métacognitive. L'utilisation de problèmes écrits qui isolent les coûts fixes et variables avant de les combiner peut faciliter la compréhension étape par étape. Enfin, verbaliser la situation (par exemple, « Il doit payer 50 € quoi qu'il arrive et 10 € de plus pour chaque invité ») permet de relier plus clairement le langage et la structure mathématique.

Tâche 3.1 : Convertir une fraction en pourcentage

Exprime la fraction $\frac{3}{5}$ sous forme de pourcentage.

☐ 0,6% ☐ 35% ☐ 6% ☑ 60%

Solution

Première solution, en utilisant le fait que $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%, \text{ donc } \frac{3}{5} = 3 \cdot 20\% = 60\%$$

Deuxième solution, en convertissant la fraction en une fraction décimale de dénominateur 100 :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Troisième solution, basée sur la division :

$$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 0{,}60 = 60\%$$

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à convertir une fraction familière (trois cinquièmes) en pourcentage. Pour la résoudre, les élèves doivent comprendre la relation entre les fractions et les pourcentages et reconnaître que :

3⁄5 = 0,6 = 60 %

3/5 = 60/100 = 60 %

Cela implique soit de convertir d'abord la fraction en décimale (en divisant le numérateur par le dénominateur), puis de multiplier par 100, soit d'appliquer les équivalences connues entre fractions et pourcentages. La tâche fait donc appel à la fois à des compétences de calcul et à une compréhension conceptuelle des représentations proportionnelles.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La conversion entre fractions, décimales et pourcentages est fondamentale dans de nombreux contextes de la vie réelle (par exemple, l'interprétation de statistiques, les remises ou les comparaisons de données). Dans le cadre de DiToM, cette compétence favorise la compréhension rationnelle des nombres, la flexibilité numérique et la traduction symbolique. Elle prépare les élèves à des tâches impliquant la croissance en pourcentage, les comparaisons, le raisonnement proportionnel en algèbre et en littératie des données. La maîtrise de ce domaine renforce également la confiance dans les liens entre différentes représentations de parties et de tous, ce qui est essentiel dans tous les domaines mathématiques.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

De nombreux élèves traitent à tort la fraction comme une décimale ou confondent les rôles du numérateur et du dénominateur. Par exemple :

- Le choix de 0,6 % suggère que les élèves interprètent à tort 0,6 comme étant déjà un pourcentage.
- Le choix de 6 % résulte probablement d'un déplacement incorrect de la virgule décimale
- 35 % peut résulter d'une confusion avec trois cinquièmes

Ces erreurs indiquent une confusion entre les valeurs relatives, le déplacement de la virgule décimale et la signification du pourcentage (« pour cent »). Elles révèlent la nécessité d'une meilleure compréhension de la manière dont les fractions s'inscrivent dans les pourcentages basés sur le nombre cent.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les enseignants peuvent aider les élèves en utilisant des modèles visuels (par exemple, des grilles de 100 cases, des diagrammes circulaires) pour montrer comment des fractions telles que 3/5 correspondent à 60 cases grisées sur 100. Des activités structurées qui consistent à convertir de manière répétée des fractions de référence courantes en pourcentages (comme 1/2, 1/4, 3/4, 3/5) peuvent permettre aux élèves de se familiariser avec ces notions et de renforcer leur compréhension.

Encourager les élèves à toujours convertir d'abord en décimale, puis à multiplier par 100, permet d'établir une routine fiable. Les droites graduées et les barres de pourcentage peuvent renforcer davantage l'idée de représentations équivalentes. Les explications verbales (« trois sur cinq, cela équivaut à combien sur cent ? ») aident à consolider la pensée proportionnelle.

Tâche 3.2 : Calculer une augmentation en pourcentage

Si l'on augmente 30 de 50 %, le résultat est :

☐ 80 ☐ 35 ☑ 45 ☐ 15

Solution

Première solution, basée sur l'interprétation de 50 % comme « la moitié » : l'augmentation est la moitié de 30, soit 15. Le résultat après avoir augmenté 30 de 15 est $30 + 15 = 45$.

De manière plus formelle, avec une division : $50\% \text{ of } 30 \text{ c'est } \frac{30}{2} = 15$ Total : $30 + 15 = 45$.

Deuxième solution, basée sur le calcul de l'augmentation de 50 % par multiplication : l'augmentation est de

$50\% \text{ of } 30 \text{ c'est } 0{,}50 \times 30 = 5 \times 3 = 15$ Total : $30 + 15 = 45$.

Troisième solution, basée sur l'interprétation du résultat comme 150 % de 30 :

$$50\% \text{ of } 30 \text{ c'est } 1{,}50 \times 30 = 15 \times 3 = 45$$

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue si les élèves sont capables d'interpréter et d'appliquer correctement une augmentation en pourcentage à une valeur de base donnée. La valeur de départ est 30 et l'instruction est d'augmenter cette valeur de 50 %. Pour arriver à la solution correcte, les élèves doivent déterminer combien représente 50 % de 30, puis ajouter ce résultat à la valeur initiale.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La capacité à calculer et à interpréter des augmentations en pourcentage est une compétence fondamentale tant dans la vie quotidienne que dans des contextes mathématiques avancés. Elle est essentielle pour comprendre, par exemple, des variations de prix, la croissance démographique, les intérêts financiers et les comparaisons statistiques. Selon le cadre de DiToM, le raisonnement lié aux pourcentages favorise le développement de la pensée fonctionnelle, du raisonnement proportionnel et de l'intégration des structures multiplicatives dans différents contextes. Cette tâche renforce en particulier la flexibilité des élèves dans le passage d'une interprétation additive à une interprétation multiplicative des pourcentages. Elle contribue à développer la capacité à généraliser et à raisonner sur des problèmes de plus en plus abstraits.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une erreur courante est la confusion entre les valeurs absolues et les valeurs relatives en pourcentage. Certains élèves peuvent ajouter par erreur 50 à 30 au lieu de 50 % de 30, arrivant ainsi à une réponse incorrecte de 80. Cela indique une mauvaise compréhension du pourcentage en tant que mesure relative. Des élèves peuvent choisir 15 comme réponse, interprétant à tort la tâche comme demandant simplement 50 % de 30, plutôt que de calculer la valeur totale augmentée. D'autres pourraient choisir 35 en raison d'erreurs de calcul mineures ou d'une estimation erronée lors du calcul mental. Il est également possible que les élèves aient mal lu ou mal interprété le libellé du problème, en supposant qu'il s'agissait d'une soustraction ou d'une différence, ou qu'ils se soient fiés à leur intuition plutôt qu'à un raisonnement. De telles erreurs révèlent des difficultés dans la compréhension conceptuelle des pourcentages. Elles peuvent également indiquer une internalisation insuffisante des opérations de pourcentage en tant que processus multiplicatifs évolutifs et la nécessité d'une pratique plus guidée pour distinguer la partie, le tout et le taux d'augmentation.

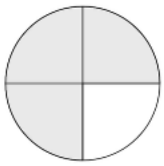
Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les enseignants peuvent fournir un soutien en modélisant des situations réelles où des augmentations de pourcentage se produisent naturellement, telles que les hausses de prix, les augmentations de salaire ou la croissance démographique, ancrant ainsi des concepts abstraits dans des exemples concrets. Des supports visuels tels que des les schémas en barre peuvent aider les élèves à visualiser comment une augmentation de 50 % augmente la quantité initiale. L'utilisation de stratégies additives (par exemple, « trouver 50 %, puis ajouter ») et multiplicatives (par exemple, « multiplier par 1,5 ») et le fait d'encourager les élèves à vérifier les résultats par estimation contribuent à promouvoir la flexibilité stratégique.

Tâche 3.3 : Interpréter des représentations circulaires par des pourcentages

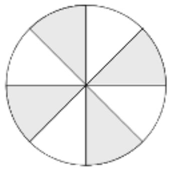
Dans chaque cas, une partie du disque est grisée. Indique cette partie en pourcentage.

a)



Partie du cercle : 75 %

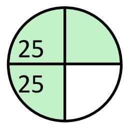
b)



Partie du cercle : 50 %

Solution

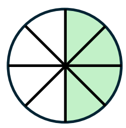
a) Chacune des quatre parties représente 25 % du disque.
Donc, trois parties représentent $3 \times 25\% = 75\%$ du disque.
Ce raisonnement peut être illustré par un dessin.



b) Chacune des huit parties représente 12,5 % du disque (la moitié de 25%).
Ainsi, quatre parties représentent $4 \times 12{,}5\% = 50\%$ du disque.

Une autre façon de résoudre le problème consiste à interpréter la partie colorée comme étant composée de quatre « parts » sur huit. La partie colorée correspond donc à quatre parts et le total à huit parts, ce qui conduit soit directement à l'interprétation « moitié » et à 50 %, soit au calcul suivant

$$\frac{4}{8} = \frac{4}{2 \times 4} = \frac{1}{2} = 50\%$$



La réponse 50 % peut également être obtenue en réorganisant les quatre parts de manière à ce que la « moitié » apparaisse plus clairement.

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à interpréter des parties d'un tout à partir d'une représentation visuelle — dans ce cas, un disque divisé en secteurs égaux — et à convertir ces parties en pourcentages. La tâche se présente en deux parties :

- La partie A montre un disque divisé en quatre secteurs égaux, dont trois sont grisés.
- La partie B présente un disque divisé en huit secteurs égaux, dont un secteur sur deux est grisé, ce qui donne quatre secteurs grisés sur huit.

Dans les deux cas, la solution correcte nécessite de reconnaître la fraction du disque qui est grisée et de la convertir en pourcentage. Cette tâche consiste à traduire des quantités en nombres rationnels ou en fractions, puis en pourcentages, démontrant ainsi une maîtrise des différentes représentations.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La conversion entre modèles visuels, fractions et pourcentages est une compétence centrale dans l'enseignement des mathématiques. Elle favorise une compréhension plus approfondie des relations entre les parties et le tout, du raisonnement proportionnel et de l'estimation. Selon le cadre de DiToM, des tâches comme celle-ci renforcent la flexibilité conceptuelle et la capacité à relier les représentations mathématiques, une caractéristique essentielle de la culture mathématique. Cette compétence est également sollicitée dans des contextes réels, tels que l'interprétation de graphiques, de statistiques et de visualisations de données, où les relations entre les parties et le tout sont souvent intégrées visuellement et exprimées en pourcentages.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une erreur courante est que les élèves identifient le nombre de parties grisées, mais indiquent ensuite de manière incorrecte ce nombre comme étant le pourcentage. Par exemple, dans la partie A, les élèves peuvent répondre « 3 » parce que trois des quatre parties sont grisées, confondant ainsi le nombre avec le pourcentage équivalent. De même, dans la partie B, les élèves écrivent souvent « 4 » parce que quatre des huit secteurs sont grisés, négligeant la nécessité de convertir la fraction 4⁄8 en pourcentage. Ces erreurs reflètent un traitement superficiel des données visuelles, où les élèves comptent les segments grisés mais ne parviennent pas à traduire conceptuellement ce nombre en pourcentage. Un autre problème fréquent est que les élèves peuvent ne pas reconnaître la régularité dans la partie B, car l'alternance des secteurs grisés obscurcit l'impression visuelle immédiate de « moitié ». En conséquence, certains peuvent se tromper et estimer que le pourcentage est inférieur à 50 % en raison du motif irrégulier. Ces erreurs indiquent la nécessité de renforcer les compétences permettant de faire le lien entre les représentations concrètes et abstraites, en particulier dans la conversion entre les nombres, les fractions et les pourcentages.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Pour aider les élèves à maîtriser cette compétence, les enseignants peuvent utiliser des supports visuels structurés, tels que des grilles de 100, des diagrammes circulaires ou des barres de fractions, afin de montrer explicitement le rapport entre les fractions et les pourcentages. Encourager les élèves à nommer d'abord la fraction (par exemple, « 3 sur 4 ») avant de la convertir en pourcentage permet de clarifier l'étape intermédiaire. Il est également utile de s'entraîner avec des fractions de référence bien connues (par exemple, 1⁄2, 1⁄4) et leurs pourcentages correspondants. Les enseignants peuvent modéliser ce processus à voix haute : « Il y a 4 parties égales et 3 sont grisées. Cela représente donc trois quarts. Que représentent trois quarts en pourcentage ? » Les activités impliquant la mise en correspondance de modèles visuels, de fractions, de nombres décimaux et de pourcentages peuvent également renforcer liens entre les représentatives. Au fil du temps, les élèves peuvent intérioriser les correspondances et devenir plus confiants dans l'interprétation des tâches visuelles liées aux pourcentages.

Tâche 3.4 : Calculs avec des nombres négatifs

Détermine le nombre manquant.

a) $12 - (-5) = \underline{17}$

b) $11 \times \underline{(-4)} = -44$

Solution

La partie a) peut être résolue en se rappelant de la règle des signes « moins par moins égale plus » (plus précisément : soustraire un nombre négatif donne le même résultat qu'ajouter le nombre positif correspondant). Sur la base de ce principe, le calcul est simple :

$$12 - (-5) = 12 + 5 = 17$$

La partie b) peut être résolue en remarquant d'abord que le résultat -44 du produit est un nombre négatif, tandis que le premier facteur 11 est un nombre positif. Par conséquent, la réponse à b) doit être un nombre négatif. Le nombre positif correspondant complète la multiplication $11 \times \_\_\_\_\_\_ = -44$. Comme ce nombre (positif) est 4, la réponse à b) est-4 .

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche met l'accent sur la capacité des élèves à raisonner sur les effets de l'addition, de la soustraction et de la multiplication impliquant des nombres négatifs. Il leur demande de calculer en tenant compte de l'interprétation correcte des signes (+ et −).

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Comprendre le comportement des nombres négatifs dans les opérations de base est essentiel pour maîtriser l'algèbre. Cette tâche demande aux élèves d'appliquer la règle des signes connue, développant ainsi leur capacité à manipuler mentalement des expressions signées en se basant sur une compréhension structurelle, et pas seulement sur des procédures. Dans le cadre de DiToM, cette tâche favorise le sens des symboles, la flexibilité structurelle et le raisonnement sur les opérations et l'ordre de grandeur, éléments fondamentaux pour résoudre des équations, comprendre le comportement des fonctions et évaluer des expressions littérales.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Dans la partie a), de nombreux élèves soustraient incorrectement 5 de 12, interprétant mal les signes de soustraction. Dans la partie b), certains élèves peuvent insérer un nombre entier positif sans tenir compte de la règle des signes pour la multiplication. D'autres peuvent associer la soustraction uniquement à des résultats « plus petits » et ne pas raisonner de manière structurelle. Ces erreurs indiquent une compréhension fragile des règles d'opération avec les nombres négatifs, en particulier dans les cas impliquant des signes ou des parenthèses imbriqués. Elles montrent également si les élèves sont capables de raisonner à rebours à partir d'un résultat, une compétence essentielle en algèbre.

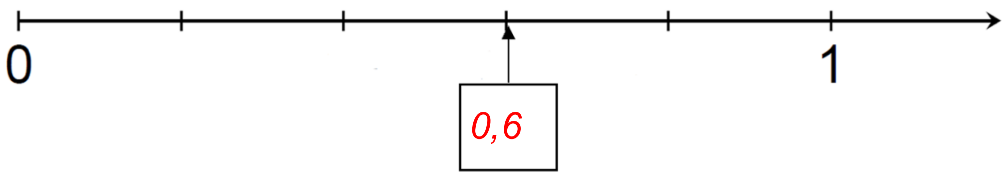
Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les enseignants peuvent fournir des structures de phrases structurées, par exemple « Soustraire un nombre négatif revient à... », et aider les apprenants à verbaliser les opérations. Demander aux élèves de générer des exemples dans lesquels ils varient délibérément les signes et observent le résultat peut les aider à intérioriser les règles. Dans la partie b), plus précisément, l'introduction du triangle de multiplication (facteur × facteur = produit) et le travail à rebours à partir du résultat aident les élèves à déduire logiquement les signes manquants. En fin de compte, la pratique régulière de tâches inversées, c'est-à-dire le travail à partir des résultats vers les données, peut permettre de développer une pensée algébrique plus solide.

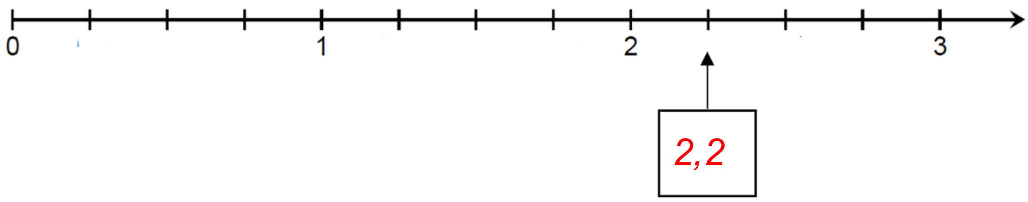
Tâche 3.5 : Identifier des nombres décimaux sur une demi-droite graduée

Sur chaque demi-droite graduée, indique dans le cadre un nombre correspondant à la position de la graduation indiquée par la flèche.

a)



b)

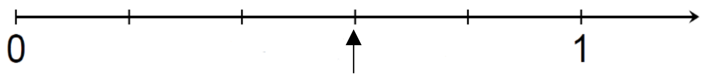


Solution

Deux stratégies possibles :

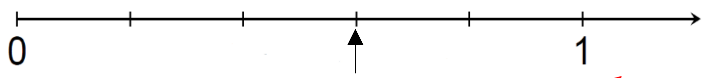
1) Compter le nombre de graduations (ou de sous-intervalles) de 0 à 1 ;
2) Tester des séquences de nombres décimaux (ou fractions) de 0 à 1.

Première solution à a) : la première stratégie peut être mise en œuvre en comptant 5 graduations de 0 à 1.



Nombre de graduations :	1	2	3	4	5
Fraction :	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
Nombre décimal :	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Deuxième solution : la deuxième stratégie consiste à tester 0,1 pour la première graduation à droite de 0. Ce choix de 0,1 donne 0,5 après 5 graduations, qui ne correspond pas à 1 sur la demi-droite graduée. En passant à 0,2, on obtient 1,0, qui correspond à 1 sur la demi-droite graduée.



test :	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
ajuster :	0,2	0,4	$\boxed{0,6}$	0,8	1,0

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à identifier et à écrire des nombres décimaux en fonction de leur position sur une demi-droite graduée. Les deux parties consistent à interpréter les graduations régulièrement espacées entre les nombres entiers et à attribuer le nombre décimal (ou la fraction) correct à la position indiquée.

Cette tâche exige des élèves qu'ils combinent l'interprétation de la demi-droite graduée, la compréhension des décimales et le raisonnement proportionnel.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Les demi-droites graduées offrent une représentation visuelle puissante des nombres rationnels, renforçant à la fois leur valeur et leur positionnement relatif. La capacité à interpréter les positions fractionnaires ou décimales sur une demi-droite graduée est fondamentale pour comprendre l'équivalence, la densité et les opérations avec les nombres rationnels. Selon Treppo & van den Heuvel-Panhuizen (2014), cette tâche favorise le développement du sens mental des nombres, la représentation des nombres rationnels et la capacité à localiser et à raisonner de manière flexible sur les nombres entre les valeurs entières. Ces compétences sont cruciales non seulement en théorie des nombres, mais aussi en interprétation des données et en modélisation algébrique.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Les élèves qui ont des difficultés avec cette tâche ont souvent tendance à produire les erreurs suivantes :

- Ils comptent de façon erronée les graduations, par exemple en confondant la troisième graduation avec 0,3 au lieu de 0,6 dans la partie a), en supposant que chaque graduation équivaut à 0,1 sans vérifier l'intervalle en fonction du nombre de parts attribuées.
- Dans la partie b), les élèves peuvent écrire 2,25 au lieu de 2,2, en estimant approximativement ou en se basant par défaut sur des structures décimales plus familières.
- D'autres peuvent ne pas reconnaître la valeur de l'incrément, en particulier lorsque les segments ne correspondent pas à des dixièmes, et utilisent donc des valeurs d'incrément incorrectes.
- Un manque de précision lors de la lecture des valeurs sur les graphiques est également un signe indiquant que les élèves ne sont pas encore tout à fait à l'aise avec le découpage non standard des demi-droites graduées.

De telles erreurs suggèrent des faiblesses dans le raisonnement proportionnel et la compréhension des nombres décimaux.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves peuvent tirer profit d'un travail avec des demi-droites graduées dessinées ou interactives, où ils inscrivent eux-mêmes les valeurs et justifient leur placement. Les enseignants peuvent faciliter le processus en posant les questions suivantes : « Quelle est la distance entre deux marques ? » et « En combien de parties cet intervalle est-il divisé ? ». L'utilisation d'un code couleur pour chaque intervalle ou de bandes numériques qui soulignent les partitions uniformes peut aider à mieux estimer et compter. Le renforcement des équivalences courantes entre fractions et décimales (par exemple, 1/4 = 0,25, 1/5 = 0,2) aide également les élèves à placer les nombres correctement avec plus d'aisance. Enfin, la pratique fréquente avec des demi-droites graduées agrandies (entre 0 et 1 ou entre 2 et 3) entraîne les élèves à raisonner de manière proportionnelle et à éviter de généraliser à partir d'un raisonnement valide sur les nombres entiers.

VI. Évaluation scientifique

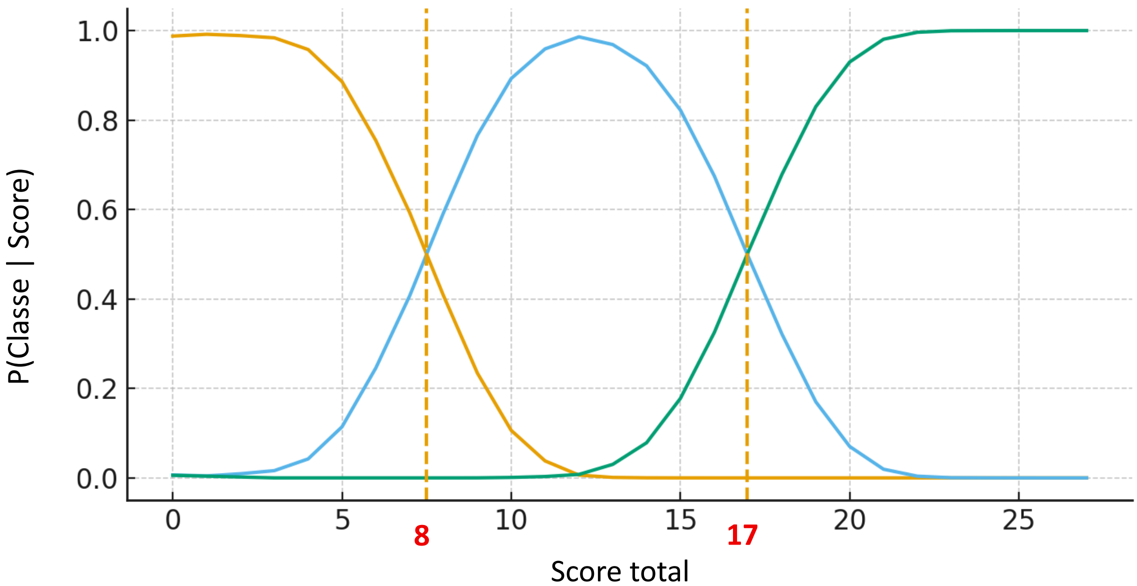
Ce test DiToM début de 3e a été développé sur la base de considérations théoriques et testé dans le cadre d'une étude de validation sur un échantillon non représentatif. Les résultats présentés ci-dessous permettent d'identifier les élèves potentiellement à risque en raison d'un manque de compétences mathématiques clés pour la suite de leur apprentissage des mathématiques. Le test aide les enseignants de fin de 4e / début de la 3e à évaluer de manière empirique les performances des élèves et à identifier ceux dont les résultats sont manifestement insuffisants afin de leur apporter un soutien approprié.

Description de l'échantillon et des résultats principaux

Le test a été expérimenté de juin à juillet 2025 au cours des trois dernières semaines de l'année scolaire 2024/2025 auprès de 1 238 élèves d'écoles en Grèce, en Allemagne, en France, en Espagne, en Italie, en Croatie et en Suède.

Le test comprend les parties suivantes : compétences arithmétiques de base avec 9 items, proportionnalité avec 7 items, calculs techniques avec 8 items. Si un item était résolu correctement, 1 point était attribué ; si la solution était incorrecte, incomplète ou manquante, 0 point était attribué. Le test a été mis en œuvre selon un protocole de passation commun (voir IV. Mise en œuvre du test DiToM). Le test visant à identifier les élèves potentiellement à risque, des effets plafonds importants étaient attendus (c'est-à-dire pas de distribution normale, mais plutôt une distribution asymétrique vers la gauche) et souhaités. Cela a été confirmé par l'expérimentation.

En vue d'une communication des résultats adaptée à la mise en œuvre dans les classes, il n'est pas spécifié une seule valeur seuil, mais deux valeurs seuils. Elles différencient les élèves potentiellement à risque, les élèves pour lesquels il est nécessaire d'avoir une évaluation diagnostique plus fine pour obtenir davantage d'informations et les élèves potentiellement sans risque. La détermination des scores seuil a été basée sur les données issues d'une analyse de classes latentes avec trois classes clairement distinctes. Les classes ne se chevauchent pas et sont monotones. Les probabilités *a posteriori* de l'attribution des classes ont été représentées graphiquement en fonction du score obtenu, lissées et utilisées pour déterminer les seuils critiques en fonction de leurs points d'intersection (voir figure ci-dessous). Les points d'intersection des courbes ont été utilisés (probabilité *a posteriori* p=0,5).



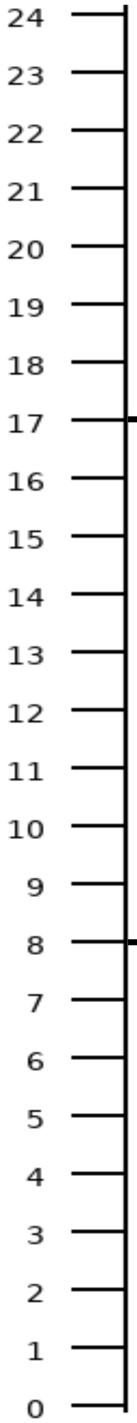
L'analyse des classes montre trois classes, appelées groupes par la suite, clairement distinctes, qui sont interprétées comme suit : G1→ élèves ayant obtenu de faibles résultats au test diagnostique, G2→ élèves ayant obtenu des résultats plutôt faibles au test diagnostique et G3→ élèves ayant obtenu de bons résultats au test diagnostique.

Pour déterminer le score critique, le seuil qui a été retenu est celui à partir duquel il y a 50 % de probabilité d'être dans la classe G1. Ce premier seuil est de 8 points. Les élèves qui ont obtenu un **score de 8 points ou moins** ont besoin d'un soutien pour acquérir les bases afin de pouvoir aborder les contenus traités dans les cours de mathématiques suivants. Le deuxième seuil est de 17 points. Les élèves qui ont obtenu un **score compris entre 9 et 17 points** doivent être davantage observés pendant les cours de mathématiques au cours des prochaines semaines afin de vérifier s'ils comprennent les contenus abordés et s'ils sont capables de les mettre en œuvre de manière autonome.

VII. Fiche d'évaluation du test de début de 3e

L'échelle suivante fournit des indications sur les compétences pour lesquelles les élèves sont le plus susceptibles d'obtenir des points dans les trois fourchettes suivantes : 0-8 points, 9-17 points et 18-24 points.

SCORE



Les élèves de ce groupe disposent de prérequis attendus pour l'apprentissage des mathématiques en début de 3e.

G3 : En plus de G1 et G2, les élèves sont souvent capables de...

... effectuer des calculs avec des nombres négatifs, résoudre des problèmes de division dans des contextes concrets, interpréter et travailler avec des graphiques dans des situations proportionnelles, résoudre des problèmes impliquant une proportionnalité inverse, produire une expression littérale pour traduire des relations données en langage naturel et traduire le périmètre d'un rectangle.

Et les élèves sont rarement capables de...

... appliquer ces compétences de manière flexible dans des tâches de modélisation complexes en plusieurs étapes dans des contextes inconnus.

Les élèves de ce groupe nécessitent un suivi plus soutenu au cours des prochaines semaines afin de vérifier s'ils sont capables de comprendre et de mettre en œuvre de manière autonome les contenus suivants.

G2 : En plus de G1, les élèves sont souvent capables de...

... évaluer une expression littérale avec substitution de variable, convertir une fraction en pourcentage, traduire un programme de calcul par une expression littérale dans le cas où les parenthèses sont nécessaires, tester une égalité, distinguer les relations simples directement proportionnelles et non proportionnelles et identifier des nombres rationnels sur une demi-droite graduée.

Et les élèves sont rarement capables de...

... effectuer des calculs impliquant des nombres négatifs, résoudre des problèmes de division dans des contextes concrets, ou produire des expressions littérales plus complexes pour traduire des relations données en langage naturel.

Les élèves de ce groupe présentent un risque en termes de prérequis pour l'apprentissage des mathématiques et devraient bénéficier d'un soutien particulier dès que possible.

G1 : Les élèves sont souvent capables de...

... lire des informations à partir d'un réseau de coordonnées, identifier des relations simples directement proportionnelles, interpréter des représentations circulaires et les convertir en pourcentages, résoudre des problèmes simples de raisonnement proportionnel dans un contexte concret, identifier des nombres rationnels simples sur une demi-droite graduée et calculer une augmentation simple donnée en pourcentage.

Et les élèves sont rarement capables de...

... évaluer des expressions littérales en substituant des valeurs aux variables, convertir des fractions en pourcentages dans des situations plus complexes ou traduire des programmes de calcul par des expressions littérales.

Références :

Brings, L., & Kleine, M. (2025). *Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM) : Développement et évaluation d'un instrument de dépistage pour l'identification précoce des élèves à risque dans l'enseignement des mathématiques au premier cycle du secondaire*. Dans les actes de la conférence EDULEARN25. Palma, Espagne.

Greer, B. (1992). La multiplication et la division comme modèles de situations. Dans D. A. Grouws (Ed.), *Manuel de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* (pp. 276-295). New York : Macmillan.

Lamon, S. J. (2007). Nombres rationnels et raisonnement proportionnel. Dans F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, Caroline du Nord : Information Age Publishing.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Arithmetik : Grundschule* (8e éd.). Heidelberg : Springer.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fraction development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Vlassis, J. (2004). Comprendre le signe moins ou devenir flexible dans la « négativité ». *Apprentissage et instruction, 14*(5), 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012