Manuel de l'enseignant
Test diagnostique de début de 5^e

Ce projet a été financé avec le soutien de la Commission européenne. Cette publication n'engage que son auteur et la Commission ne peut être tenue responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qui y sont contenues.

Sommaire

I. Introduction

L'apprentissage des mathématiques est cumulatif : les nouveaux contenus s'appuient sur des connaissances préalables solides. Si les idées et concepts fondamentaux font défaut, il devient de plus en plus difficile pour les élèves de construire une compréhension significative des contenus suivants. Les résultats d'études internationales et nationales montrent qu'une part importante des élèves n'atteignent pas le niveau minimum requis en mathématiques. Pour l'enseignement quotidien, cela signifie qu'il est nécessaire de donner les moyens aux enseignants de détecter suffisamment tôt le niveau d'apprentissage et d'organiser le soutien nécessaire dans une temporalité adaptée. C'est là qu'intervient le projet européen « Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM) ». Dans le cadre d'un partenariat entre l'Italie, la France, la Suède, la Croatie, la Grèce, l'Espagne et l'Allemagne, cinq instruments de diagnostic interdépendants ont été développés afin de fournir aux enseignants une vue d'ensemble concise de leur classe lors des moments de transition scolaire. Les diagnostics suivent un rythme bisannuel :

1. Transition de la GS (grade 0) maternelle au CP (grade 1)
2. Fin de CE1 (grade 2) / début de CE2 (grade 3)
3. Fin du CM1 (grade 4) / début du CM2 (grade 5)
4. Fin de la 6^{e} (grade 6) / début de la 5^{e} (grade 7)
5. Fin de la 4^{e} (grade 8) / début de la 3^{e} (grade 9)

Qu'est-ce qu'un diagnostic ?
Un diagnostic est une évaluation courte, réalisée en groupe, qui peut être administrée à toute la classe en une seule séance. Il fournit à l'enseignant un premier aperçu structuré des notions fondamentales déjà bien acquises et des domaines dans lesquels certains élèves pourraient avoir besoin d'un soutien supplémentaire. Plus important encore, un diagnostic ne remplace pas une évaluation qualitative individuelle, axée sur le processus, de l'état actuel des connaissances et compétences mathématiques d'un élève. Il sert de point de départ : les résultats peuvent être suivis d'observations ciblées, d'entretiens et de propositions de soutien.

En quoi cela est-il utile ?

- Fournir un aperçu rapide : quelles sont les compétences fondamentales déjà acquises et de celles qui nécessitent des révisions ou d'être approfondies ?
- Permettre un soutien guidé : identifier les élèves qui pourraient avoir des difficultés à atteindre les attentes minimales de base en mathématiques ; organiser un soutien précoce.
- Prendre des décisions diagnostiques : les résultats du dépistage fournissent une première orientation claire indiquant quels élèves pourraient bénéficier d'évaluations diagnostiques supplémentaires (par exemple, des analyses plus approfondies des tâches ou des entretiens de suivi).
- Soutenir les transitions : concentrer son attention sur les compétences clés lors des transitions scolaires cruciales.

Les tâches sont axées sur la classe, leur administration est clairement décrite et la notation est rapide. Les enseignants obtiennent un résumé concis au niveau de la classe ainsi que des indications sur les élèves qui méritent une attention particulière sur certains domaines mathématiques. Sur cette base, les enseignants peuvent planifier de courtes périodes de révision, des exercices différenciés ou des tâches pour faciliter les transitions entre niveaux scolaires.

Ce manuel fournit un guide concis sur l'objectif et l'utilisation du diagnostic, explique la conception du test, les types de tâches et les objectifs d'évaluation visés, donne des instructions claires pour l'administration en classe, décrit la notation et l'interprétation des résultats et propose des idées pratiques pour l'enseignement ultérieur et le soutien ciblé.
L'objectif est de disposer d'un outil de diagnostic pratique, fiable et facile à utiliser qui permette aux enseignants de s'orienter rapidement, d'attirer rapidement l'attention sur les difficultés potentielles et de soutenir concrètement une aide efficace afin que le plus grand nombre possible d'élèves apprennent les mathématiques de manière sûre, avec compréhension et confiance.

II. Que signifie « compétences mathématiques clés » ?

L'élaboration d'un test diagnostique nécessite une base théorique. Pour les tests de diagnostic courts destinés à toute la classe, cela signifie qu'il faut se concentrer sur les compétences sans lesquelles le contenu ultérieur ne peut être appris de manière significative. Selon la position classique de Gagné & Briggs, chaque nouvelle exigence d'apprentissage repose sur un minimum de prérequis nécessaires, ce que désigne le terme « compétences mathématiques clés ». Si celles-ci ne sont pas acquises, l'acquisition réussie de nouveaux contenus est peu probable et les tâches appropriées à travailler s'appuient donc sur ce qui est déjà en place. En mathématiques, l'apprentissage est donc hiérarchique et cumulatif.

Compréhension conceptuelle : compétences, concepts, aptitudes et compétences clés

Dans le cadre du projet, nous faisons la distinction entre les compétences et les aptitudes, qui sont interdépendantes dans la pratique en classe. Les compétences font référence à une bonne disposition à agir de manière appropriée dans des situations mathématiques. L'acquisition de concepts permet une compréhension approfondie des relations mathématiques. L'activation pertinente des compétences se traduit par une aptitude, qui se manifeste par la performance pratique des élèves. Les compétences clés sont celles dont l'absence entrave ou empêche considérablement la poursuite de l'apprentissage. Elles constituent des prérequis indispensables pour l'acquisition de contenus ultérieurs. Les évaluations se concentrent sur l'arithmétique et l'algèbre, en raison de leur structure hiérarchique et de leur importance pour d'autres domaines des mathématiques (par exemple, la géométrie), qui sont compatibles tant au niveau national qu'international.

Les exemples suivants illustrent deux exemples afin de clarifier la compréhension des compétences clés.

Niveau primaire : effectuer des additions de manière structurée
La tâche 25 + 7 nécessite plus qu'un simple comptage par étapes. Un sens solide des opérations se manifeste lorsque les élèves reconnaissent les relations partie-partie-tout (par exemple, 25 et 7 comme parties d'un tout), décomposent les nombres de manière flexible (par exemple, 7 = 5 + 2) et s'appuient sur la dizaine suivante (par exemple, 25 + 5 = 30 ; puis 30 +2 = 32). Ici, les concepts (valeur de position, égalité), les compétences (calcul flexible, procédure justifiée) et l'aptitude qui en résulte (addition structurée) fonctionnent ensemble. Si cette compétence clé fait défaut, le « niveau » suivant, à savoir des plages de nombres plus grandes ou des stratégies plus efficaces, reste difficile à atteindre.

Premier cycle du secondaire : gestion de l'extension des domaines numériques
Une bonne maîtrise des opérations avec les nombres naturels (décomposition, opérations inverses, valeur de position et référence à la droite numérique) est une condition préalable au transfert des procédures aux décimaux et aux fractions (par exemple, addition/soustraction, arrondi, estimation) afin de surmonter les obstacles épistémologiques liés à l'apprentissage des concepts mathématiques (Brousseau, 1997). Les difficultés dans ces compétences clés conduisent souvent à un travail procédural sans compréhension, ce qui entrave l'accès aux expressions littérales, aux équations et aux relations fonctionnelles. Cela illustre le caractère prédictif des compétences clés en arithmétique pour les besoins algébriques.

La compétence clé « compréhension » est intégrée dans les tests afin de

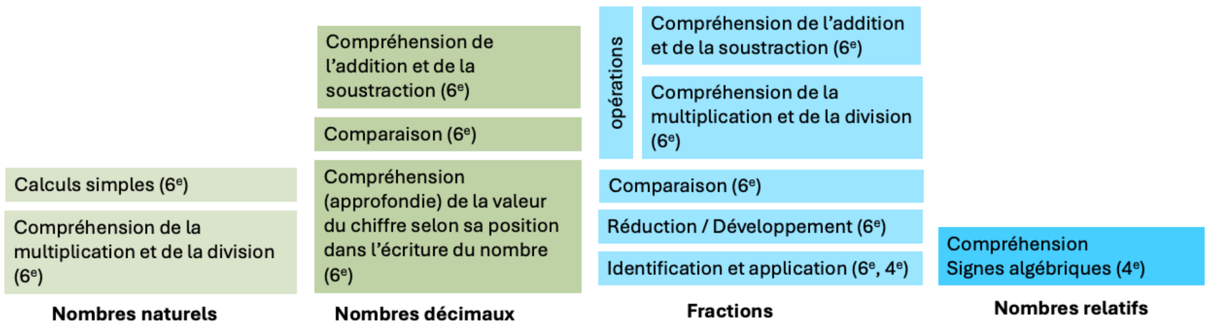
- représenter les prérequis nécessaires à l'étape d'apprentissage suivante,
- être proches du contenu et donc être observables à l'aide de tâches courtes,
- offrir aux enseignants une première orientation structurée quant aux élèves qui pourraient nécessiter des évaluations diagnostiques supplémentaires et dans des domaines dans lesquels un soutien peut être ciblé. L'objectif n'est pas d'attribuer des étiquettes, mais de révéler rapidement les prérequis essentiels, afin que l'apprentissage ultérieur puisse se dérouler sur une base stable.

Selon nous, chaque domaine de contenu comprend des compétences clés qui peuvent devenir essentielles à différents moments d'un processus d'apprentissage, y compris à la fin d'une unité, lorsqu'une capacité est nécessaire pour permettre l'apprentissage ultérieur. Le développement des compétences clés est donc continu tout au long des années scolaires ; il reste essentiel d'identifier rapidement les prérequis manquants afin que les apprenants puissent continuer à acquérir de nouveaux contenus en les comprenant.

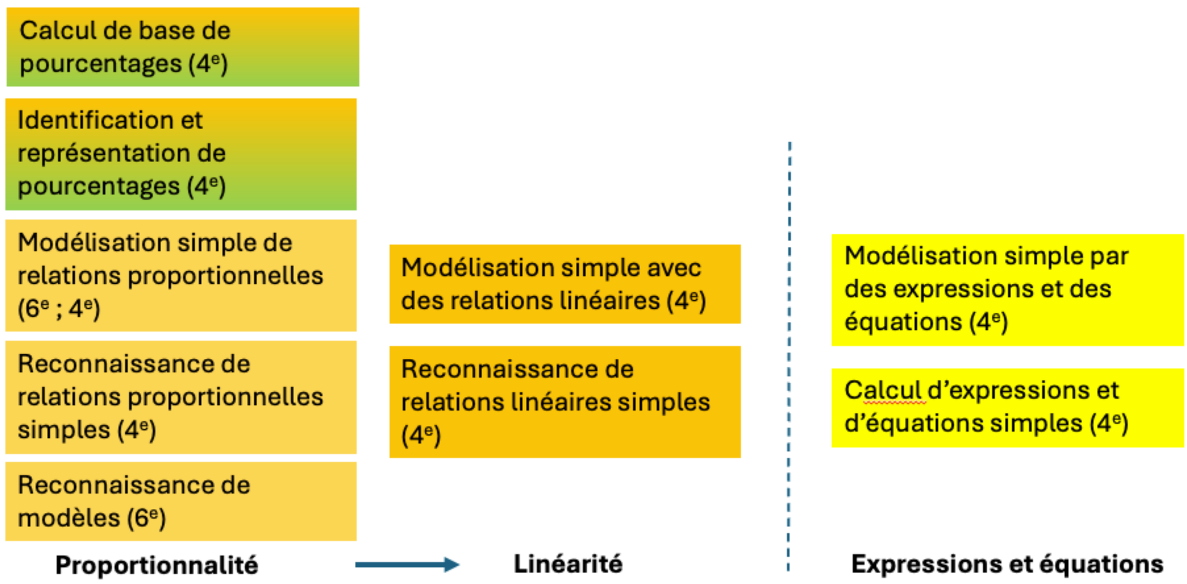
III. Structure des tests de début de 5^e et de début de 3^e

La structure des tests DiToM est basée sur les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre et prend en compte leur structure hiérarchique. La construction du test s'est concentrée sur le domaine du développement des nombres et de leur extension en lien avec un calcul technique. Et, ce dans la mesure où les procédures de calcul sont effectuées de manière non algorithmique ou algorithmique sur la base d'une compréhension profonde des nombres et des opérations. Le diagramme montre la structure du test dans ce domaine de contenu pour les niveaux début de 5e et de 3^e.

Le test de début de 5^e repose sur des éléments constitutifs de celui de début de CM2 qui se concentrent sur les nombres naturels, et dans lequel ce domaine est davantage différencié. Si les élèves ont des difficultés importantes dans le domaine des nombres naturels en début de 5^e, il est recommandé d'utiliser le test de début de CM2.



Dans le domaine de l'algèbre ou de la pré-algèbre, la compréhension structurelle des structures mathématiques simples dans les applications mathématiques internes et externes est évaluée sous l'angle de la proportionnalité et de la linéarité. Il en va de même pour le domaine du calcul littéral avec des expressions algébriques et des équations qui interviennent dans des situations d'application de base.de base.



IV. Mise en œuvre des tests DiToM

- **Expliquer l'objectif du test aux élèves et les rassurer**

  - Le test n'est pas noté.
  - Il leur permet de faire le point sur ce qu'ils savent et ce qu'ils ne savent pas, afin de pouvoir ensuite leur proposer des exercices adaptés. Il est donc particulièrement important qu'ils travaillent seuls.
  - Insister sur l'importance de répondre aux exercices. Plus ils répondront aux questions, plus il sera facile d'identifier leurs connaissances, leurs compétences et leurs difficultés, et de les aider à les surmonter.

- **Structure du test**

  - Le test est divisé en trois parties, chacune composée de plusieurs exercices.
  - Tous les exercices sont indépendants les uns des autres.

- **Durée :** une durée maximale indicative est estimée pour chaque partie.

  - Test de début de 5^{e}, durée maximale de 45 minutes : 15 minutes pour la pré-algèbre, 10 minutes pour la proportionnalité, 20 minutes pour l'arithmétique.
  - Il est important d'indiquer la durée de chaque partie aux élèves avant le début du test et de préciser que l'enseignant interrompra les élèves qui n'auront pas terminé, par souci d'équité entre les élèves.

- **Format des exercices**

  - Exercices ouverts : il y a de la place pour répondre (soit par des phrases, soit par un nombre).
  - Exercices fermés (questions à choix multiples) : plusieurs réponses sont proposées et l'élève doit répondre en choisissant une ou plusieurs réponses.

- **Comment répondre ?**

  - Les calculatrices ne sont pas autorisées.
  - Les élèves peuvent utiliser toute partie de la page laissée en blanc comme brouillon, en particulier pour noter leurs calculs.
  - Les élèves qui ont terminé une partie du test doivent attendre que l'enseignant leur donne des instructions pour passer à la partie suivante.

- **Solliciter les élèves pendant le test**

  - Si l'enseignant est sollicité, il ne donne aucune indication qui pourrait orienter la réponse aux questions. L'objectif est d'identifier les difficultés des élèves.

V. Présentation des tâches

Tâche 1.1 : Multiplication et division

Complète par les nombres manquants.

a) $3 \times \underline{42} = 126$

c) $54 \div \underline{9} = 6$

b) $172 = 4 \times \underline{43}$

d) $\underline{81} \div 3 = 27$

Solution

a) Première solution : le nombre manquant peut être interprété comme 126 divisé par 3. Le calcul du quotient 126/3 donne la réponse 42.
Deuxième solution : notez que $120 = 3 \times 40$ et $126 = 120 + 6$. Il reste $6 = 3 \times 2$. Le résultat 126 est obtenu en indiquant $40 + 2 = 42$.

b) Première solution : le nombre manquant peut être interprété comme le résultat de la division de 172 par 4. Le calcul du quotient 172/4 donne la réponse 43.
Deuxième solution : notez que $160 = 4 \times 40$ et $172 = 160 + 12$. Il reste $12 = 4 \times 3$. Le résultat 172 est obtenu en indiquant $40 + 3 = 43$.

c) Le nombre manquant peut être interprété soit comme le résultat de 54 divisé par 6, soit comme le nombre complétant l'égalité $6 \times \_\_ = 54$. En se rappelant certaines propriétés des nombres, on obtient la réponse 9.

d) Première solution : le nombre manquant est 3 fois plus grand que 27, c'est-à-dire $3 \times 27 = 81$.
Deuxième solution : en testant 90, on obtient le quotient 30, qui est supérieur de 3 à 27. Le quotient 3 est obtenu en saisissant 9. La réponse 27 est obtenue en indiquant $90 - 9 = 81$.

Compétence clé testée dans cet exercice

Cet exercice vise à évaluer la compréhension des élèves de la relation structurelle entre la multiplication et la division. Dans les quatre sous-rubriques, les élèves doivent trouver un nombre manquant dans un exercice impliquant soit une multiplication, soit une division, par exemple en complétant « 3 × ___ = 126 » ou « 172 = 4 × ___ ». Pour résoudre correctement ces éléments, les élèves doivent identifier le rôle des nombres connus et inconnus et passer avec flexibilité d'une opération à l'autre. Ils doivent interpréter les égalités à trous non seulement comme des invites à calculer, mais aussi comme des expressions d'une relation partie-tout dans laquelle une quantité résulte de la multiplication ou de la division de deux autres, et reconnaître le signe égal comme une relation d'équivalence. Cette souplesse opérationnelle est la marque d'une compréhension approfondie de l'arithmétique et est essentielle pour accéder à des contenus mathématiques plus avancés.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Reconnaître et maîtriser la relation inverse entre la multiplication et la division est une compétence clé pour l'apprentissage ultérieur des mathématiques. Cette compréhension constitue la base du raisonnement avec les ratios, les proportions, les expressions algébriques et les relations fonctionnelles. Selon le cadre DiToM, ces compétences sont classées comme des compétences mathématiques clés, car leur absence peut entraver, voire bloquer, les progrès futurs dans l'apprentissage. Les élèves qui sont capables d'interpréter une égalité à trous de manière structurelle, en comprenant par exemple que « 3 × ___ = 126 » implique « 126 : 3 », font preuve de bien plus qu'une simple mémorisation de procédures : ils s'engagent dans un raisonnement mathématique. Développer cette capacité dès le plus jeune âge permet aux élèves d'être mieux armés pour gérer les représentations symboliques et la résolution de problèmes en plusieurs étapes dans les mathématiques du secondaire.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

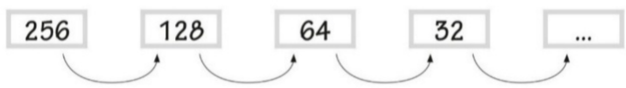
Les élèves qui n'ont pas encore intériorisé la relation entre la multiplication et la division font souvent preuve de conceptions erronées. Une erreur courante consiste à interpréter toutes les égalités à trous comme nécessitant une multiplication directe, même lorsque l'opération inverse est nécessaire. Par exemple, lorsqu'ils rencontrent « 172 = 4 ×___ », les élèves peuvent calculer par erreur « 172 × 4 » au lieu de diviser. D'autres peuvent deviner en se basant sur la mémorisation par cœur, sans tenir compte de la structure de l'égalité. Dans certains cas, les élèves tentent des méthodes écrites complexes (telles que la division longue, par exemple 126 = 120 + 6 = 3 x 40 + 3 x 2 soit 126 : 3 = 40 + 2 = 42) alors qu'une compréhension stratégique des relations entre les nombres serait plus appropriée. Ces comportements peuvent indiquer encore un manque de conscience structurelle, ainsi qu'une maîtrise conceptuelle limitée. Une mauvaise compréhension de la fonction du signe égal, considéré comme une indication pour calculer plutôt que comme un symbole d'équivalence, peut également conduire à des réponses incorrectes.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Il est important de relier explicitement les faits numériques connexes (par exemple, « 6 ×4 = 24 », « 24 : 4 = 6 » et « 24 : 6 = 4 ») afin de mettre en évidence la réversibilité des opérations. Encourager les élèves à verbaliser leur raisonnement, par exemple en leur demandant « Quel est le nombre qui, multiplié par 4, donne 172 ? », favorise l'internalisation. Enfin, il convient de s'entraîner à varier la position de l'inconnue (au début, au milieu ou à la fin de l'égalité à trous) afin d'approfondir la compréhension flexible de la structure des égalités. Pour aider les élèves qui ont des difficultés avec ce concept, il est utile de travailler avec des représentations visuelles telles que des tableaux, des modèles à barres ou des diagrammes de regroupement qui rendent visibles les structures multiplicatives (Polotskaia & Savard, 2021). Ces modèles permettent aux élèves de voir comment une quantité peut être composée de parties égales ou décomposée en celles-ci, reflétant respectivement la multiplication et la division.

Tâche 1.2 : Suites de nombres et identification des règles

Indique la règle qui peut être utilisée pour continuer cette suite de nombres ?



- [ ] Soustraire 32
- [ ] Soustraire 128
- [ ] Diviser par 4
- [x] Diviser par 2

Solution

Les élèves peuvent commencer par vérifier quelles options sont susceptibles d'être correctes en testant les opérations proposées avec l'un des trois premiers nombres. Par exemple, avec 256 :

$256 - 32 = 224$ (n'est pas égal à 128, donc cette option ne peut pas être correcte)

$256 - 128 = 128$ (correspond à la séquence)

$\frac{256}{4} = 64$ (n'est pas égal à 128, donc cette option ne peut pas être correcte)

$\frac{256}{2} = 128$ (correspond à la séquence)

Tester les deuxième et quatrième options (correctes jusqu'à présent) avec 128 :

$128 - 128 = 0$ et $\frac{128}{2} = 64$. Seul le dernier calcul correspond à la séquence. La seule option restante (division par 2) est confirmée avec le troisième nombre 64, en calculant. $\frac{64}{2} = 32$

Les élèves peuvent également commencer par soustraire et diviser des paires de nombres adjacents :

$$256 - 128 = 128\,, \qquad 128 - 64 = 64\,, \qquad 64 - 32 = 32$$

$$\frac{256}{128} = 2\,, \qquad \frac{128}{64} = 2\,, \qquad \frac{64}{32} = 2$$

Compétence clé évaluée par cet exercice

Cette tâche évalue la capacité des élèves à identifier et à décrire la règle sous-jacente d'une séquence numérique. L'exemple spécifique (256, 128, 64, 32, ...) nécessite de reconnaître une progression géométrique dans laquelle chaque nombre est le résultat de la division du nombre précédent par deux. La tâche présente plusieurs choix possibles, invitant les élèves à décider quelle règle (par exemple, « soustraire 32 » ou « diviser par 2 ») explique correctement la séquence. Ainsi, la compétence fondamentale évaluée est la capacité des élèves à reconnaître les structures multiplicatives. Cela implique plus que des connaissances procédurales : cela nécessite la reconnaissance de séquences, un raisonnement structurel et une réflexion algébrique précoce.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La capacité à reconnaître les régularités dans les séquences numériques est une compétence mathématique clé, car elle constitue la base de concepts plus avancés tels que les fonctions, l'algèbre et le raisonnement proportionnel. Les élèves qui sont capables de discerner les règles dans les séquences sont mieux armés pour s'engager dans des généralisations et des représentations symboliques par la suite. D'après des recherches en enseignement des mathématiques (par exemple, Kieran, 2018, Radford 2013), la reconnaissance des séquences favorise le développement d'une compréhension relationnelle des nombres et des opérations. Dans le cadre de DiToM, l'identification de la structure numérique est considérée comme essentielle pour naviguer dans l'abstraction croissante des mathématiques du secondaire. De plus, la compréhension des séquences géométriques, telles que la division par deux, jette également les bases importantes pour interpréter les relations exponentielles, un concept rencontré dans les classes supérieures.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une erreur fréquente dans cette tâche consiste à interpréter la séquence comme additive plutôt que multiplicative. Les élèves peuvent supposer que les nombres diminuent d'une quantité fixe et choisir « soustraire 32 » parce que la différence entre 64 et 32 correspond à ce modèle, même si cela ne s'applique pas de manière cohérente aux étapes précédentes. De telles erreurs révèlent un biais linéaire, qui est courant lorsque les élèves ne sont pas familiarisés avec les changements géométriques. D'autres élèves peuvent deviner sans vérifier le modèle sur plusieurs termes, démontrant ainsi un raisonnement non systématique. De plus, si les élèves ne considèrent pas encore la division comme l'inverse de la multiplication, ils peuvent ne pas reconnaître « diviser par 2 » comme une structure récurrente. Ces types d'erreurs suggèrent une conception fragile ou sous-développée de la structure opérationnelle et de la séquence.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves qui ont du mal à reconnaître les schémas numériques tirent profit des tâches structurées qui opposent explicitement les relations additives et multiplicatives. L'utilisation d'aides visuelles telles que des chaînes de nombres ou des diagrammes en arbre peut aider les élèves à identifier comment les valeurs changent d'une étape à l'autre. Les activités qui demandent aux élèves de générer leurs propres séquences à partir de règles données (par exemple, « Créez une séquence où chaque nombre est la moitié du précédent ») peuvent développer la conscience des schémas et approfondir la compréhension opérationnelle. Les enseignants doivent encourager les élèves à raisonner à voix haute, par exemple en leur demandant « Comment le nombre est-il passé de 256 à 128 ? », afin de favoriser la métacognition et de rendre les stratégies visibles. Au fil du temps, le fait de relier ces séquences à des contextes réels (par exemple, plier du papier, doubler le nombre de bactéries) peut renforcer le concept de progression géométrique et rendre les séquences abstraites plus tangibles.

Tâche 1.3 : Ordre des opérations (règles de priorité)

Calcule :

$$14 + 2 \times 3 = \underline{\ 20\ }$$

Solution

On note que la multiplication est prioritaire sur l'addition.
Calculez d'abord le produit $2 \times 3 = 6$, puis ajoutez$14 + 6 = 20$. En un seul calcul :

$$14 + 2 \times 3 = 14 + 6 = 20$$

Compétence clé évaluée par cet exercice

Cette tâche teste la compréhension des élèves de l'ordre conventionnel des opérations, en particulier la priorité de la multiplication sur l'addition. Les élèves doivent interpréter et évaluer correctement l'expression « 14 + 2 × 3 », en appliquant la règle selon laquelle la multiplication est effectuée avant l'addition. Cela nécessite non seulement une maîtrise des procédures, mais aussi une connaissance de la structure hiérarchique des opérations arithmétiques. L'exercice va donc au-delà des connaissances factuelles et évalue la capacité des élèves à analyser correctement la structure des expressions numériques, une étape cruciale vers la maîtrise de l'algèbre.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

La compréhension de l'ordre des opérations est une condition préalable fondamentale pour travailler avec des expressions arithmétiques plus complexes et, plus tard, avec des expressions littérales et des équations. Dans le cadre de DiToM, la capacité à traiter des expressions à plusieurs termes selon les conventions mathématiques est considérée comme une compétence clé, car elle sous-tend le raisonnement symbolique et la capacité générale à résoudre des problèmes. Les élèves qui intègrent ces règles peuvent interpréter les expressions de manière fiable, manipuler les termes en toute confiance et éviter les pièges courants dans les calculs. Cette compétence est non seulement essentielle dans le contexte des opérations numériques, mais elle est également directement transposable au travail sur les expressions littérales et les formules, à la résolution d'équations et à l'analyse de fonctions dans les classes supérieures.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s’attendre avec cette tâche ?

Une erreur typique dans cette tâche consiste à évaluer l'expression de gauche à droite sans respecter la hiérarchie des opérations, c'est-à-dire en additionnant d'abord 14 et 2 pour obtenir 16, puis en multipliant par 3 pour obtenir 48. Cette erreur révèle un biais de calcul linéaire et un manque de compréhension conceptuelle de la priorité des opérations. Un autre signe avant-coureur est l'hésitation ou le recours excessif à des stratégies de raisonnement informelles (« fais d'abord ce qui est écrit »), ce qui suggère que les élèves appliquent peut-être l'ordre de lecture quotidien plutôt que la structure mathématique. Certains élèves peuvent également tenter d'insérer des parenthèses de manière inappropriée, ce qui montre leur incertitude quant à l'organisation des expressions. Même si les élèves parviennent à la bonne réponse, le recours à des « essais et erreurs » ou à des conjectures plutôt qu'à un raisonnement structuré peut être le signe de difficultés conceptuelles.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Un soutien ciblé devrait commencer par rendre visible la structure des expressions, par exemple en utilisant un code couleur, des parenthèses ou des modèles visuels qui montrent le regroupement. Les enseignants peuvent modéliser l'évaluation des expressions étape par étape et encourager les élèves à verbaliser leur raisonnement : « D'abord, je fais 2 fois 3, car la multiplication a priorité sur l'addition. Ensuite, j'ajoute 14. » De même, des représentations iconiques des deux méthodes de calcul peuvent aider à distinguer et à comprendre les priorités de calcul. La pratique avec diverses expressions, y compris celles avec et sans parenthèses, peut aider à clarifier quand et pourquoi l'ordre est important. Les élèves tirent également profit de l'exploration de stratégies incorrectes et de la discussion sur les raisons pour lesquelles elles conduisent à des résultats erronés. Au fil du temps, une exposition régulière et une réflexion structurée aident à intérioriser les règles et à renforcer la confiance des élèves dans la gestion des calculs en plusieurs étapes.

Tâche 1.4 : Traduire un texte écrit en expressions mathématiques

Tom suit les instructions :

Ajouter le nombre 4 au nombre 5,
puis multiplier le résultat par 8.

Quel calcul Tom doit-il effectuer pour obtenir le résultat ?

- ☐ $5 + 4 \times 8$
- ☑ $(5 + 4) \times 8$
- ☐ $5 + (4 \times 8)$
- ☐ $5 \times 8 + 4$

Solution

Le résultat de la première instruction *Le nombre 4 est ajouté à 5* peut être exprimé comme suit : $5 + 4$.

La deuxième instruction *« Le résultat est multiplié par 8 »* exige que l'expression entière «$5 + 4$ » soit multipliée par 8. Il ne suffit pas d'écrire «$5 + 4 \times 8$ », car cette expression ne multiplie que 4 par 8. Les parenthèses autour de «$5 + 4$ » garantissent que les deux termes sont multipliés par 8. La réponse est «$(5 + 4) \times 8$ ».

Comme l'addition et la multiplication sont des opérations commutatives, les réponses suivantes sont également correctes :

$$(4 + 5) \times 8, \quad 8 \times (5 + 4), \quad 8 \times (4 + 5)$$

Si l'élève donne l'une de ces réponses, il doit identifier la deuxième option$(5 + 4) \times 8$ comme une réponse équivalente.

Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à interpréter une courte séquence verbale décrivant deux opérations consécutives — d'abord une addition, puis une multiplication — et à traduire cette séquence en une expression symbolique. Les élèves ne sont pas censés calculer le résultat, mais identifier la représentation mathématique correcte des instructions, car les instructions verbales et l'expression numérique correspondante ne sont pas sémantiquement congruentes (Vergnaud, 1983). Cela nécessite de reconnaître l'ordre des opérations intégré dans le langage et de construire un terme en conséquence (par exemple, $(4 + 5) \times 8$). La compétence fondamentale évaluée est la traduction du langage naturel en notation formelle, y compris l'utilisation de parenthèses pour préserver la structure de calcul correcte et les priorités opérationnelles.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La capacité à représenter symboliquement des informations verbales ou contextuelles est essentielle à la maîtrise des mathématiques. Dans le cadre de DiToM, cette compétence est considérée comme essentielle car elle permet aux élèves de passer d'un mode de représentation à l'autre (verbal, symbolique, iconique et opérationnel) et de traiter le sens structurel (Kieran & Martìnez-Hernàndez, 2022) des expressions numériques. Cette compétence de traduction est essentielle non seulement en arithmétique, mais aussi en algèbre, où les élèves sont régulièrement confrontés à des situations qui nécessitent de construire ou d'interpréter des expressions à partir de problèmes écrits, de diagrammes ou de scénarios quotidiens. La maîtrise précoce de cette compétence favorise le développement de la pensée fonctionnelle, la flexibilité dans la résolution de problèmes et la maîtrise des modèles mathématiques.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre dans cette tâche ?

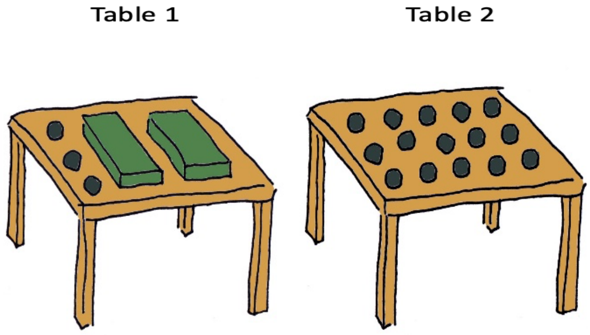
Une erreur courante dans cette tâche consiste à construire l'expression dans le mauvais ordre, par exemple en interprétant « 4 est ajouté à 5 » comme « $4 + 5$ » (ce qui est mathématiquement correct), mais en appliquant ensuite la multiplication de manière incorrecte : soit « $4 + (5 \times 8)$ », soit « $4 \times 5 + 8$ ». Cela reflète la difficulté à identifier la séquence d'opérations intégrée dans le langage. Certains élèves peuvent ignorer la nécessité des parenthèses et écrire « $4 + 5 \times 8$ », ce qui conduit à un ordre incorrect des opérations si l'on effectue le calcul. D'autres peuvent se concentrer uniquement sur l'opération finale et écrire « $9 \times 8 = 72$ » comme réponse, en contournant la tâche réelle de traduction symbolique. Ces schémas suggèrent difficultés dans la compréhension des procédures et des difficultés à coordonner le langage avec la structure mathématique.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Pour aider les élèves dans ce domaine, il est important de les encourager à développer une compréhension globale de la séquence des calculs afin de prendre en compte la structure du calcul et l'ordre des opérations. Les enseignants peuvent montrer comment « construire un terme » à partir d'une phrase prononcée et utiliser des organisateurs visuels (tels que des arbres d'opérations ou des organigrammes) pour aider les élèves à séquencer correctement les opérations. Mettre l'accent sur le rôle des parenthèses dans le regroupement des opérations peut éviter les interprétations erronées. Les routines de classe qui impliquent une « traduction » entre le langage et les symboles peuvent également renforcer la flexibilité représentationnelle des élèves. Au fil du temps, encourager les élèves à dire ce que signifie l'expression (par exemple, « d'abord j'additionne, puis je multiplie ») aide à consolider leur compréhension de la structure symbolique.

Tâche 1.5 : Équivalence des quantités

L'image montre des billes et des boîtes,
placées sur deux tables.



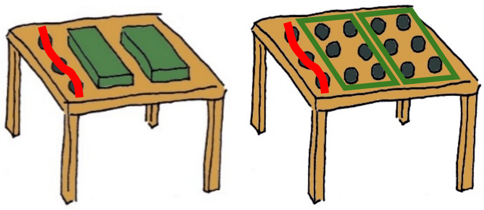
Chaque boîte contient le même nombre de billes.
Il y a le même nombre de billes sur chaque table.
Combien de billes y a-t-il dans chaque boîte ?

Réponse : 6

Solution

Cette tâche peut être résolue à l'aide de méthodes formelles ou informelles.

Une solution consiste à retirer d'abord trois billes de chaque table et à regrouper les 12 billes restantes sur la table 2 en deux groupes contenant chacun le même nombre de billes (ici, 6 billes).



Ce raisonnement peut être étayé par des calculs $15 - 3 = 12$ et $12 : 2 = 6$.

On note que le processus de retrait et de regroupement peut être effectué soit sur l'image, soit mentalement, soit par calcul.

Une deuxième solution peut consister à tester différentes valeurs jusqu'à ce qu'il y ait le même nombre de billes sur les deux tables. Ce test peut être effectué mentalement, mais peut également être résumé à l'aide d'un tableau :

Nombre de billes dans une boîte	3	4	5	6
Total dans le tableau 1	9	11	13	15
Total du tableau 2	15	15	15	15

Une troisième solution peut être basée sur l'introduction d'une égalité à trous $2 \times ?\ +3 = 15$ et par réversion des opérations $2 \times ? = 15 - 3$ puis le nombre recherché de billes de chaque boîte est 12 : 2 soit 6. Une solution plus formelle consiste à nommer une inconnue x comme nombre de billes dans une boîte et à représenter symboliquement le problème par l'équation $2x + 3 = 15$ qui peut être résolue en substituant x par un nombre pour laquelle l'égalité est vérifiée. Cependant, cette solution n'est pas susceptible d'être utilisée par les élèves de 6e mais à partir de la 4e.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à interpréter une représentation visuelle d'une relation partie-tout impliquant l'égalité. On montre aux élèves deux tables, chacune contenant une combinaison de billes visibles et de boîtes qui cachent chacune le même nombre inconnu de billes. La principale exigence consiste à déduire le nombre de billes dans une boîte en se basant sur l'information selon laquelle les deux tables contiennent le même nombre total de billes. Cela signifie que les élèves doivent mentalement égaliser les quantités sur les deux tables et rechercher le nombre inconnu, sous la forme informelle de résolution d'une équation basée sur une équivalence visuelle. La tâche vise donc un raisonnement appuyé sur une réflexion algébrique précoce et la capacité à interpréter l'équivalence dans un contexte non symbolique.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

L'interprétation de l'égalité est un préalable essentiel au raisonnement algébrique. Dans le cadre de DiToM, cette compétence est considérée comme essentielle car elle fait appel à la compréhension de l'équivalence et de la substitution par les élèves, deux concepts centraux en arithmétique et en algèbre élémentaire. En raisonnant sur deux configurations différentes qui doivent en fait être égales, les élèves s'exercent à la pensée relationnelle plutôt que de se fier uniquement au calcul direct (Radford, 2014). Cette compétence favorise l'acquisition ultérieure de compétences pour résoudre des équations, choisir des transformations pertinentes et travailler sur des quantités inconnues sous forme symbolique. De plus, ces tâches non symboliques constituent un pont essentiel pour les élèves qui sont encore en train de développer leur confiance sur des représentations formelles, leur permettant d'accéder aux concepts grâce à une structure visuelle.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Les élèves qui ont des difficultés avec cette tâche peuvent ne pas reconnaître l'équivalence entre les deux côtés. Une erreur typique consiste à essayer de compter uniquement les billes visibles, en ignorant la quantité cachée dans les boîtes ou en supposant une valeur fixe (par exemple, « chaque boîte doit contenir 10 billes »). D'autres peuvent reconnaître la nécessité d'une équivalence, mais calculer ou raisonner incorrectement, en devinant peut-être le nombre de billes dans une boîte sans vérifier si cela conduit à des totaux égaux. Un autre groupe d'élèves pourrait traiter l'image visuelle de manière descriptive plutôt qu'analytique, en rapportant ce qui est visible sans tenter de déduire l'inconnu. Ces comportements suggèrent des difficultés dans l'interprétation des inconnues comme des quantités à déterminer *via* des déductions faites à partir des quantités connues.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves tirent profit du travail avec du matériel pratique qui rend concret le concept d'équivalence, par exemple pour passer aux niveaux suivants avec des nombres relatifs. Les enseignants peuvent utiliser des contextes narratifs (« Les deux enfants ont reçu le même nombre de billes. Combien y en a-t-il dans la boîte ? ») pour favoriser l'engagement et ancrer le problème dans un contexte familier. Dessiner et annoter des diagrammes où les élèves écrivent des égalités à trous telles que « 3 + ? = 7 » peut aider à faire le lien entre le raisonnement visuel et la représentation symbolique. De plus, la pratique répétée de l'identification d'ensembles égaux mais de composition différente renforce la notion d'équivalence et favorise le passage du raisonnement additif à un raisonnement fonctionnel précoce. Comme toujours, les élèves doivent être encouragés à expliquer leur raisonnement et à vérifier si les nombres qu'ils proposent maintiennent l'équivalence.

Tâche 2.1 : Représenter et interpréter des fractions égales

Colorie une partie du deuxième disque pour obtenir une fraction égale à celle du premier disque.
Écris l'égalité correspondante en utilisant des fractions.

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{6}}$$

Solution

La partie ombrée du deuxième disque doit correspondre à la même proportion de la partie au tout que dans le premier disque. Étant donné que la proportion de la partie au tout dans le premier disque est de 1:3, la proportion dans deuxième disque doit être de 2:6. (Cette conclusion peut être motivée intuitivement : si nous divisons un gâteau rond en six morceaux au lieu de trois, nous avons besoin de deux fois plus de morceaux pour obtenir la même quantité de gâteau).

Nous pouvons également procéder de manière formelle en développant la fraction comme suit :

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche met l'accent sur la capacité à reconnaître et à construire des fractions égales à travers deux aspects représentatifs : d'abord sous forme visuelle (en ombrant des parties d'un disque), puis sous forme symbolique (en écrivant une égalité fractionnaire). Dans la partie (a), les élèves doivent compléter une représentation visuelle en ombrant la même proportion d'un disque que celle indiquée dans un modèle donné. Dans la partie (b), ils doivent exprimer cette relation sous forme d'identité mathématique à l'aide de fractions. La compétence fondamentale évaluée est la coordination entre la compréhension visuelle de la partie et du tout et sa représentation formelle sous forme de fractions numériques égales.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La compréhension des fractions égales est la pierre angulaire de la compréhension des nombres rationnels et constitue donc une compétence mathématique clé. Elle forme la base conceptuelle des opérations avec les fractions, du raisonnement proportionnel, des concepts de rapport et de l'équivalence algébrique. Dans le cadre de DiToM, reconnaître que des fractions d'apparence différente peuvent représenter la même quantité est considéré comme essentiel pour développer la flexibilité dans la pensée numérique puis algébrique. Les élèves doivent comprendre qu'une fraction ne représente pas seulement un nombre, mais aussi une relation entre une partie et un tout, et que cette relation reste constante même lorsque le numérateur et le dénominateur sont multipliés ou divisés par un même nombre non nul. Les tâches qui combinent les niveaux visuel et symbolique favorisent une compréhension en profondeur et facilitent la transition vers un raisonnement abstrait dans les mathématiques ultérieures.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s’attendre avec cette tâche ?

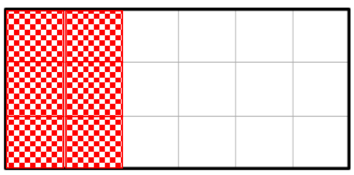
Les élèves peuvent ombrer un nombre incorrect de parties dans le deuxième disque, par exemple en faisant correspondre le nombre de parties ombrées plutôt que la proportion d’une partie au tout. Cela révèle une stratégie de comptage plutôt qu'une réflexion relationnelle, indiquant qu'ils considèrent le numérateur comme un nombre statique plutôt que comme une partie d'un tout. Dans la partie visant à écrire l’égalité entre fractions, les élèves peuvent copier la fraction donnée sans la transformer, écrire des fractions non égales mais d'apparence similaire (par exemple, en doublant uniquement le numérateur) ou confondre l'ordre du numérateur et du dénominateur. Certains peuvent omettre complètement le signe d'égalité, ce qui suggère une incompréhension quant aux conventions de notation des fractions. Ce sont là des signes avant-coureurs d'une compréhension conceptuelle fragile et d'une expérience limitée dans la mise en relation des représentations visuelles et symboliques.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Pour acquérir une solide compréhension des fractions égales, les élèves doivent régulièrement travailler avec des outils manipulables et des modèles visuels, tels que des disques, des barres, afin de voir et de créer des parties égales à travers différentes divisions. L'accent doit être mis sur l'identification du nombre de parties qui composent la même proportion du tout et sur la façon dont le nombre de parties ombrées et le nombre total de parties changent en parallèle. Les enseignants peuvent aider les élèves à verbaliser le processus de mise à l'échelle, par exemple : « J'ai doublé le nombre de parties et doublé le nombre de parties ombrées ». Cela favorise l'appropriation de la structure multiplicative qui sous-tend l'égalité. Les activités sur des registres de représentation différents, par exemple ombrer, puis écrire, puis expliquer verbalement, sont particulièrement efficaces pour stabiliser le lien entre les images visuelles et les égalités fractionnaires formelles.

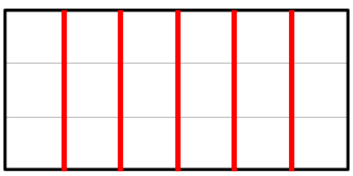
Tâche 2.2 : Colorier une fraction donnée d'un rectangle

Colorie les $\frac{2}{6}$ du rectangle :

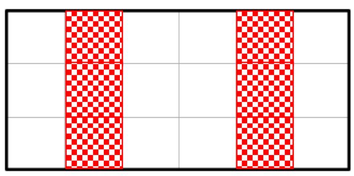


Solution

La solution présentée ci-dessus repose sur la division du rectangle en six parties égales (colonnes) et la sélection de deux de ces parties.

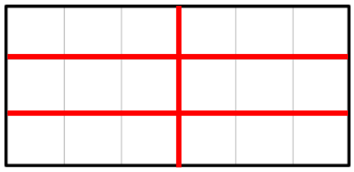


Autre réponse correcte :

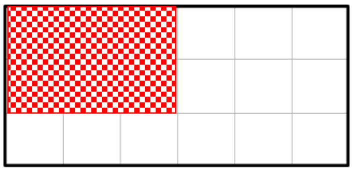


Bien sûr, n'importe lesquelles de deux de ces six parties peuvent être coloriées pour obtenir une solution correcte.

Il existe d'autres façons de diviser le rectangle en six parties égales, par exemple :

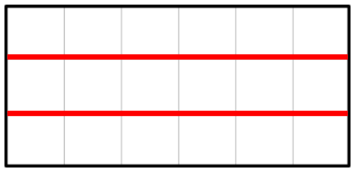


Autre réponse correcte :

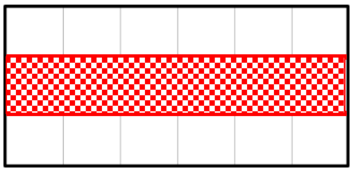


Toute réponse qui ombre 6 petits carrés sur les 18 petits carrés au total est correcte.

Il est également correct d'interpréter $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et de colorier une ligne sur trois.



Autre réponse correcte :



Compétence clé évaluée par cet exercice

Cette tâche évalue la capacité des élèves à construire une représentation visuelle d'une fraction donnée en coloriant une partie spécifiée d'une zone rectangulaire. Les élèves doivent identifier le nombre correct de parties égales et colorier le nombre de parties correspondant au numérateur, tout en reconnaissant le nombre total de parties correspondant au dénominateur. Cela nécessite d'interpréter les fractions comme des opérateurs sur des aires, c'est-à-dire d'utiliser une fraction pour définir la partie d'une région entière qui est prise en compte. La tâche exige de réaliser une subdivision précise du rectangle, une estimation spatiale et un raisonnement proportionnel.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La construction visuelle d'une fraction est une étape clé dans le développement de la pensée relationnelle et proportionnelle, ainsi que dans le rapprochement entre les connaissances informelles et formelles sur les fractions. Dans le cadre de DiToM, cette compétence est considérée comme fondamentale car elle facilite la compréhension ultérieure de l'égalité, de l'addition et de la soustraction des fractions et du raisonnement sur les aires en géométrie. La représentation des fractions dans un modèle visuel tel qu'un rectangle renforce également la compréhension du fait que les fractions ne concernent pas seulement des parties discrètes (comme des billes ou des jetons), mais aussi des quantités et des aires continues. Les élèves qui sont capables de passer avec souplesse de la notation fractionnaire aux modèles visuels ont tendance à développer des concepts numériques plus approfondis et mieux connectés, et sont mieux préparés pour les travaux abstraits en algèbre et au-delà.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s’attendre avec cette tâche ?

Les erreurs courantes consistent à ombrer un nombre incorrect de parties, souvent en raison d'un mauvais comptage et/ou d'une mauvaise identification du nombre total de subdivisions. Les élèves peuvent ombrer des parties qui ne sont pas de taille égale, violant ainsi l'exigence selon laquelle les parties fractionnaires doivent être de même aire. D'autres peuvent ombrer au hasard sans établir de relation avec la fraction donnée, ce qui indique un manque de conceptualisation de la partie et du tout. Dans certains cas, les élèves ignorent le dénominateur et se contentent de compter les unités (par exemple, en ombrant deux parties quel que soit leur nombre total). Ces schémas indiquent des difficultés à coordonner une fraction symbolique avec un modèle visuel et à comprendre la contrainte structurelle qui définit une fraction valide.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Un soutien ciblé devrait inclure des activités pratiques avec des bandes de fractions, du pliage de papier ou des modèles de surface basés sur une grille. Les élèves devraient être encouragés à diviser d'abord les formes en parties égales avant d'appliquer l'opérateur (par exemple, « colorier 3 des 4 parties égales »). Il est utile de présenter des exemples et des contre-exemples, par exemple des rectangles dont les sous parties ne sont pas égales, afin de clarifier ce qui constitue une représentation fractionnaire valide. Le fait de relier les tâches de coloriage à l'écriture symbolique et à l'explication verbale (« Je l'ai divisé en 6 parties égales et j'en ai colorié 4, donc cela fait quatre sixièmes ») favorise l'appropriation des représentations. Au fil du temps, les élèves doivent s'exercer avec des formes et des orientations variées afin de généraliser leur compréhension au-delà de formats spécifiques.

Tâche 2.3 : Raisonnement proportionnel avec des quantités et des prix

2 kg de pommes coûtent 5 €. Détermine le prix de 6 kg de pommes.

15

Solution

Si un élève reconnaît que 6 kg représentent 3 fois plus que 2 kg, il peut en conclure que 6 kg devraient coûter 3 fois plus cher que 2 kg. Le prix de 6 kg est donc de $3 \times 5 = 15$ €.

Ce raisonnement proportionnel peut être étayé par une notation semi-formelle telle que

2 kg$\longrightarrow$ 5 €

6 kg $\longrightarrow$? €

$$\begin{tikzcd} 2\text{ kg} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\times \mathbf{3}"'] & 5\text{ €} \arrow[d, bend left, "\times \mathbf{3}"] \\ 6\text{ kg} \arrow[r] & ?\text{ €} \end{tikzcd}$$

Ou, plus formellement :

$$\frac{6}{2} = \frac{?}{5} \quad \text{soit} \quad \frac{?}{5} = \frac{6}{2}$$

Le prix de 6 kg de pommes coûtent : $\frac{6 \times 5}{2} = 15$.

Compétence clé évaluée par cet exercice

Cette tâche évalue la capacité des élèves à appliquer un raisonnement multiplicatif pour résoudre un problème proportionnel impliquant des prix et des quantités. Le contexte — déterminer le prix de 6 kilogrammes de pommes sachant que 2 kilogrammes coûtent 5 euros — exige des élèves qu'ils reconnaissent et maintiennent un rapport constant entre la quantité et le prix. Pour résoudre correctement ce problème, les élèves doivent soit multiplier la paire quantité-prix par un facteur 3, soit calculer le taux unitaire (prix au kilogramme) puis multiplier. La compétence testée est la compréhension et l'application des structures multiplicatives dans les relations fonctionnelles, qui constituent une base essentielle pour la résolution de problèmes de rapport, de proportion et de pourcentage en mathématiques.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Le raisonnement proportionnel est une compétence mathématique clé dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. Selon le cadre de DiToM, la capacité à identifier et à travailler avec des relations constantes, telles que « 2 kg → 5 € » extrapolée à « 6 kg → ? € », est essentielle non seulement en arithmétique, mais aussi en algèbre, en compréhension fonctionnelle, en géométrie, en sciences et dans la résolution de problèmes quotidiens. Les élèves qui maîtrisent ces relations multiplicatives peuvent les transférer dans différents contextes et choisir de manière flexible des stratégies efficaces (par exemple, doubler, diviser par deux, raisonnement sur le prix unitaire). De plus, le passage de la comparaison additive à la comparaison multiplicative reflète une avancée dans la compréhension mathématique qui sous-tend l'apprentissage futur des fonctions linéaires et des modèles proportionnels.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Les erreurs courantes comprennent le raisonnement additif, comme supposer que si 2 kg coûtent 5 euros, alors 6 kg doivent coûter 5 + 4 = 9 euros. Cela reflète une incapacité à saisir la nature multiplicative de la relation. Certains élèves peuvent multiplier directement 5 par 6 (ce qui donne 30 €), interprétant de manière erronée la signification des nombres concernés. D'autres peuvent avoir du mal à coordonner les unités (mélangeant les kilogrammes et les euros) ou se contenter de deviner en se basant sur une estimation. Ces erreurs révèlent difficultés dans la compréhension structurelle et peut-être une expérience limitée du raisonnement basé sur les ratios. Les élèves qui n'expriment pas clairement leur stratégie ou qui s'appuient sur des essais et des erreurs manquent souvent d'un modèle conceptuel fiable pour la proportionnalité.

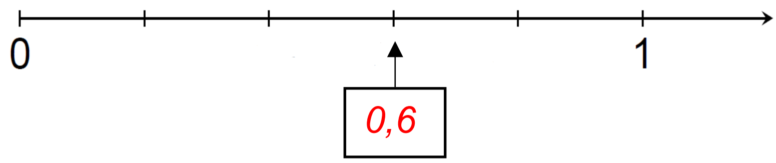
Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves tirent profit de problèmes riches en contexte impliquant de l'argent, des recettes ou des mesures, où les structures proportionnelles apparaissent naturellement. Les enseignants doivent explicitement modéliser des stratégies telles que la réflexion sur le taux unitaire (« Si 2 kg coûtent 5 €, alors 1 kg coûte 2,50 €... ») ou la mise à l'échelle basée sur les relations multiplicatives (« 6 kg correspondent à 3 fois 2 kg, donc le prix est de 3 × 5 € »). Des supports visuels tels que des droites numériques, des tableaux de ratios et des modèles à barres peuvent faciliter la compréhension de la relation multiplicative. Il est également utile de comparer les stratégies additives et multiplicatives lors des discussions en classe afin de mettre en évidence leurs différentes implications. Encourager les élèves à expliquer et à justifier leur raisonnement favorise le développement métacognitif et aide à approfondir la compréhension des structures proportionnelles.

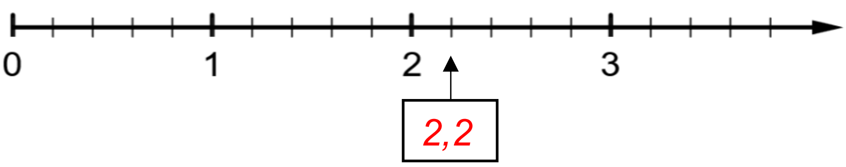
Tâche 3.1 : Identifier des nombres sur une demi-droite graduée

Sur chaque demi-droite graduée, indique dans le cadre un nombre correspondant à la position de la graduation indiquée par la flèche.

a)



b)

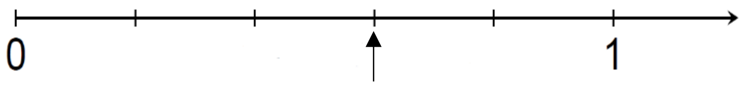


Solution

Deux stratégies possibles :

1) Compter le nombre de graduations (ou de sous-intervalles) de 0 à 1 ;
2) Tester des séquences de nombres décimaux (ou fractions) de 0 à 1.

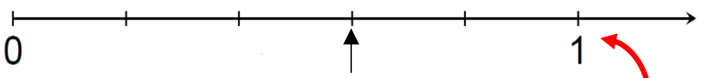
Première solution à a) : Plus précisément, la première stratégie peut être mise en œuvre en comptant 5 sous-intervalles de 0 à 1.



Nombre de sous-intervalles :

	1	2	$\boxed{3}$	4	5
Fraction :	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{3}{5}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

Deuxième solution : une possibilité consiste à tester 0,1 pour la première graduation à droite de 0. Ce choix de 0,1 donne 0,5 après 5 graduations, qui ne correspond pas à 1 sur la droite numérique. En passant à 0,2, on obtient 1,0, qui correspond à 1 sur la droite numérique.



test :	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
ajuster :	0,2	0,4	$\boxed{0,6}$	0,8	1,0

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche vise à évaluer la capacité des élèves à interpréter une demi-droite graduée segmentée en sous-intervalles et à placer correctement une fraction ou un nombre décimal en fonction de sa position relative entre 0 et 1 (ou au-delà). Les élèves doivent analyser les divisions de la droite, déterminer l'unité et identifier la fraction ou le nombre décimal correct qui marque une graduation donnée. Cela nécessite de comprendre les fractions comme des nombres ayant une valeur, et pas seulement comme des relations entre une partie et un tout. La tâche teste également la capacité à coordonner les représentations symboliques et spatiales des nombres rationnels.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Être capable de localiser des fractions sur une demi-droite graduée est une compétence mathématique clé, car elle reflète un changement dans la compréhension des fractions, qui passent de parties d'objets à des nombres sur une échelle continue. Cette interprétation spatiale des fractions jette les bases de la comparaison, du classement et du calcul avec des fractions. Dans le cadre de DiToM, l'estimation et le positionnement sur une droite numérique sont considérés comme des indicateurs forts de la compréhension conceptuelle. Des recherches (par exemple, Siegler & Booth, 2004 ; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) montrent que les élèves qui comprennent la structure métrique de la droite numérique ont plus de chances de réussir dans l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie par la suite. De plus, la demi-droite graduée offre un modèle unifié qui facilite les transitions entre les nombres naturels, les fractions, les décimaux et les nombres négatifs.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Les élèves se basent souvent sur le comptage des graduations en supposant une subdivision décimale de l'unité plutôt que de faire un raisonnement proportionnel. Par exemple, ils peuvent interpréter à tort quatre graduations entre 0 et 1 comme des « quarts », que le tout soit subdivisé en parties égales ou non. Une autre erreur courante consiste à placer la fraction au mauvais endroit, par exemple en plaçant 3/4 à 2/3 en raison d'un manque de raisonnement proportionnel. Certains élèves peuvent deviner en se basant sur leur intuition visuelle plutôt que de calculer le dénominateur en lien avec le nombre de sous-intervalles entre 0 et 1. Dans des variantes plus avancées, les élèves peuvent rencontrer des difficultés lorsque la demi-droite graduée ne commence pas à 0 ou lorsque des fractions non communes ou des nombres variés sont impliqués.

De telles erreurs suggèrent des faiblesses dans le raisonnement proportionnel et la compréhension des nombres décimaux. On peut se reporter à la tâche 3.4 qui traite de cette question.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Pour aider les élèves, il est essentiel de consacrer du temps à la construction d'un modèle mental solide de la droite numérique qui inclut les fractions et les nombres décimaux. Les enseignants peuvent utiliser des outils interactifs tels que des bandes pliables et des demi-droites graduées pour développer le raisonnement proportionnel. L'enseignement explicite doit se concentrer sur la manière de déterminer la taille d'un intervalle unitaire, de compter les sous-intervalles et de relier ces intervalles au symbole écrit. La comparaison de différentes fractions sur la même demi-droite graduée peut permettre aussi de renforcer le raisonnement sur les liens entre numérateur et dénominateur. Les activités dans différents registres de représentation, comme indiquer des fractions sur une demi-droite graduée, puis les écrire sous forme symbolique et vice versa, ou établir des relations avec des représentations iconiques déjà connues des élèves (par exemple, des disques), renforceraient les liens de représentation. Une verbalisation fréquente (« C'est le troisième intervalle sur quatre, donc c'est trois quarts ») peut favoriser l'appropriation de la structure.

Tâche 3.2 : Choisir la fraction correcte d'un disque grisé

Quelle est la partie grisée du disque ?

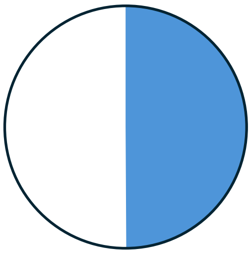
✓ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{8}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$

Solution

Dans l'image originale, il y a 4 parties grisées et un total de 8 parties. La fraction correspondante est

$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{8} = \frac{4\times1}{4\times2} = \frac{1}{2}$$

Une autre possibilité consiste à ignorer les parties grisées et à interpréter la partie complète grisée comme *la moitié* du disque entier.



Compétence clé évaluée par cette tâche

Cette tâche vise à évaluer la capacité des élèves à identifier une fraction à partir d'une représentation visuelle de la partie et du tout, et à sélectionner la représentation symbolique correcte de cette fraction parmi plusieurs fractions. Dans l'image, un disque est divisé en huit parties égales et quatre de ces parties sont grisées. La fraction correcte est donc 4/8, qui se simplifie en 1/2. Cependant, les élèves doivent non seulement reconnaître cette relation, mais aussi la distinguer de distracteurs plausibles mais incorrects, tels que 1/4, 1/8 ou même 8/4. La compétence fondamentale testée est la coordination entre la compréhension visuelle, numérique et structurelle des fractions.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Être capable d'interpréter des fractions à partir de modèles visuels et de les transposer correctement en représentations symboliques est une compétence fondamentale pour la compréhension des nombres rationnels. Dans le cadre de DiToM, cette tâche fait appel au concept de fraction en tant que rapport entre une partie et un tout, qui est au cœur de concepts tels que l'équivalence, les opérations sur les fractions et la proportionnalité. Il est important de noter que la tâche introduit un piège conceptuel : le distracteur 8/4 est numériquement plus grand que le tout, bien qu'il corresponde aux nombres corrects (simplement inversés). Reconnaître cette incohérence nécessite plus qu'un simple comptage visuel ; cela exige une compréhension de la structure, de l'échelle et de la signification des fractions.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Le distracteur 8/4 est particulièrement attrayant car il comprend les deux nombres présents dans l'image (8 parties au total et 4 grisées), mais inverse leur ordre. Le fait de sélectionner 1/8 ou 1/4 pourrait indiquer une mauvaise interprétation de la proportion, soit en ne comptant que les parties grisées, soit en n'en tenant pas compte du tout, c'est-à-dire en dissociant les deux informations. Certains élèves peuvent se rabattre par défaut sur des « fractions de référence » familières telles que 1/4 ou 1/2 sans analyse. Ce sont là autant de signaux d'alerte indiquant une compréhension fragile ou incomplète des fractions, en particulier en ce qui concerne la coordination partie-tout et l'interprétation symbolique.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves tirent profit d'activités pratiques utilisant des disques (« parts de tarte ») ou des bandes en papier pliables, où ils peuvent physiquement diviser et griser des parties d'un tout. Les enseignants doivent insister sur le rôle du numérateur (parties du tout) et du dénominateur (tout) en les verbalisant de manière cohérente (« 4 parties grisées sur 8 parties égales, cela fait 4 huitièmes... et je l'écris ainsi : 4/8 »). S'entraîner à faire correspondre des modèles visuels à plusieurs expressions fractionnaires, y compris celles supérieures à 1, peut aider les élèves à distinguer les fractions simples, complexes et égales. Encourager les élèves à expliquer pourquoi une fraction comme 8/4 ne peut pas représenter la partie d'un tout favorise la pensée critique et renforce la conscience structurelle. Mettre en évidence les erreurs courantes à travers une discussion guidée (par exemple, « Pourquoi quelqu'un pourrait-il penser que 8/4 est correct ? ») peut aider à rendre les idées incorrectes explicites et à les aborder directement.

Tâche 3.3 : Comparer une fraction simple avec des nombres naturels

Coche **tous** les nombres naturels plus grands que $\frac{10}{3}$

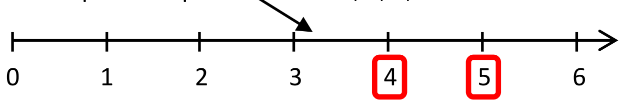
2 3 4 5

Solution

Première solution : Commencer par calculer $\frac{10}{3} = 3{,}33...$ ou décomposer $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$.

Parmi les nombres 2, 3, 4, 5, seuls 4 et 5 sont supérieurs à 3,33.

Deuxième solution : placer $\frac{10}{3}$ sur une droite numérique (sous forme de fraction, de nombre $3 + \frac{1}{3}$, ou de 3,33...) et comparer les positions avec 2, 3, 4, 5.



Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à comparer une fraction non unitaire supérieure à 1 ($\frac{10}{3}$) avec plusieurs nombres naturels. Les élèves doivent identifier tous les nombres de l'ensemble {2, 3, 4, 5} qui sont supérieurs à $\frac{10}{3}$. Étant donné que $\frac{10}{3}$ est égal à $3 + \frac{1}{3}$, soit environ 3,33, la solution correcte consiste à sélectionner à la fois 4 et 5. Il est important de noter que la réponse n'est considérée comme correcte que si les deux nombres 4 et 5 sont cochés et qu'aucun des nombres incorrects (2 et 3) n'est coché.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La comparaison des fractions avec les nombres entiers est une compétence mathématique clé, car elle relie les systèmes de nombres rationnels et entiers, favorisant ainsi le développement d'un modèle cohérent de droite numérique. Dans le cadre de DiToM, cette comparaison favorise la compréhension de la valeur des fractions, l'interprétation des représentations fractionnaires, décimales ou mixtes et le passage de l'une à l'autre. La capacité à déterminer si une fraction est supérieure ou inférieure à un nombre entier est essentielle pour développer une certaine souplesse dans l'interprétation des informations numériques. De plus, cette compétence favorise la réussite aux tâches impliquant la mesure, la mise à l'échelle et l'interprétation des fonctions, domaines dans lesquels des comparaisons entre les nombres rationnels et naturels se produisent régulièrement.

A quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

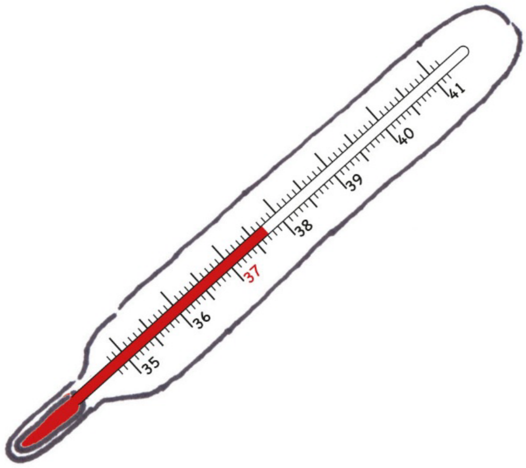
Les élèves peuvent convertir $\frac{10}{3}$ de manière incorrecte, par exemple en l'estimant proche de 2 ou de 5, ce qui les conduit à des décisions inexactes pour cocher les cases. Une erreur courante consiste à se concentrer uniquement sur le numérateur ou le dénominateur pris isolément. Certains élèves peuvent ne cocher qu'un seul nombre correct (par exemple, 4), car ils ont mal compris les instructions de la tâche ou n'ont pas compris qu'il existe plusieurs valeurs correctes. Ces erreurs révèlent un manque de maîtrise des fractions simples et des difficultés à raisonner de manière flexible entre les représentations (par exemple, convertir $\frac{10}{3}$ en $3 + \frac{1}{3}$).

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves doivent s'entraîner régulièrement à comparer des fractions complexes avec des nombres naturels et d'autres nombres avec des écritures additives avec fractions. Des outils visuels tels que des demi-droites graduées peuvent aider à clarifier la position d'une fraction donnée par rapport à des nombres de référence. Les enseignants peuvent guider les élèves pour qu'ils expriment les fractions complexes sous forme de nombres en écriture additive avec fractions (par exemple, $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$) afin de faciliter l'estimation et la comparaison. Les exercices faisant appel au raisonnement verbal (« $\frac{10}{3}$ est-il supérieur ou inférieur à 4 ? ») et les tâches d'explication (par exemple, justifier pourquoi 3 n'est pas correct) contribuent à clarifier les concepts. Dans les tâches comportant plusieurs réponses correctes, il est également utile de mettre l'accent sur la compréhension de la tâche, c'est-à-dire sur la manière d'interpréter de manière précise et complète les structures du type « coche toutes les réponses qui s'appliquent ».

Tâche 3.4 : Lire des nombres décimaux sur un thermomètre

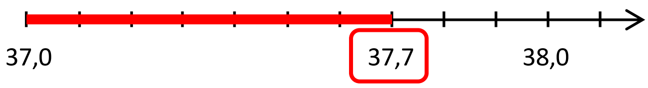
Écris la température mesurée en °C par le thermomètre.



Réponse : 37,7 °C

Solution

Le thermomètre est gradué en décimales (unité degré Celsius). On peut comparer la représentation avec une demi-droite graduée :



Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à lire et à interpréter des nombres décimaux sur une demi-droite graduée, dans un contexte réel (un thermomètre). On montre aux élèves un thermomètre analogique avec des graduations en degrés Celsius et une colonne de liquide rouge qui monte jusqu'à un niveau spécifique, à savoir 37,7 °C. Pour résoudre correctement l'exercice, les élèves doivent déterminer la température indiquée à partir de la représentation visuelle donnée et l'exprimer en notation décimale.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Dans le cadre de DiToM, l'interprétation des mesures sur des échelles linéaires est une compétence mathématique fondamentale, car elle intègre la compréhension de la valeur d'un chiffre selon sa position dans l'écriture d'un nombre, l'estimation de la valeur numérique et le raisonnement sur des mesures de grandeurs. L'interprétation des nombres décimaux est essentielle dans les contextes quotidiens (température, argent, longueur, poids) et constitue la base pour approfondir les pourcentages, les fractions et les fonctions. De plus, la lecture de la demi-droite graduée dans des contextes réels favorise la culture mathématique, car les élèves doivent comprendre les outils de mesure gradués utilisés dans les domaines de la santé, des sciences ou de la vie quotidienne. Le lien entre l'information visuelle et la représentation numérique renforce la capacité des élèves à relier des quantités continues avec une précision symbolique.

A quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Certains élèves peuvent avoir du mal à interpréter les subdivisions fines de la demi-droite graduée, en particulier si les incréments sont des dixièmes (étapes de 0,1) plutôt que des nombres entiers. Les erreurs courantes comprennent l'arrondi au nombre entier le plus proche (par exemple, 38 au lieu de 37,7), l'omission de la décimale (en écrivant 377) ou le mauvais comptage des graduations en raison d'une méconnaissance de la structure décimale. D'autres peuvent donner une valeur incorrecte à chaque intervalle, par exemple en supposant qu'entre 37 et 38 il y a 5 parties égales au lieu de 10. Ces erreurs proviennent souvent d'une compréhension insuffisante de la valeur des chiffres dans le système décimal, d'une maîtrise limitée des nombres décimaux ou d'un manque d'expérience dans l'interprétation de la demi-droite graduée.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves tirent profit d'une exposition répétée à des instruments de mesure gradués, tels que des thermomètres, des règles et des éprouvettes graduées. Les enseignants doivent montrer comment analyser les intervalles, déterminer la taille des incréments et compter en utilisant les dixièmes décimaux. L'utilisation de calques transparents ou de marqueurs de couleur pour suivre les niveaux de liquide peut améliorer l'alignement visuel. Les élèves doivent également s'entraîner à lire et à écrire des nombres décimaux dans des situations riches en contexte, à l'aide de modèles de demi-droites graduées qui font le lien entre la pensée symbolique et la pensée visuelle. Mettre l'accent sur la précision du langage (« trois dixièmes de plus que trente-sept ») peut aider à renforcer la clarté conceptuelle autour de la valeur des décimales (aspects positionnel et décimal). Enfin, des tâches ciblées comparant des valeurs telles que 37,7, 37,8 et 38,0 peuvent améliorer la discrimination décimale fine.

Tâche 3.5 : Comparer des nombres décimaux

Indique le nombre plus grand :

☑ 3,33 ☐ 3,303 ☐ 3,03 ☐ 3,3

Solution

Les quatre nombres peuvent être représentés comme suit

$$3{,}33 \quad = 3 + 0{,}3 + 0{,}03$$

$$3{,}303 \quad = 3 + 0{,}3 + 0{,}003$$

$$3{,}03 \quad = 3 + 0{,}03$$

$$3{,}3 \quad = 3 + 0{,}3$$

En comparant les paires de nombres, il apparaît clairement que le plus grand nombre est 3,33.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à comparer et à classer des nombres décimaux, en particulier ceux dont la valeur est proche et dont le nombre de chiffres décimaux varie. Les élèves doivent déterminer lequel des quatre nombres décimaux donnés (3,33, 3,303, 3,03, 3,3) est le plus grand. Pour réussir, ils doivent comprendre que c'est la valeur de position qui détermine la grandeur, et non le nombre de chiffres ou la « longueur » apparente de la partie décimale. La tâche teste spécifiquement la précision dans l'interprétation sur une droite numérique jusqu'aux centièmes et millièmes, ainsi que la capacité à reconnaître que 3,33 est supérieur à 3,303, bien que ce dernier ait plus de chiffres à la partie décimale.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La comparaison des nombres décimaux est une compétence mathématique clé, car elle reflète la compréhension de la valeur de position dans le système décimal au-delà des nombres entiers. Dans le cadre de DiToM, cela est essentiel pour développer des compétences en estimation, en mesure et en calcul dans la vie réelle (par exemple, les prix, l'interprétation des données). La comparaison des nombres décimaux facilite également l'apprentissage ultérieur des pourcentages, de l'algèbre et des contextes scientifiques. La tâche reflète la manière dont les élèves raisonnent sur la grandeur relative et s'ils se concentrent sur la valeur plutôt que sur la structure superficielle, comme le nombre de chiffres ou la longueur visuelle des segments. Cette compétence est fondamentale pour le calcul mental et l'interprétation de données tabulaires ou graphiques.

À quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une idée fausse fréquente est que les nombres décimaux plus longs sont plus grands. Par exemple, les élèves peuvent choisir à tort 3,303 parce qu'il comporte trois chiffres après la virgule. D'autres peuvent comparer uniquement le premier chiffre après la virgule et négliger la structure au-delà (par exemple, en supposant que 3,3 est supérieur à 3,33 parce que 3,3 n'a qu'une seule décimale). Certains élèves peuvent ne pas savoir comment aligner les décimales et comparer mentalement les valeurs, en particulier lorsqu'elles ont des longueurs différentes. Ces réponses indiquent une compréhension fragile de la valeur des décimales, en particulier pour distinguer les dixièmes, les centièmes et les millièmes. Les erreurs peuvent également refléter un manque d'expérience dans la comparaison de décimales proches, où les stratégies intuitives échouent.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Les élèves doivent être encouragés à utiliser des tableaux de valeur de position pour aligner et comparer les décimales chiffre par chiffre. Les enseignants peuvent utiliser des écritures additives fractionnaires : 3,3 = $3 + \frac{3}{10}$, $3{,}33 = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$, $3{,}303 = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}$ pour comparer la valeur des nombres. Des outils visuels tels que des demi-droites graduées avec des marqueurs décimaux, des modèles de blocs de base dix pour les décimales ou des représentations sous forme de grille peuvent aider à consolider la compréhension de la valeur des nombres. Les enseignants peuvent montrer des stratégies telles que l'ajout de zéros à la fin pour égaliser le nombre de décimales (par exemple, comparer 3,300, 3,330, 3,303). Il est essentiel de mettre l'accent sur la valeur plutôt que sur la représentation (« Plus de chiffres ne signifie pas plus de valeur »). La pratique d'exercices de raisonnement

(« Lequel est le plus grand et pourquoi ? ») et de jeux d'estimation impliquant de l'argent, des longueurs ou des volumes peut aider à ancrer la comparaison des décimales dans des contextes significatifs.

Tâche 3.6 : Trouver les termes manquants dans des égalités à trous avec des décimaux

Complète par les nombres manquants.

a) $1{,}8 + \underline{3{,}5} = 5{,}3$

b) $\underline{1{,}49} + 0{,}51 = 2$

Solution

a) *Première solution* : Le nombre manquant peut être interprété par le résultat de la soustraction.

$\_\_\_\_ = 5{,}3 - 1{,}8 = 3{,}5$

Deuxième solution : On peut utiliser une stratégie de calcul, de décomposition et recomposition des nombres décimaux en s'appuyant sur leurs propriétés et sur la représentation des nombres sur une demi-droite graduée.

Étape 1 : $1{,}8 + 3 = 4{,}8$

Étape 2 : $4{,}8 + 0{,}2 + 0{,}3 = 5{,}3$

Réponse, basée sur les étapes 1 et 2 : $3 + 0{,}2 + 0{,}3 = 3{,}5$.

(La deuxième stratégie est couramment utilisée dans le calcul mental, plus rarement avec une notation formelle.)

b) *Première solution* : Le nombre manquant peut être interprété par le résultat d'une soustraction.

$\_\_\_\_ = 2 - 0{,}51 = 1 + 1 - 0{,}51 = 1 + 0{,}49 = 1{,}49$ (utilise la propriété arithmétique $0{,}49 + 0{,}51 = 1{,}00$)

Deuxième solution : également basée sur le résultat d'une soustraction sans utiliser la propriété précédente.

$\_\_\_\_ = 2 - 0{,}51 = 1 + 1 - 0{,}5 - 0{,}01 = 1 + 0{,}5 - 0{,}01 = 1 + 0{,}4 + 0{,}10 - 0{,}01 = 1{,}4 + 0{,}09 = 1{,}49$

Troisième solution : On peut utiliser la décomposition et recomposition des nombres décimaux en s'appuyant sur leurs propriétés et sur la représentation des nombres sur une demi-droite graduée.

Étape 1 : $0{,}49 + 0{,}51 = 1{,}00$ (opération arithmétique)

Étape 2 : $1 + 1{,}00 = 2$

Réponse, basée sur les étapes 1 et 2 : $0{,}49 + 1 = 1{,}49$.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à compléter une égalité à trous d'addition décimale dont un des termes est inconnu, en appliquant leur compréhension de la valeur d'un chiffre selon sa position dans l'écriture chiffrée du nombre, de la structure des égalités et des opérations inverses. Dans les deux parties, les élèves se voient présenter une somme dont un des termes est manquant :

- Dans a.), ils doivent déterminer ce qu'il faut ajouter à 1,8 pour obtenir 5,3.
- Dans b.), ils doivent déterminer ce qu'il faut ajouter à 0,51 pour obtenir 2.

Cela nécessite soit un raisonnement soustractif (par exemple, 5,3 - 1,8), soit une compréhension conceptuelle de la relation additive et des propriétés des nombres décimaux. La compétence clé ici est la capacité à appliquer de manière flexible les propriétés de l'arithmétique décimale.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La recherche d'inconnues dans des égalités numériques est une compétence clé fondamentale pour faire le lien entre l'arithmétique et l'algèbre. Dans le cadre DiToM, ces tâches sont considérées comme un raisonnement algébrique précoce : les élèves doivent traiter l'égalité à trous dans son ensemble et comprendre le rôle structurel de l'inconnue. De plus, le fait de manipuler des valeurs décimales renforce la maîtrise des élèves de la structure décimale et favorise leur réussite ultérieure dans des domaines tels que les mesures, les finances et le raisonnement proportionnel. La capacité à passer des éléments connus aux inconnus à l'aide d'opérations inverses reflète une compréhension opérationnelle plus approfondie, reconnaissant le signe d'égalité comme une relation d'équivalence, et contribue au développement du sens des équations.

A quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Certains élèves peuvent tenter de deviner plutôt que d'appliquer la soustraction, surtout s'ils ne savent pas comment traiter la valeur d'un chiffre selon sa position dans l'écriture d'un nombre décimal. Une erreur typique consiste à mal aligner les chiffres décimaux (par exemple, traiter 1,8 comme 18 ou oublier d'aligner les dixièmes) ou à ne pas prendre en compte l'aspect décimal de la numération décimale (une unité d'ordre donné est égale à 10 unités d'ordre inférieur, par exemple, $1 = 10 \times 0{,}1$). Dans la partie b, les élèves peuvent confondre la position de l'inconnue et soustraire 0,51 de 0 au lieu de 2. D'autres peuvent compléter l'égalité à trous en additionnant au lieu de soustraire, ou peuvent écrire un résultat logiquement incorrect qui « correspond » numériquement mais ne respecte pas la structure décimale. Ces erreurs indiquent des difficultés dans les procédures, une non-compréhension du système décimal ou une interprétation insuffisante du rôle de l'égalité dans la recherche du nombre inconnu d'une égalité à trous.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Un soutien efficace comprend la pratique de la résolution d'égalité à trous à l'aide de droites numériques décimales, de modèles à barres afin de visualiser les relations et d'appliquer des stratégies de calcul basées sur le raisonnement. Les élèves doivent être encouragés à réécrire les égalités à trous en utilisant la soustraction pour isoler l'inconnue et à estimer d'abord leur résultat afin de développer un sens de la plausibilité. Les exercices axés sur la décomposition des nombres peuvent aider à acquérir une aisance dans l'arithmétique décimale. Encourager les explications verbales (« Que faut-il ajouter à 1,8 pour obtenir 5,3 ? ») renforce le raisonnement et relie l'arithmétique à la structure algébrique.

Tâche 3.7 : Effectuer des soustractions et des multiplications avec des décimaux

Calcule :

a) $23{,}5 - 1{,}12 =$ 22,38

b) $6 \times 2{,}5 =$ 15

Solution

a) $23{,}5 - 1{,}12 = 22 + 1 + 0{,}50 - 1 - 0{,}12 = 22 + 0{,}38 = 22{,}38$

$50 - 12$ peut être calculé comme $20 - 12 + 30 = \ 8 + 30 = 38$, à partir de la décomposition additive de 50, $50 = 20 + 30$. Le processus de décomposition et recomposition peut être illustré sur une demi-droite graduée par « aller » de 12 à 20 puis à 50.

b) *Première solution* : $6 \times 2{,}5 = (3 \times 2) \times 2{,}5 = 3 \times (2 \times 2{,}5) = 3 \times 5 = 15$. Ce calcul s'appuie sur la décomposition multiplicative de 6 en 3×2 et l'application de la propriété d'associativité de la multiplication. On utilise aussi le fait numérique $2 \times 2{,}5 = 5$.

Deuxième solution : $6 \times 2{,}5 = 6 \times (2 + 0{,}5) = 6 \times 2 + 6 \times 0{,}5 = 12 + 3 = 15.$ Ce calcul s'appuie sur la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Remarque : le calcul $6 \times 0{,}5$ peut être interprété comme « 6 moitiés = 3 entiers » ou, symboliquement, comme

$6 \times 0{,}5 = 3 \times 2 \times 0{,}5 = 3 \times 1 = 3 \quad (2 \times 0{,}5 = 1\ ;$ en mathématique « deux fois un demi est égal à un (entier) »)

On pourrait aussi s'appuyer sur la décomposition additive de 6 : $6 = 4 + 2$

$$6 \times 2{,}5 = (4 + 2) \times 2{,}5 = 4 \times 2{,}5 + 2 \times 2{,}5 = 10 + 5 = 15$$

Compétence clé évaluée par cet exercice

Cette tâche évalue la capacité des élèves à effectuer avec précision des opérations arithmétiques avec des nombres décimaux. Dans la partie a), ils doivent calculer la différence entre 23,5 et 1,12. Dans la partie b), ils doivent déterminer le produit de 6 et 2,5. Les deux problèmes testent la compréhension de la valeur de position, la maîtrise des opérations et de leurs propriétés (associativité de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). La tâche reflète des compétences courantes mais essentielles dans le contexte du système décimal.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

La réalisation d'opérations de base avec des nombres décimaux est une compétence mathématique fondamentale, telle que définie dans le cadre de DiToM. Elle est non seulement essentielle pour les calculs quotidiens (par exemple, gérer de l'argent, des mesures ou des données), mais elle soutiendra également le calcul littéral à venir, en réinvestissant, l'usage de l'égalité comme relation d'équivalence, la prise en compte de différentes écritures d'une expression ou d'un calcul, l'usage des propriétés d'associativité de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Le calcul décimal précis est à la base de nombreux domaines mathématiques, notamment les statistiques et la résolution de problèmes dans des contextes scientifiques. La capacité à calculer avec des nombres décimaux reflète une bonne appropriation des connaissances sur la valeur de position, le contrôle d'un calcul et les stratégies d'estimation.

A quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s’attendre dans cette tâche ?

Les erreurs courantes dans la partie a) comprennent le mauvais alignement des décimales (par exemple, traiter 23,5 comme 23,50 mais ne pas l'aligner correctement avec 1,12), ce qui conduit à une soustraction incorrecte. Les élèves peuvent également soustraire des chiffres à partir de mauvaises positions ou ignorer complètement l’existence de décimales. Certains peuvent également utiliser des stratégies de calcul inappropriées, comme l'addition répétée sans contrôle structurel. Ces erreurs indiquent souvent une mauvaise compréhension de la valeur d’un chiffre selon sa position dans l’écriture du nombre, des propriétés des opérations ou du positionnement des décimales.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Le soutien devrait inclure des exercices structurés sur l'alignement des chiffres selon leurs positions dans le nombre, en particulier pour les soustractions impliquant des décimales. Les enseignants peuvent utiliser du papier quadrillé ou des tableaux de numération pour aider les élèves à aligner correctement les chiffres. Les stratégies d'estimation (« La réponse sera-t-elle plutôt 22 ou 10 ? ») aident à développer le sens des nombres. Pour la multiplication, l'utilisation de quadrillages ou de représentations à base de blocs de base dix peut faciliter la compréhension conceptuelle de la multiplication par des décimales. Il est également utile de mettre en relation les algorithmes standard et les stratégies de calcul mental (par exemple, $6 \times 2{,}5 = 6 \times 2 + 6 \times 0{,}5 = 15$ ou $6 \times 2{,}5 = (3 \times 2) \times 2{,}5 = 3 \times (2 \times 2{,}5) = 3 \times 5 = 15$ (associativité de la multiplication)). Un raisonnement verbal fréquent renforce la compréhension de la valeur des décimales dans les opérations.

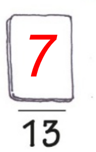
Tâches 3.8 et 3.9 : Maximiser la valeur d'une fraction en choisissant un numérateur ou un dénominateur approprié

Tâche 3.8

Tu trouves ci-dessous 5 cartes, chacune comportant

un nombre.

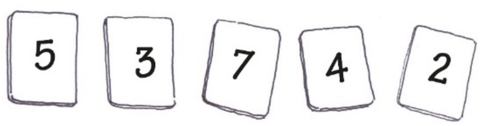
Choisis la carte qui convient pour que la fraction soit la plus grande.



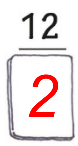
Tâche 3.9

Tu trouves ci-dessous 5 cartes, chacune comportant

un nombre.



Choisis la carte qui convient pour que la fraction soit la plus grande.



Solutions

La tâche 3.8 peut être résolue en utilisant le principe suivant :

En proposant un nombre plus grand au numérateur (en haut), tout en conservant le même dénominateur, on obtient une fraction plus grande.*

L'un des nombres 5, 3, 7, 4, 2 doit être placé au *numérateur*. Comme 7 est le *plus grand* de ces nombres, la plus grande fraction possible est 7/13.

La tâche 3.9 peut être résolue en utilisant le principe suivant :

En proposant un nombre plus petit au dénominateur (en bas), tout en conservant le même numérateur, on obtient une fraction plus grande.*

L'un des nombres 5, 3, 7, 4, 2 doit être placé au *dénominateur*. Comme 2 est le *plus petit* de ces nombres, la plus grande fraction possible est 7/13.

* Nous ne considérons que les fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers positifs.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Cette tâche évalue la capacité des élèves à raisonner sur la structure des fractions et à appliquer les propriétés indiquées dans la résolution pour maximiser la valeur d'une fraction en sélectionnant le nombre le plus approprié parmi un ensemble de nombres, soit au numérateur, soit au dénominateur :

- Diviser un nombre plus grand qu'un autre par un même nombre augmente la valeur de la fraction.
- Diviser un nombre par un nombre plus petit qu'un autre augmente la valeur de la fraction.

Cela permet d'évaluer la flexibilité du raisonnement des élèves en matière de ratios et de grandeur relative.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Comprendre comment les numérateurs et les dénominateurs affectent la taille d'une fraction est une idée fondamentale dans l'apprentissage des fractions. Dans le cadre de DiToM, cette capacité reflète une compréhension conceptuelle plus profonde de la valeur des fractions, à savoir comment l'augmentation du numérateur ou la diminution du dénominateur influe sur la valeur globale. Elle favorise également le développement de la pensée relationnelle, dans laquelle les élèves vont au-delà des caractéristiques superficielles et raisonnent de manière structurelle sur les relations entre les nombres. Ces connaissances sont essentielles pour les travaux ultérieurs sur les ratios, les proportions, la mise à l'échelle et le raisonnement algébrique.

A quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Une erreur courante consiste à sélectionner le plus grand nombre disponible, qu'il soit placé au numérateur ou au dénominateur, en partant du principe erroné que « plus c'est grand, mieux c'est ». Cela indique une stratégie procédurale ou superficielle sans compréhension structurelle. D'autres peuvent simplement choisir au hasard ou confondre les rôles du numérateur et du dénominateur, par exemple en maximisant le nombre lui-même plutôt que la valeur de la fraction résultante. Ces erreurs suggèrent une compréhension fragile de l'ordre des fractions et une expérience limitée de la comparaison de fractions. Les élèves peuvent également mal comprendre l'objectif (par exemple, essayer de se rapprocher le plus possible de 1 plutôt que de maximiser la valeur).

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui présentent des difficultés dans cette tâche ?

Un soutien efficace comprend des activités pratiques avec des bandes de papier représentant des fractions ou la droite numérique, où les élèves manipulent les numérateurs et les dénominateurs pour observer comment la valeur de la fraction change. Les enseignants peuvent modéliser des comparaisons telles que « 3/4 vs 3/5 » ou « 4/7 vs 5/7 » pour explorer comment le numérateur ou le dénominateur influe sur la valeur du nombre. Les tâches basées sur la discussion (« Lequel est le plus grand et pourquoi ? ») favorisent un raisonnement plus approfondi. La visualisation des fractions sur une demi-droite graduée ou l'utilisation d'un logiciel qui montre de manière dynamique la taille des fractions peut également aider les élèves à comprendre ces relations. Au fil du temps, guider les élèves vers des généralisations (« Un dénominateur plus petit rend une fraction plus grande si le numérateur est constant ») favorise le transfert et l'abstraction.

VI. Évaluation scientifique

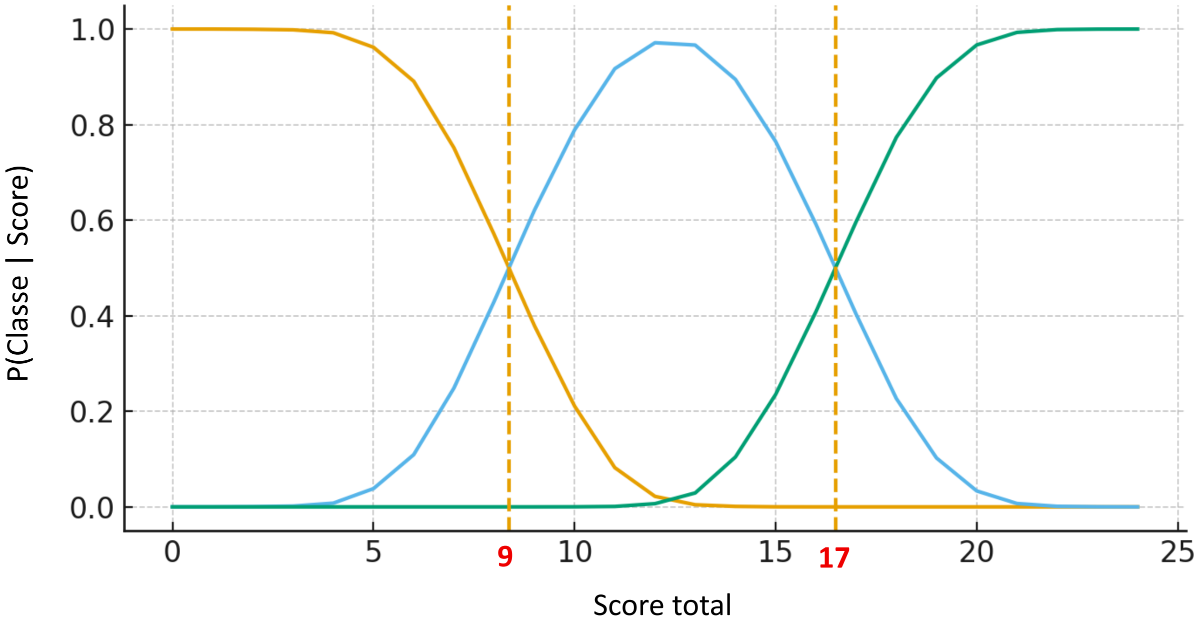
Ce test DiToM de début de 5e a été développé sur la base de considérations théoriques et testé dans le cadre d'une étude de validation sur un échantillon non représentatif. Les résultats présentés ci-dessous permettent d'identifier les élèves potentiellement à risque en raison d'un manque de compétences mathématiques clés pour la suite de leur apprentissage des mathématiques à l'école. Le test aide les enseignants de fin de 6e / début de 5e, à évaluer de manière empirique les performances des élèves et à identifier ceux qui obtiennent des résultats médiocres afin de leur apporter un soutien approprié à un stade précoce.

Description de l'échantillon et des résultats principaux

Le test a été expérimenté de juin à juillet 2025 au cours des trois dernières semaines de l'année scolaire 2024/2025 auprès de 1 841 élèves d'écoles en Grèce, en Allemagne, en France, en Espagne, en Italie, en Croatie et en Suède.

Le test comprend les parties suivantes : compétences arithmétiques de base avec 11 items, proportionnalité avec 3 items, calculs techniques avec 12 items. Si un item était résolu correctement, 1 point était attribué ; si la solution était incorrecte, incomplète ou manquante, 0 point était attribué. Le test a été mis en œuvre selon un protocole de passation commun (voir IV. Mise en œuvre du test DiToM). Le test visant à identifier les élèves potentiellement à risque, des effets plafonds importants étaient attendus (c'est-à-dire pas de distribution normale, mais plutôt une distribution asymétrique vers la gauche) et souhaités. Cela a été confirmé par l'expérimentation.

En vue d'une communication des résultats adaptée à la mise en œuvre dans les classes, il n'est pas spécifié une seule valeur seuil, mais deux valeurs seuils. Elles différencient les élèves potentiellement à risque, les élèves pour lesquels il est nécessaire d'avoir une évaluation diagnostique plus fine pour obtenir davantage d'informations et les élèves potentiellement sans risque. La détermination des scores seuil a été basée sur les données issues d'une analyse de classes latentes avec trois classes clairement distinctes. Les classes ne se chevauchent pas et sont monotones. Les probabilités *a posteriori* de l'attribution des classes ont été représentées graphiquement en fonction du score obtenu, lissées et utilisées pour déterminer les seuils critiques pour les décisions de financement en fonction de leurs points d'intersection (voir figure 1). Les points d'intersection des courbes ont été utilisés (probabilité *a posteriori* p = 0,5).



L'analyse des classes montre trois classes, appelées groupes par la suite, clairement distinctes, qui sont interprétées comme suit : G1→ élèves ayant obtenu de faibles résultats au test diagnostique, G2→ élèves ayant obtenu des résultats plutôt faibles au test diagnostique et G3→ élèves ayant obtenu de bons résultats au test diagnostique.

Pour déterminer le score critique, le seuil qui a été retenu est celui à partir duquel il y a 50 % de probabilité d'être dans la classe G1. Ce premier seuil est donc de 9 points. Les élèves qui ont obtenu un **score de 9** points ou moins ont besoin d'un soutien pour acquérir les bases afin de pouvoir aborder les contenus traités dans les cours de mathématiques suivants. Le deuxième seuil est de 17 points. Les élèves qui ont obtenu un **score compris entre 10 et 17 points** doivent être davantage observés pendant les cours de mathématiques au cours des prochaines semaines afin de vérifier s'ils comprennent les contenus abordés et s'ils sont capables de les mettre en œuvre de manière autonome.

VII. Fiche d'évaluation du test de début de 5^{e}

L'échelle suivante fournit des indications initiales sur les compétences avec lesquelles les élèves sont le plus susceptibles d'obtenir des points dans les trois fourchettes suivantes : 0-9 points, 10-17 points et 18-26 points.

Les élèves de ce groupe disposent des prérequis attendus pour l'apprentissage des mathématiques en début de 5^{e}.

G3 : En plus de G1 et G2, les élèves sont souvent capables de …

… choisir la fraction correcte représentant une partie grisée d'un disque, multiplier des nombres décimaux, représenter symboliquement des nombres décimaux / fractions simples sur une demi-droite graduée, comparer des nombres décimaux, maximiser la valeur d'une fraction en choisissant un dénominateur approprié et effectuer des soustractions avec des nombres décimaux

Et les élèves sont rarement capables de …

… effectuer des divisions avec des nombres naturels et représenter symboliquement des nombres décimaux ou fractions sur une demi-droite graduée pour des graduations plus complexes ou des échelles mixtes

Les élèves de ce groupe nécessitent un suivi plus étroit au cours des prochaines semaines afin de vérifier s'ils sont capables de comprendre et de mettre en œuvre de manière autonome les contenus suivants.

G2 : En plus du groupe G1, les élèves sont capables de

… multiplier des nombres naturels, effectuer des divisions avec des nombres naturels le plus souvent correctes, identifier et prolonger des suites de nombres, trouver les termes manquants dans des égalités à trous avec des nombres décimaux, colorier une partie d'un rectangle représentant une fraction donnée

Et les élèves sont rarement capables de …

… effectuer des multiplications avec des nombres décimaux simples et égaliser des quantités

Les élèves de ce groupe présentent un risque en termes de prérequis pour l'apprentissage des mathématiques à l'école et devraient bénéficier d'un soutien particulier dès que possible.

G1 : Les élèves sont capables de …

… représenter des fractions égales, maximiser la valeur d'une fraction en choisissant un numérateur approprié, lire des nombres décimaux sur un thermomètre, appliquer les règles de priorité des opérations, comparer une fraction complexe avec des nombres naturels et interpréter des fractions égales

Et les élèves sont rarement capables de …

… utiliser le raisonnement proportionnel avec des quantités et des prix, et traduire un texte écrit en expressions mathématiques

Références :

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Nombres rationnels, rapports et proportions. Dans D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York : Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM) : Développement et évaluation d'un instrument de dépistage pour l'identification précoce des élèves à risque dans l'enseignement des mathématiques au premier cycle du secondaire. Dans *les actes de la conférence EDULEARN25*. Palma, Espagne. Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7

Ehlert, A., & Fritz, A. (2013). Compétences arithmétiques de base des élèves des classes 5 à 7 du secondaire. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(2), 237–263.

Gaidoschik, M. (2025). *Das dezimale Stellenwertsystem: Verstehen, verinnerlichen und flexibel anwenden*. Hanovre : Klett Kallmeyer.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Certaines structures multiplicatives dans l'enseignement élémentaire : une perspective issue du paradigme relationnel. Études pédagogiques en mathématiques, 106(3), 447–469.

Prediger, S. (2008). Zahlaspekte verstehen und flexibel nutzen. Dans E. Cohors-Fresenborg et al. (Eds.), *Mathematiklernen ermöglichen* (pp. 85–100). Münster : Waxmann. ph-gmuend.de+3Edoc LMU München+3Wikipedia+3

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Développement de l'estimation numérique chez les jeunes enfants. *Child Development*, 76(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Connaissance conceptuelle de l'arithmétique des fractions. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.

Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Les représentations visuelles comme objets d'analyse : l'exemple de la droite numérique. ZDM, 46, 45–58.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). De l'addition à la multiplication... et vice versa : le développement des compétences de raisonnement additif et multiplicatif des élèves. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Concepts et opérations sur les nombres entiers. Dans F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Charlotte, NC : Information Age.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2004). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Seelze : Friedrich Verlag.