Analyses des exercices du test et pistes de remédiation

Début de CM2

Ce projet a été financé avec le soutien de la Commission européenne. Cette publication [communication] n'engage que son auteur et la Commission ne peut être tenue responsable de l'usage qui pourrait être fait des informations qui y sont contenues.

Table des matières

Avant-propos

Ce manuel a pour but de vous aider dans les passations du test *DiToM* en début de CM2 et à utiliser les résultats pour votre classe. Vous trouverez dans les pages suivantes, quatre sections :

1. une brève introduction aux objectifs et aux principes directeurs du projet Erasmus+ *DiToM* ;
2. des explications concises sur chaque tâche du test *DiToM* en début de CM2, y compris des remarques sur les stratégies de soutien possibles pour les élèves dont les résultats du test indiquent des lacunes dans des compétences mathématiques clés ;
3. des outils d'évaluation pour l'enseignant (barème, grilles de saisie des résultats pour l'élève et pour la classe) et des indications sur la manière dont les résultats ont été analysés ;
4. des informations complémentaires sous la forme d'une liste de références bibliographiques en lien avec les différentes compétences évaluées dans le test.

Les grilles de saisie décrites dans la section 3 peuvent également être téléchargées séparément sous forme de fichiers PDF individuels à l'adresse https://www.ditom.org/fr/tests-fr

Objectifs et principes directeurs de DiToM

L'apprentissage des mathématiques progresse par étapes : les nouvelles connaissances se construisent sur des anciennes. Lorsque les concepts fondamentaux font défaut, les élèves ont de plus en plus de difficultés à comprendre et à donner un sens aux mathématiques qui s'appuient sur ces bases. Des études nationales et internationales montrent que beaucoup d'élèves rencontrent des difficultés importantes en mathématiques dès le primaire. Pour les raisons décrites ci-dessus, ils continuent irrémédiablement à rencontrer des difficultés au collège. Il est inquiétant de constater que de nombreux jeunes terminent leur scolarité obligatoire sans maitriser les connaissances de base en mathématiques qui, selon l'OCDE, sont essentielles pour « participer pleinement à la vie sociale ».

Pour remédier à cette situation, les enseignants doivent d'abord être en mesure d'identifier les difficultés d'apprentissage en mathématiques, idéalement le plus tôt et le plus précisément possible. Ce n'est que sur cette base que des mesures de soutien ciblées pourront être prises. C'est précisément là qu'intervient le projet européen *Diagnostic Tools in Mathematics (DiToM)*. Dans le cadre d'un partenariat entre l'Allemagne, la France, la Grèce, la Croatie, l'Italie, la Suède et l'Espagne, cinq outils de dépistage interconnectés ont été développés. Ils permettent aux enseignants, à la fin ou au début d'une année scolaire, d'identifier des élèves qui risquent de prendre du retard en mathématiques s'ils ne bénéficient pas de mesures de soutien ciblées.

Les tests de diagnostic suivent un cycle de deux ans :

- Test début de CP *(fin de GS)*
- Test début de CE2 *(fin de CE1)*
- Test début de CM2 *(fin de CM1)*
- Test début de 5ème *(fin de 6ème)*
- Test début de 3ème *(fin de 4ème)*

Les tests DiToM : qu'est-ce que c'est et à quoi ça sert ?

Les cinq tests sont sous tous au format papier-crayon. Ils sont axés sur les compétences mathématiques clés qui doivent être acquises au début d'un niveau scolaire afin que les nouveaux contenus puissent être appris et compris. Chaque test peut être administré à toute la classe en une seule fois, mais il est possible de le faire en plusieurs fois, notamment pour les plus jeunes élèves. Les outils de notation fournis (voir section 3), permettent une évaluation rapide en relativement peu de temps. Les résultats donnent aux enseignants un premier aperçu sur les connaissances des élèves susceptibles d'avoir besoin d'un soutien supplémentaire dans des domaines particuliers.

Le mot *« susceptible »* est crucial : un tel test diagnostique **ne** remplace **pas** une évaluation individuelle qualitative. Au mieux, il fournit des indices initiaux sur les stratégies ou les démarches de résolution qu'un élève a pu utiliser. Une compréhension plus approfondie nécessite une observation ciblée et des discussions individuelles, à l'aide de tâches finement différenciées. Ce test peut toutefois constituer un point de départ précieux pour déterminer quels élèves profiteraient le plus d'investigations complémentaires.

Les « compétences clés en mathématiques » : qu'est-ce que c'est ?

Comme indiqué précédemment, les mathématiques scolaires se caractérisent par une *« hiérarchie interne d'apprentissage »* (Wittmann, 2015, p. 199). Cela est particulièrement vrai dans les domaines de l'arithmétique (nombres et opérations) et de l'algèbre, qui sont précisément ceux sur lesquels se concentrent les tests *DiToM*. Dans ces domaines, il est possible, à chaque étape de l'apprentissage, d'identifier les compétences *clés* sans lesquelles la poursuite de l'apprentissage ne peut se faire de manière significative et durable.

Prenons un exemple pour éclairer ce qu'est une « compétence clé ». Pour travailler efficacement avec les nombres naturels, les élèves doivent les comprendre en termes de concept de partie-tout, un processus de développement qui devrait être achevé au cours du CP. Le concept de partie-tout signifie, par exemple, que le nombre sept est compris comme un tout composé de parties : cinq et deux, quatre et trois, un et six, etc. Cette compréhension doit ensuite devenir automatique : un élève ne doit plus avoir besoin d'un effort conscient pour reconnaître que cinq est la partie manquante du tout sept lorsque deux est donnée comme autre partie. En d'autres termes, les élèves doivent automatiquement penser aux nombres en termes de décompositions additives et de relations. Cette combinaison alliant *compréhension* et *automatisation* est caractéristique de nombreuses compétences clés : une fois que certaines compétences sont automatisées, la charge mentale peut être libérée pour relever des défis mathématiques de plus haut niveau.

La maîtrise de la compétence clé consistant à « penser les nombres en termes de composition ou décomposition des nombres » peut être observée, par exemple, dans les stratégies de calcul. Un élève qui pense à 7 comme à 5 et 2 pourra plus facilement considérer que 7– 5 = 2, même au CP, sans avoir à compter. Les élèves qui ne possèdent pas cette compétence continuent souvent à s'appuyer sur des stratégies de comptage, laborieuses et sujettes à erreur, même dans les dernières années du primaire et parfois aussi au secondaire. L'addition et la soustraction basées sur le comptage deviennent rapidement ingérables lorsqu'il s'agit de nombres à deux ou trois chiffres. Ces élèves rencontrent également des difficultés à utiliser les relations entre les tables de multiplication, par exemple pour reconnaître que 9 × 6 est 6 de moins que 10 × 6, qui est plus facile à mémoriser. Les lacunes dans une compétence clé (la compréhension des nombres en tant que compositions) entravent donc l'acquisition d'autres compétences (addition, soustraction, multiplication), qui sont à leur tour des prérequis pour des compétences plus avancées (division, raisonnement proportionnel, etc.).

Cet enchaînement se poursuit au-delà de l'école primaire : par exemple, les élèves qui rencontrent des difficultés avec les nombres entiers naturels rencontreront des difficultés encore plus grandes avec les fractions puis avec les décimaux. Plus tard, l'algèbre s'appuiera sur des connaissances qui auraient dû être acquises lors de l'apprentissage des opérations à l'école primaire. Sans ces connaissances, l'algèbre peut apparaître aux élèves comme un code indéchiffrable.

C'est pourquoi les tests *DiToM* se concentrent sur les compétences clés, celles qui devraient être solidement acquises au début des classes de CP, CE2, CM2, 5ème et 3ème, afin que l'apprentissage mathématique puisse se poursuivre avec succès.

Après avoir administré le test *DiToM*, quelle est la prochaine étape ?

À l'aide des outils d'évaluation décrits dans la section 3, les enseignants peuvent exploiter un tableau (feuille de calcul tableur ou grille papier-crayon) qui peut être lu dans deux sens :

- **en ligne :** les résultats de chaque élève indiquent les tâches qui ont été résolues correctement, partiellement correctement, incorrectement ou non traitées, ce qui donne un score global par élève.
- **en colonne :** pour chaque tâche, le tableau indique combien d'élèves l'ont résolue correctement, partiellement correctement, incorrectement ou non traitée.

En ce qui concerne les élèves individuellement :

DiToM ne vise pas à étiqueter les élèves. Les tests diagnostiques **ne** sont **pas** conçus pour identifier les élèves atteints de « dyscalculie ». Les diagnostics cliniques de ce type ne répondent pas à la question fondamentale à laquelle *DiToM* cherche à répondre : *comment les enseignants peuvent-ils aider au mieux les élèves qui rencontrent des difficultés avec les compétences arithmétiques clés ?* Un soutien ciblé nécessite une compréhension précise du niveau d'apprentissage de chaque élève. DiToM aide à identifier ceux qui ont un besoin urgent d'une investigation plus approfondie de leurs connaissances, ni plus, ni moins. La section 2 fournit quelques pistes sur les types de soutien qui peuvent être envisagés relativement à l'échec de telle ou telle tâche.

Les « scores des seuils critiques » évoqués dans la section 3 ont été déterminés à partir d'expérimentations menées auprès de 934 élèves dans les sept pays partenaires. À l'aide *d'une analyse statistique en classes latentes* (voir Livingston, 2014), les élèves ont été regroupés comme suit :

- **Groupe A :** élèves présentant des difficultés généralisées pour plusieurs compétences clés
- **Groupe B :** élèves présentant des signes de difficultés dans des domaines spécifiques
- **Groupe C :** élèves ne présentant aucun signe majeur de difficulté.

Il est important de garder à l'esprit que tout diagnostic ne donne qu'un *aperçu instantané*. Certains élèves peuvent simplement avoir passé une mauvaise journée ou avoir été distraits, d'autres peuvent avoir copié des réponses malgré les précautions prises. Les résultats du dépistage doivent donc être interprétés avec prudence. Ils doivent toujours être comparés aux observations faites quotidiennement en classe et servir de base à des observations ciblées et à des tâches de suivi dans les jours et les semaines qui suivent.

S'il apparaît clairement qu'un élève appartient au **groupe A**, il y a lieu de s'attendre à ce que ses difficultés en mathématiques s'aggravent au cours de l'année scolaire, à moins que des interventions efficaces ne soient mises en œuvre en temps utile. La section 2 se limite à suggérer des pistes générales pour ces interventions, sur la base des compétences clés évaluées par chaque tâche. Pour des conseils plus détaillés, les enseignants doivent se reporter à la littérature pédagogique pertinente. Ce sont ces élèves que le test DiToM vise plus spécifiquement à identifier.

Les élèves **du groupe B** sont également susceptibles d'avoir besoin d'un soutien ciblé dans certains domaines pour progresser dans leurs apprentissages. Il convient de rappeler que toutes les tâches du test évaluent des compétences clés. Le diagnostic est intentionnellement conçu pour ne pas faire de distinction entre les élèves très performants ; dans l'idéal, la plupart des élèves devraient trouver les tâches assez faciles. Par conséquent, toute erreur commise par les élèves **du groupe C** dans les tâches individuelles doit également être prise au sérieux, car elle peut révéler des lacunes pour des compétences clés fondamentales.

En ce qui concerne la classe dans son ensemble :

Si les résultats montrent que plusieurs élèves ont rencontré des difficultés avec la même tâche, cela peut indiquer qu'ils n'ont pas suffisamment rencontré ce type de tâche ou qu'ils ne l'ont pas travaillée de manière ciblée. Dans de tels cas, il est important que ces opportunités d'apprentissage leur soient à nouveau offertes, même si le programme scolaire de l'année est déjà passé à un nouveau contenu et ne le prévoit pas. Une fois encore, il est important de tenir compte de la structure hiérarchique de l'apprentissage des mathématiques : chaque niveau scolaire est dépendant de la solidité de la compréhension des compétences fondamentales construites dans les niveaux scolaires inférieurs.

Analyses des tâches et pistes de remédiations

Tâche 1 : Dictée de nombres

a) Cinq-mille-quatre-vingt-neuf
b) quarante-trois-mille-cinq
c) Trois-cent-mille-cinq-cents

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Traduire le nom d'un nombre en français (indiqué oralement) par son écriture chiffrée, dans les cas de présence de zéro dans l'écriture.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

Être capable d'écrire correctement un nombre en chiffres à partir de son nom (en français) prononcé à l'oral permet à un élève de :

- suivre des séances en mathématiques, interpréter des problèmes écrits et communiquer plus clairement des idées mathématiques,
- être mieux préparé à effectuer un calcul posé (qui sollicite la signification des écritures chiffrées) lorsqu'un calcul mental (avec le nom des nombres) s'avère trop difficile,
- comparer et classer les nombres en choisissant de le faire grâce à leurs noms (utilisation de leur ordre d'arrivée dans la comptine numérique, voir *tâche 2*) ou à leur écriture chiffrée (aspects décimal et positionnel, voir *tâche 3a*),
- soulager sa mémoire en notant les nombres par écrit,
- comprendre des situations quotidiennes impliquant des nombres sous forme écrite et orale (par exemple pour écrire des dates, des mesures),
- communiquer avec les autres à l'aide des noms des nombres ou de leur écriture chiffrée.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Lorsque les élèves doivent écrire des nombres avec des chiffres tels que cinq-mille-quatre-vingt-neuf, quarante-trois-mille-cinq, ou trois-cent-mille-cinq-cents, divers types d'erreurs peuvent se produire.

Les élèves peuvent ne pas savoir écrire et dire les nombres jusqu'à trois chiffres, ce qui est indispensable pour réussir cette *tâche 1*.

Ils peuvent aussi mal placer des chiffres, en écrivant par exemple 5 890 au lieu de 5 089 ou 4 305 au lieu de 43 005, ou encore 3 005 000 au lieu de 300 500. Les nombres contenant des zéros au milieu ou entre les chiffres posent en effet souvent des problèmes particuliers.

De plus, ils peuvent omettre complètement certaines parties du nombre, ce qui suggère des problèmes de mémoire de travail ou de maintien de l'attention pendant l'écriture. Les élèves peuvent également mal entendre ou mal comprendre le nom du nombre, confondre l'écriture chiffrée de nombres qui se prononcent de manière similaire (six, seize, treize). S'ils demandent que le nom du nombre soit répété plusieurs fois, cela peut indiquer des difficultés d'audition ou de concentration.

L'erreur la plus fréquente reste la transcription en chiffres de chaque nom de nombre composant un seul nom, par exemple cinq-mille-quatre-vingt-neuf écrit 5000 89 correspondant à cinq-mille suivi de quatre-vingt-neuf.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Les élèves qui rencontrent des difficultés à écrire en chiffres les nombres énoncés à haute voix doivent comprendre que la transcription écrite d'un nom de nombre (oral) ne suit pas les mêmes règles que pour les autres mots de la langue française (écriture littérale, avec les lettres de l'alphabet).

L’écriture chiffrée d’un nombre peut en particulier s’obtenir à partir d’une quantité organisée sans pour autant nécessiter de connaitre le nom du nombre ! Ainsi, par exemple, le nombre d’objets dans une collection organisée en 5 milliers, 8 dizaines et 9 unités peut s’écrire directement 5 089 (5 milliers, 0 centaine, 8 dizaines et 9 unités) d’après les principes de la numération écrite chiffrée (aspects décimal et positionnel, cf. *tâche 3a*).

On peut aussi connaitre le nom du nombre à partir de cette quantité, sans passer par cette écriture chiffrée, en mobilisant cette fois-ci dans le dénombrement la comptine des milliers, celle des centaines (non nécessaire dans notre exemple), des dizaines et des unités, ce qui donne ici : mille, deux-mille, trois-mille, quatre-mille, cinq-mille (en énumérant les milliers), ensuite cinq-mille-dix, cinq-mille-vingt, etc., cinq-mille-quatre-vingts (en énumérant cette fois-ci les dizaines), puis finalement cinq-mille-quatre-vingt-un, cinq-mille-quatre-vingt-deux, etc., cinq-mille-quatre-vingt-neuf (en énumérant les unités restantes). Un entrainement aux deux façons d’accéder à une désignation du nombre via les quantités organisées est alors profitable, en commençant par de plus petites quantités.

Considérons d’abord le passage de l’écriture chiffrée au nom du nombre. Une règle est à apprendre, celle du séquençage de l’écriture chiffrée en groupes de trois chiffres en partant de la droite (et non la prise en compte de chaque chiffre individuellement !). Par exemple 5089 écrit 5 089, 43005 écrit 43 005, 300500 écrit 300 500. Il faut alors apprendre la règle suivante : on énonce le nom des nombres indiqués par chaque groupement de trois chiffres en commençant cette fois-ci par la gauche, et en y intercalant le mot « mille » lorsqu’il y a 4 à 6 chiffres (ultérieurement le mot million, sera intercalé pour les nombres écrits avec 7 à 9 chiffres). Cela nécessite donc une bonne connaissance des noms des nombres à trois chiffres, connaissance qu’il est nécessaire de contrôler. Des tableaux où dans chaque colonne on peut écrire trois chiffres peuvent être utilisés pour organiser la lecture des écritures chiffrées. Cependant, ces tableaux ne doivent pas être confondus avec des tableaux de numération éventuellement utilisés pour la compréhension de chaque chiffre des écritures chiffrées (aspects décimal et positionnel).

Il est important de revenir sur ce passage de l’écriture chiffrée au nom du nombre. En effet, il permet à l’élève d’inférer le passage inverse, la traduction du nom du nombre en son écriture chiffrée. En outre, il permet de vérifier qu’une réponse est fausse. Par exemple si ce passage est bien maitrisé, une proposition d’écriture de cinq-mille-quatre-vingt-neuf par 5000 89 peut être testée : 5000 89 c’est 500 089 qui se lit cinq-cent-**mille**-quatre-vingt-neuf, donc ce n’est pas cinq-**mille**-quatre-vingt-neuf.

Tâche 2 : Comparaison de nombres

a) 6001 5999

b) 7955 7599

c) 99899 102101

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Comparer des nombres à plusieurs chiffres et à utiliser avec pertinence les symboles d'inégalité > et <.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

La comparaison des nombres est une compétence clé car elle permet de situer les nombres les uns par rapport aux autres. La comparaison peut se faire soit en utilisant la valeur des chiffres (aspects décimal et positionnel, cf. *tâche 3a*), ce qui favorise la compréhension de l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée, soit en traduisant les écritures chiffrées en noms de nombre (cf. *tâche 1*), ce qui mobilise la compréhension de la structure de la suite des noms des nombres en français (la comptine numérique).

Dans la vie courante, la maîtrise de cette compétence permet des prises de décision dans des situations où des nombres sont à comparer. Elle intervient aussi dans la compréhension des écritures à virgule des nombres décimaux (aspects décimal et positionnel).

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Une erreur peut provenir de l'utilisation incorrecte des symboles d'inégalité > et <. Autrement-dit, l'élève peut savoir par exemple que 5999 est inférieur à 6001 mais répondre à tort que 5999 > 6001 par méconnaissance du symbole à utiliser.

Les autres erreurs dépendent de la procédure adoptée : soit avec les chiffres, soit avec le nom du nombre.

Pour la procédure avec les chiffres, la non compréhension d'au moins un des aspects (décimal ou positionnel) de la numération écrite chiffrée (cf. *tâche 3a*), amène parfois à des erreurs résultant de comparaisons de chiffres effectuées sans prendre en compte l'unité de numération à laquelle ils renvoient. Cette erreur est visible lorsque les nombres à comparer n'ont pas le même nombre de chiffres et que la comparaison se limite, par exemple, à comparer uniquement le 1^{er} chiffre : 654>4230 car 6>4. Dans la *tâche 2*, le nombre de chiffres des nombres à comparer est le même dans les deux premiers cas mais pas le dernier. Il se peut aussi que l'élève indique qu'un nombre est plus grand qu'un autre car les chiffres qui le composent sont en majorité plus grands. Cela amène par exemple à répondre que 5999>6001.

Pour la procédure avec le nom du nombre, les élèves traduisent chaque écriture chiffrée en un nom de nombre, par exemple 5999 en cinq-mille-neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf et 6001 en six-mille-un. L'erreur peut venir de deux méconnaissances : celle de la suite de ces noms de nombres (ne pas savoir que cinq-mille-neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf arrive avant six-mille-un dans la comptine), ou bien le fait que l'ordre d'énonciation des noms des nombres correspond à l'ordre des nombres correspondant (si cinq-mille-neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf arrive avant six-mille-un dans la comptine, alors cinq-mille-neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf désigne un nombre inférieur à celui désigné par six-mille-un). Une autre erreur, courante dans cette procédure, est celle de ne pas savoir correctement passer de l'écriture chiffrée au nom du nombre (*tâche 1*).

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Il est d'abord nécessaire de vérifier si les élèves confondent les symboles d'inégalité en testant leur emploi sur des plus petits nombres, dont ils connaissent l'ordre. Ces exemples peuvent servir pour mémoriser ce que signifient ces symboles.

Il est utile de leur faire distinguer les deux procédures de comparaison : avec les chiffres et avec le nom des nombres. Chacune peut faire l'objet d'un enseignement spécifique car leur maîtrise permet en particulier d'effectuer des contrôles systématiques : est-ce qu'en utilisant les chiffres j'obtiens la même réponse qu'en utilisant le nom des nombres ?

Pour la procédure avec les chiffres, il est nécessaire de revenir à la signification des écritures chiffrées. Les deux aspects décimal et positionnel (cf. aussi *tâche 3a*) permettent en effet de comprendre comment faire les comparaisons. Le chiffre le plus à gauche est à associer à son unité de numération. Par exemple, dans 5999, 5 concerne les milliers, ce qui veut dire que 5999 est compris entre 5 milliers et 6 milliers. De même, dans 6001, 6 concerne les milliers, ce qui veut dire que 6001 est compris entre 6 milliers et 7 milliers. On peut donc conclure que 5999<6001. Des règles peuvent ensuite être dégagées, comme celle concernant le nombre de chiffres des nombres entiers (un nombre entier à quatre chiffres est toujours plus grand qu'un nombre entier à trois chiffres), mais pas avant d'en comprendre les raisons. En effet, le risque est que ces règles soient utilisées aussi dans des cas où elles sont fausses, comme avec les écritures à virgule des nombres décimaux. Par exemple 3,41<5,1 et pourtant 3,41 comporte plus de chiffres que 5,1. Or, si on regarde la signification des chiffres, on a 3<3,41<4 et 5<5,1<6, et on peut donc bien conclure que 3,41<5,1.

Concernant la procédure avec le nom des nombres, il s'agit avant tout de développer le passage d'une écriture chiffrée au nom du nombre qu'elle désigne et de comprendre la structure de la comptine numérique. Cela renvoie en particulier à la *tâche 1*.

Tâche 3a : Additionner 1, 10, 100

a) 9899 + 1 =

b) 4590 + 10 =

c) 3900 + 100 =

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Ajouter 1, 10 ou 100 dans des cas particuliers pour lesquels cette addition impacte plusieurs chiffres de l'écriture chiffrée du nombre initial.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

Comme pour la *tâche 2* précédente, ajouter 1, 10 ou 100 peut se faire selon deux procédures : en considérant les chiffres des écritures chiffrées ou en passant par le nom des nombres.

Les procédures avec les chiffres permettent de voir si les élèves ont compris, dans ce cadre, les aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée. Pour l'aspect positionnel, la position de chaque chiffre dans une écriture chiffrée renseigne l'unité de numération à laquelle il se réfère. Pour l'aspect décimal, une unité de numération est égale à dix fois l'unité de numération inférieure. Par exemple, si on note u l'unité (simple), d la dizaine, c la centaine et m le millier, l'aspect décimal traduit que 10u=1d, 10d=1c, 10c=1m, etc. La maîtrise des deux aspects de la numération écrite chiffrée est essentielle pour les additions et les soustractions posées (*tâches 7a et 7b*) ainsi que pour les multiplications et les divisions, posées ou non (*tâche 11*).

Les procédures mettant en jeu le nom des nombres recourent aux ressources de la numération orale. Cette dernière n'est alors pas uniquement utilisée pour dénombrer mais aussi pour calculer mentalement (*tâches 5, 6a, 6b et 11*).

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Concernant les procédures mobilisant les écritures chiffrées, les erreurs peuvent venir de la non compréhension de l'aspect décimal. Cela peut donner les résultats erronés suivants : 9899+1= 9890, 4590+10=4500, 3900+100=3000. C'est alors moins l'ajout d'une unité simple, d'une dizaine ou d'une centaine (respectivement pour ces trois calculs) qui est envisagé, que l'ajout de 1 à l'un des chiffres. Cela peut d'ailleurs aussi aboutir à 9899+1= 98910, 4590+10=45100, 3900+100=31000. Lorsque le « 1 » est ajouté au mauvais endroit, on peut aussi avoir par exemple 4590+10=4690. Ces erreurs peuvent également provenir d'une tentative d'addition posée en colonnes qui ne prend pas en compte la retenue. A noter cependant que ces opérations posées en colonne, mais effectuées mentalement, demandent des compétences de visualisation supplémentaires. En outre le résultat peut être exact sans pour autant que les aspects décimal et positionnel ne soient compris (*tâche 7a*).

Pour les procédures passant par le nom des nombres, il s'agit comme dans la tâche 2 précédente, de savoir faire la traduction écriture chiffrée/nom du nombre (*tâche 1*), mais aussi de comprendre que des additions peuvent être réalisées grâce au nom des nombres. Ainsi, ajouter un à neuf-mille-huit-cent-quatre-vingt-dix-neuf consiste à avancer de un dans la comptine (mobilisation de la comptine de un en un à partir d'un nom de nombre donné), ajouter dix à quatre-mille-cinq-cent-quatre-vingt-dix consiste à avancer de dix dans la comptine (mobilisation de la comptine de dix en dix à partir d'un nom de nombre donné), ajouter cent à trois-mille-neuf-cents consiste à avancer de cent dans la comptine (mobilisation de la comptine de cent en cent à partir d'un nom de nombre donné). Les erreurs commises par les élèves peuvent donc révéler des connaissances insuffisantes à ce sujet.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Comme dans la *tâche 2* précédente, il est avant tout nécessaire de faire distinguer les deux procédures de calcul : avec les chiffres et avec le nom des nombres. Chacune peut faire l'objet d'un enseignement spécifique car leur maîtrise permet en particulier d'effectuer des contrôles systématiques : est-ce qu'en utilisant les chiffres j'obtiens la même réponse qu'en utilisant le nom des nombres ?

Pour la procédure avec les chiffres, tout comme dans la *tâche 2* précédente, il va s'agir de revenir avec les élèves sur les deux aspects décimal et positionnel de la numération écrite chiffrée. Ils permettent en effet de comprendre qu'ajouter 1, 10, 100 revient à ajouter 1 unité (simple), 1 dizaine, 1 centaine. En particulier, il est donc possible de le faire sans poser les opérations dans sa tête.

Concernant la procédure avec le nom des nombres, il s'agit cette fois de développer le passage d'une écriture chiffrée au nom du nombre qu'elle désigne et de comprendre la structure de la comptine numérique (*tâches 1 et 2*). Pour cette tâche, cela consiste à travailler sur les aptitudes à sur-compter à partir d'un nom de nombre donné, de un en un, de dix en dix, de cent en cent, etc. Mais il s'agit aussi de montrer que cela permet de faire des calculs. Le recours à un matériel de numération (rendant tangibles et manipulables les unités, dizaines, centaines, etc.) pour représenter des situations d'ajout peut s'avérer utile.

Tâche 3b : Retrancher 1, 10, 100

a)	7000 - 1 =	
b)	3500 - 10 =	
c)	4000 - 100 =	

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Soustraire correctement 1, 10 ou 100 dans des cas particuliers pour lesquels cette soustraction impacte plusieurs chiffres de l'écriture chiffrée du nombre initial.

Pourquoi cette compétence est-elle *essentielle* ?

Les raisons en sont les mêmes que dans la *tâche 3a*.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cet exercice ?

Voir aussi à ce propos la tâche précédente, la *tâche 3a*.

Cette fois-ci, concernant les procédures mobilisant la numération écrite chiffrée, les erreurs seront liées non pas au fait que, par exemple, 10 unités simples ne sont pas conçues comme 1 dizaine (idem pour les autres unités de numération), mais que 1 dizaine n'est pas conçue comme 10 unités simples (idem pour les autres unités de numération).

Pour les procédures basées sur les noms des nombres, il est question, comme dans la *tâche 2*, de savoir faire la traduction écriture chiffrée/nom du nombre (*tâche 1*). Plus précisément, il s'agit ici de comprendre que des soustractions peuvent être effectuées grâce au nom des nombres. Ce seront alors les comptines en arrière de un en un, de dix en dix, de cent en cent, etc., qui devront être mobilisées. Les erreurs commises par les élèves peuvent révéler des connaissances insuffisantes à ce sujet.

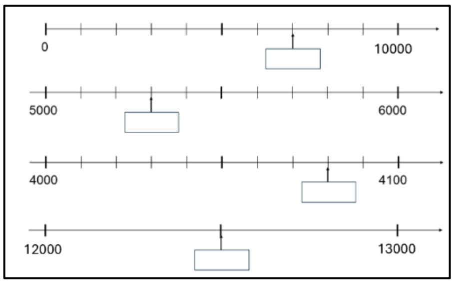
Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Les aides sont semblables à celles de la *tâche 3a* précédente, en mettant en avant ici aussi les deux possibilités : avec les chiffres ou avec le nom des nombres.

Pour les procédures avec les chiffres, le matériel de numération permet non seulement de travailler les aspects décimal et positionnel des écritures chiffrées, mais aussi de représenter des problèmes mettant en jeu la soustraction.

Pour les procédures avec le nom des nombres, ce sont les comptines en arrière qu'il faut travailler, ainsi que le lien avec les problèmes mettant en jeu la soustraction afin que les élèves utilisent la comptine numérique comme instrument de calcul et pas uniquement de dénombrement.

Tâche 4 : Droite graduée



Compétence clé évaluée par cette tâche

Reconnaître différentes graduations sur une droite graduée (pas de 10, 100 et 1000) et à les utiliser pour y placer correctement des nombres (jusqu'à 13000).

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

Savoir placer correctement des nombres sur une droite graduée permet de visualiser les écarts entre ces nombres. Par exemple, si on sait que 0<7000 <10000 (voir la *tâche 2* pour les procédures de comparaison), avec une droite graduée de 1000 en 1000, on peut voir que la distance de 7000 à 10000 est plus de deux fois plus grande que sa distance à 0, ou encore que 7000 se trouve à la même distance de 4000 et de 10000.

Cela permet ensuite d'avoir une représentation visuelle des encadrements (en particulier entre deux unités consécutives, entre deux dizaines, centaines, milliers), puis d'effectuer des arrondis, par exemple à 10, 100 ou 1000 près. Ainsi, si 156 est placé correctement sur une droite graduée de 10 en 10 entre 150 et 160, on voit que sa valeur approchée à 10 près c'est 160 (il est plus près e 160 que de 150). Par ailleurs, une droite graduée permet de visualiser des différences entre deux nombres (par exemple 10000-70000=3000) mais aussi des sommes (par exemple 7000+3000=10000).

Ultérieurement, ce seront les fractions puis les décimaux que les élèves placeront sur une droite graduée. Ils pourront alors par exemple visualiser que $\frac{1}{2}$ est plus près de $\frac{1}{3}$ qu'il ne l'est de $\frac{3}{4}$, ou encore voir que 3 est l'arrondi de 2,6 à l'entier le plus près.

Finalement, à l'école élémentaire, les droites graduées sont utilisées pour repérer des points sur un axe puis, au collège, des points dans le plan grâce à un repère comportant deux axes gradués (celui des abscisses et celui des ordonnées).

Des contextes réels (par exemple des frises chronologiques, des règles graduées, des échelles de température) nécessitent par ailleurs la compréhension des droites graduées.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Certaines erreurs relèvent d'une mauvaise compréhension de la numération écrite chiffrée ou de la numération orale (le nom des nombres). Ces erreurs et leur traitement sont indiqués dans les tâches précédentes et nous n'y revenons pas ici afin de nous centrer sur les erreurs spécifiques à la compréhension des droites graduées.

Certains élèves comptent les graduations tracées sans tenir compte du pas. Si toutes les graduations (de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100, de 1000 en 1000) ne sont pas tracées, ils peuvent alors se tromper pour placer certains nombres. Par exemple, si sur une droite graduée de 1000 en 1000, la graduation marquant 2000 n'est pas signalée, ils peuvent imaginer que 2000 se trouve à la prochaine graduation qui indique en fait 3000.

Si toutes les graduations d'un pas donné sont tracées (comme c'est le cas ici), ils peuvent se tromper en commençant à compter à partir de la graduation 0, et non de la graduation suivante. Cette erreur de comptage peut amener par exemple à donner 8000 comme réponse dans le 1er cas, au lieu de 7000.

Par ailleurs, si rien n'est marqué sous le trait de graduation qui indique explicitement le pas (c'est le cas ici), les élèves peuvent ne pas savoir identifier ce pas. Cela peut amener dans le 1er cas à des réponses comme 7 (pas de 1), 70 (pas de 10) ou 700 (pas de 100), au lieu de 7000 (pas de 1000).

Il est important de noter que la construction d'une droite graduée fait appel aux notions de longueur et de mesure de longueur. Un point A est repéré par un nombre x car sa distance à l'origine (point repéré par 0) est de x unités de mesure, l'unité de mesure étant la distance entre l'origine et le point repéré par 1. Ainsi, bien qu'un comptage des graduations puisse être opérationnel, ce sont théoriquement les segments de même longueur (la longueur indiquant le pas) qu'il s'agit de considérer.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Les aides mentionnées ici sont spécifiques à une mauvaise compréhension de la droite graduée. Pour les aides concernant les nombres (écriture chiffrée et nom des nombres), il est nécessaire de se reporter aux tâches précédentes.

La priorité est de déterminer si un élève sait résoudre des problèmes concernant les droites graduées de 1 en 1. L'accent peut être mis sur les droites graduées partiellement remplies, que les élèves doivent compléter avec les nombres manquants. Il est intéressant de voir comment ils placent tel ou tel nombre alors que toutes les graduations ne sont pas forcément tracées. S'ils échouent, c'est sans doute qu'ils n'ont pas compris ce qu'est une droite graduée, et en particulier ses liens avec les longueurs et les unités de mesure. Il est alors nécessaire de revenir sur ces notions et leur utilisation pour construire des droites graduées. Ce n'est qu'ensuite que des graduations de pas 10, 100 ou 1000 pourront être abordées.

Les enseignants peuvent utiliser des droites graduées interactives qui permettent aux élèves de glisser-déposer des nombres afin de s'exercer de manière autonome sur de nombreux exercices.

Tâche 5 : Trouver la moitié de nombres jusqu'à 10 000

a) La moitié de 1 000 : _____
b) La moitié de 500 : ______
c) La moitié de 700 : ______
d) La moitié de 3 000 : _____

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Déterminer la moitié d'un nombre entier de dizaines, de centaines ou de milliers (sans donner la procédure — certains résultats peuvent être automatisés).

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

Trouver la moitié de nombres allant jusqu'à 10 000 constitue une compétence fondamentale pour aborder des divisions plus complexes. Elle sert en effet de tremplin vers la division par d'autres nombres, notamment pour les puissances de 2, grâce au recours à la division par deux répétée. Les élèves qui maîtrisent déjà cette compétence développent un sens du nombre plus affûté ainsi qu'une meilleure compréhension des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée : ils perçoivent comment les chiffres se comportent selon leur rang lorsqu'un nombre est divisé par deux. Pour 1 000, qui contient un nombre pair de centaines (10 centaines), il est facile d'en prendre la moitié : on obtient 5 centaines, soit 500. En revanche, pour 500, 700 ou 3 000, qui comportent un nombre impair de centaines (5 ou 7 centaines) ou de milliers (3 milliers), il faut adopter une autre procédure. Par exemple, plutôt que de considérer 500 comme 5 centaines, on peut le convertir en 50 dizaines : la moitié de 50 dizaines est alors 25 dizaines, c'est-à-dire 250.

La division par deux joue également un rôle clé dans l'élaboration de stratégies de calcul mental qui ne se limitent pas à la division. Les techniques pour déterminer le double ou la moitié d'un nombre permettent, par exemple, de simplifier certains problèmes de multiplication, de déterminer rapidement des pourcentages usuels (comme 50 % ou 25 %) ou encore de manipuler des fractions, renforçant ainsi les compétences pour le raisonnement proportionnel.

De plus, les élèves rencontrent fréquemment des situations concrètes dans lesquelles la division par deux est indispensable : partager équitablement une quantité entre deux personnes, calculer une remise de 50 %. La capacité à diviser rapidement des quantités par deux devient alors un véritable atout. En maîtrisant cette compétence, les élèves peuvent mobiliser moins de ressources cognitives pour les calculs et se concentrer davantage sur des tâches plus complexes, comme le raisonnement et la résolution de problèmes. Dans les programmes, certains des résultats doivent être automatisés (les élèves les plus performants peuvent donc les donner sans mobiliser de procédures spécifiques).

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Les erreurs de calcul sont fréquentes lorsqu'il s'agit de diviser des nombres par deux. Certains élèves appliquent la division chiffre par chiffre sans tenir compte de la valeur du chiffre selon sa position dans le nombre : ils interprètent par exemple « la moitié de 3 000 » comme « la moitié de 3, puis la moitié de 0, de 0 et de 0 », au lieu de reconnaître que 3 000 représente 3 milliers. D'autres commettent des erreurs dans des situations pourtant élémentaires, comme affirmer que la moitié de 1 000 est 50 au lieu de 500, révélant ainsi des lacunes dans la compréhension de l'impact sur la division par deux de la valeur du chiffre selon sa position dans le nombre.

Les conceptions erronées liées à l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée constituent des obstacles conceptuels plus profonds. Par exemple, lorsqu'ils divisent 7 000 par deux, certains élèves obtiennent 350 au lieu de 3 500 : ils comprennent bien que la moitié de 7 est 3,5 mais rencontrent des difficultés avec la valeur du chiffre selon sa position dans l'écriture chiffrée du nombre. Parmi les signes annonçant ces difficultés, figure un recours excessif à des stratégies de comptage ou à des techniques opératoires écrites pour des tâches qui devraient être résolues mentalement (utilisation de la division posée pour trouver la moitié de 1 000).

Des performances irrégulières — comme réussir la division de certains nombres mais échouer pour d'autres pourtant similaires — révèlent souvent une compréhension fragile de la procédure. Il arrive aussi que des élèves mémorisent des résultats erronés (par exemple, penser que la moitié de 7 000 est 4 500) ou qu'ils ne sachent pas comment traiter un nombre impair d'unités de numération alors qu'ils y parviennent lorsqu'il est pair. Enfin, des confusions entre le double et la moitié peuvent également survenir.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

L'utilisation de matériel lié à l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée — blocs en base dix, tableaux de numération, abaques — permet de montrer comment la division par deux affecte chaque rang en numération écrite chiffrée.

La progression consiste d'abord à travailler avec le matériel, puis à passer progressivement aux unités de numération. Par exemple, la moitié de 1 000 correspond à la moitié de 10 centaines : on obtient donc 5 centaines, c'est-à-dire 500. De même, la moitié de 800 revient à prendre la moitié de 8 centaines, soit 4 centaines, donc 400. Pour calculer la moitié de 700, cette stratégie directe ne fonctionne plus. Deux démarches sont alors possibles. Premièrement, on peut considérer 700 comme 70 dizaines : la moitié de 70 dizaines est 35 dizaines, soit 350. Deuxièmement, on peut aussi raisonner en centaines : 700 correspond à 7 centaines. Les partager en deux donne 3 centaines et 1 centaine à diviser à son tour. Or, une centaine vaut 10 dizaines : la moitié d'une centaine est donc 5 dizaines. On obtient alors 3 centaines et 5 dizaines, c'est-à-dire 350.

Les droites graduées ou le matériel en base dix peuvent également servir à illustrer la division par deux de manière visuelle et progressive. Il est important de consolider les faits numériques relatifs à la division par deux pour les nombres à un chiffre et les multiples de 10. Aider les élèves à repérer des régularités leur permet de généraliser leurs connaissances : s'ils savent que la moitié de 10 est 5, ils peuvent raisonner avec les unités de numération, la moitié de 10 dizaines est 5 dizaines, donc la moitié de 100 vaut 50. De même, la moitié de 10 centaines est 5 centaines, ce qui donne 500 pour la moitié de 1 000, et ainsi de suite.

Les activités d'estimation renforcent le sens du nombre. La stratégie « prédire puis vérifier » aide les élèves à juger de la plausibilité d'un résultat avant de calculer. Par exemple : « La moitié de 700 est-elle plus proche de 300 ou de 500 ? Pourquoi ? » Encouragez l'utilisation de procédures différentes — constitution de groupements avec du matériel tels que les blocs, utilisation d'un tableau de numération, appui sur des repères connus en calcul mental — puis invitez les élèves à comparer l'efficacité de chaque procédure.

Les élèves peuvent créer leurs propres représentations visuelles de la division par deux à travers les puissances de dix, ou imaginer des situations de la vie quotidienne où la division par deux s'applique naturellement. Attention toutefois : ce principe ne s'applique pas aux mesures de durée, puisque la moitié d'une heure correspond à 30 minutes et non à 50 centièmes.

Cela renforce le lien entre calcul, interprétation et autocontrôle. Enfin, il est utile de mettre en relation la moitié avec d'autres concepts proches, tels que les quarts (la moitié de la moitié) ou les doubles, afin de développer un réseau de stratégies mentales flexibles et transférables.

Tâche 6a : Additionner et soustraire sans poser l'opération

a)	248 + 52 = ______
b)	637 + 99 = ______
c)	723 – 24 = ______
d)	453 – 99 = ______

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Additionner et soustraire mentalement, en utilisant des stratégies de compensation ou basées sur des nombres presque égaux, et la compréhension des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

La maîtrise des stratégies de calcul mental constitue une compétence essentielle pour la poursuite des apprentissages mathématiques. Elle permet aux élèves de développer une agilité avec les nombres, indispensable pour aborder des problèmes complexes à plusieurs étapes, s'initier à la pensée algébrique et entrer dans le raisonnement proportionnel. En réduisant la charge cognitive, ces stratégies rendent la résolution de problèmes plus efficace : les élèves peuvent alors se concentrer sur la compréhension du contexte, sur le choix des opérations pertinentes et le raisonnement mathématique.

Ces stratégies s'appuient sur la compréhension conceptuelle des nombres, de leurs relations et des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée, ainsi que sur les propriétés des opérations. Elles mobilisent le sens des nombres — par exemple lorsque les élèves voient que 248 + 52 peut être résolu en pensant « 248 + 2 + 50 » ou « (250 – 2) + (50 + 2) », ou encore que le calcul 637 + 99 devient plus simple sous la forme « 637 + 100 – 1 ». La capacité à réaliser rapidement des calculs mentaux grâce à des stratégies de compensation et d'estimation se révèle précieuse dans de nombreuses situations pratiques du quotidien.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Des erreurs de calcul peuvent apparaitre lorsque les élèves maîtrisent mal les stratégies de compensation ou en raison d'une charge cognitive excessive pour des calculs effectués sans noter de résultat intermédiaire. Ils peuvent, par exemple, reconnaître que 99 est proche de 100, mais oublier de corriger leur résultat final : ainsi, ils calculeraient 637 + 100 = 737 au lieu de 637 + 99 en oubliant de retirer 1. Des erreurs peuvent provenir d'un ajustement incorrect des nombres, comme confondre 248 + 52 avec 248 + 50, ou encore transformer à tort 723 – 24 en 723 – 20. Ces confusions montrent que, sans une compréhension solide des ajustements nécessaires, les stratégies de compensation peuvent devenir source d'erreurs plutôt que de soutien.

Les erreurs dans le choix d'une stratégie révèlent souvent des difficultés conceptuelles. Certains élèves appliquent des stratégies inadaptées — par exemple utiliser la compensation alors qu'une méthode plus simple serait plus efficace — ou ne repèrent pas des nombres proches de multiples de 10 ou de 100 alors que cela faciliterait le calcul. D'autres s'appuient sur des stratégies de comptage peu efficientes ou tentent de reproduire mentalement des techniques opératoires écrites, ce qui augmente la charge cognitive et peut conduire à des erreurs.

Une maîtrise insuffisante des propriétés des opérations peut empêcher les élèves de comprendre comment les ajustements modifient la position des chiffres. Par exemple, calculer 453 – 99 en soustrayant d'abord 100, puis en ajoutant 1, constitue une stratégie qui exige une compréhension solide des propriétés de la soustraction et de leurs effets sur les nombres.

Des élèves peuvent recourir à des méthodes de comptage pour des tâches qui nécessiteraient des stratégies plus efficaces — comme additionner 52 en sur-comptant à partir de 248, unité par unité, pour calculer 248 + 52. Des performances irrégulières, une réticence à utiliser le calcul mental ou le recours à la technique opératoire posée peuvent également être le signe de bases fragiles en ce qui concerne le sens des nombres.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Expliquez clairement la progression des compétences en calcul ainsi que leur dépendance vis à vis de la compréhension des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée. Utilisez des droites graduées pour illustrer les stratégies de compensation : par exemple, représenter 637 + 99 en avançant jusqu'à 737 (637 + 100) puis en reculant d'une unité ; représenter 453 – 99 en reculant jusqu'à 353 puis en avançant d'une unité. Les blocs en base dix, quant à eux, peuvent matérialiser les « nombres amis » qui interviennent dans les décompositions additives de 10. Ainsi, après avoir identifié que 2 et 8 sont de tels nombres car leur somme fait 10, l'addition 248 + 52 devient plus simple lorsqu'on la reformule sous la forme 250 + 50.

Apprenez aux élèves à repérer les « nombres proches » et à déterminer dans quelles situations les stratégies de compensation sont les plus pertinentes. Aidez-les à identifier les nombres proches de multiples de 10 ou de 100 (comme 99, 101, 98 ou 102). Enseignez explicitement les étapes de la compensation : repérer un nombre proche, choisir l'ajustement pertinent, effectuer le calcul simplifié, puis compenser correctement. Proposez des problèmes conçus pour illustrer ces structures numériques, tels que 248 + 52 (200 + 48 + 52 = 200 + 100), 637 + 99 (637 + 100 – 1 = 737 – 1) ou 723 – 24 (700 + 23 – 24 = 700 – 1). Encouragez-les à se poser ces questions : « Ces nombres sont-ils proches de multiples de 10 ou de 100 ? » et « Un ajustement pourrait-il simplifier le calcul ? ».

Faites le lien avec des situations réelles, par exemple : « La maitresse achète des livres pour 234 euros et un meuble pour les ranger à 199 euros. Combien a-t-elle payé ? » Progressez du simple au complexe : commencez par des ajustements simples, comme 37 + 19 = 37 + 20 – 1, avant d'aborder des nombres plus grands. Organisez des discussions autour des nombres pour permettre aux élèves de partager leurs stratégies et développer leur flexibilité avec les nombres. Invitez les élèves à expliquer leur démarche afin de repérer d'éventuelles conceptions erronées.

Tâche 6b : Faire du calcul mental en utilisant des zéros

a) 3 600 + 900 = _________

b) 56 000 + 8 000 = _______

c) 3 200 – 700 = ________

d) 54 000 – 5 000 =_______

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Maîtriser l'aspect positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée pour effectuer des calculs mentaux additifs et soustractifs avec des multiples de centaines et de milliers.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

Cette compétence permet à l'élève de se concentrer sur le raisonnement plutôt que sur le calcul, préparant ainsi à l'apprentissage des techniques opératoires posées. Les stratégies mentales facilitent l'estimation et la vérification. La maîtrise des calculs mentaux avec des centaines et des milliers reflète une compréhension solide des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée, essentielle pour travailler avec des nombres plus grands, avec des décimaux et pour entrer dans la pensée algébrique.

Lorsque les élèves calculent mentalement 3 600 + 900 ou 54 000 – 5 000, ils prennent conscience de la valeur de chaque chiffre et de l'impact des opérations sur cette valeur. Ces stratégies renforcent non seulement le calcul, mais aussi le sens des nombres. Accroitre la flexibilité, par exemple avec des calculs comme « 36 centaines + 9 centaines = 45 centaines » ou « 54 milliers – 5 milliers = 49 milliers », développe la compréhension des nombres. D'autres stratégies sont possibles : ajouter 900 en ajoutant 1000 – 100; retrancher 700 en retranchant 200 puis 500…

Enfin, la maîtrise des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée, avec des grands nombres, présente des applications pratiques dans la vie quotidienne des élèves, comme interpréter des données sur la population ou estimer des distances.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Les conceptions erronées sur les aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée constituent des obstacles conceptuels majeurs. Certains élèves traitent les chiffres de manière isolée, sans tenir compte de leur position dans l'écriture chiffrée du nombre. Par exemple, pour 3 600 + 900, ils peuvent additionner 3 + 9 et 6 + 0 séparément, obtenant ainsi un résultat incorrect comme 12 060, au lieu de comprendre que « 36 centaines + 9 centaines = 45 centaines ». Ils peuvent également transférer la technique opératoire de l'addition posée et calculer 6c + 9c = 15c et convertir ensuite en 1m5c, faisant ainsi intervenir l'aspect décimal.

Les élèves ont souvent du mal à percevoir que 54 000 représente 54 milliers, voyant les chiffres comme des entités isolées. Les erreurs liées au zéro apparaissent lorsque le rôle de marque-place du zéro (le zéro sert à repérer l'absence de certains groupements) n'est pas compris pour les grands nombres. Ils peuvent alors omettre ou ajouter des zéros de manière incorrecte, par exemple en calculant 56 000 + 8 000 comme 5 680 ou 640 000 au lieu de 64 000.

Lorsque les élèves tentent d'appliquer les techniques opératoires posées en colonnes, sans en comprendre le sens, cela entraîne des erreurs sur les chiffres ou les zéros. Par exemple, cela consisterait à considérer que 3 200 – 700 revient à « soustraire 7 de 3 » au lieu de comprendre qu'il s'agit de « 32 centaines – 7 centaines ».

Des erreurs surgissent également en raison d'une maîtrise insuffisante des faits additifs (tables d'addition). Par exemple, un élève peut répondre que 3 600 + 900 = 4 400 parce qu'il pense que 6 + 9 = 14 (et l'on observe des erreurs similaires pour les soustractions).

Les élèves qui donnent des réponses incorrectes révèlent des lacunes dans la compréhension des nombres et plus précisément des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée. Ceux qui évitent ces problèmes ou s'appuient sur des stratégies de comptage inefficaces manquent souvent de connaissances numériques, ce qui peut entamer leur confiance dans leurs compétences avec les nombres.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Les aides doivent favoriser à la fois la compréhension conceptuelle des aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée et la maîtrise du calcul. Les supports concrets permettent aux élèves de mieux appréhender la valeur de chaque chiffre dans les grands nombres. Par exemple, le matériel en base dix peut illustrer comment les milliers et les centaines se combinent : 3 600 + 900 peut être représenté par 36 « carrés de cent » plus 9 « carrés de cent », pour obtenir 45 « carrés de cent » et donc 4 500. Les droites graduées, en centaines ou en milliers, aident les élèves à visualiser les calculs et à comprendre l'ordre de grandeur.

L'utilisation d'un langage précis renforce la reconnaissance des structures numériques et la réflexion sur les nombres. Apprenez aux élèves à identifier les unités de numération : par exemple, 3 600 correspond à 36 centaines et 900 correspond à 9 centaines, donc 36 centaines + 9 centaines = 45 centaines, soit 4 500. Pour 54 000 – 5 000, insistez sur le raisonnement « 54 milliers – 5 milliers = 49 milliers » (en veillant à ce que les élèves soient capables d'effectuer mentalement 54 – 4). Le langage, en faisant le lien entre les nombres et les quantités, facilite le calcul mental.

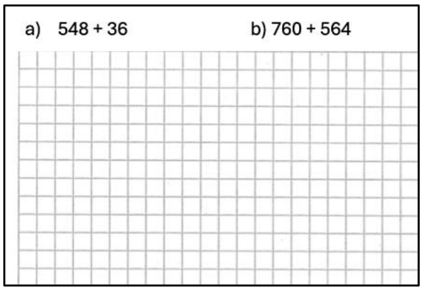
Le développement des compétences doit être progressif : commencez par des centaines avant de passer aux milliers puis augmentez graduellement la complexité. Proposez des séquences d'exercices mettant en évidence des structures numériques, par exemple comparer 36 + 9 = 45 avec 360 + 90 = 450 puis 3 600 + 900 = 4 500. Encouragez également l'estimation pour éliminer des résultats improbables, par exemple : « 3 600 est proche de 4 000, 900 est proche de 1 000, donc la somme devrait être proche de 5 000 ». Encouragez les élèves à vérifier leurs calculs en utilisant les opérations inverses (l'addition et la soustraction sont des opérations inverses).

Proposez également des solutions incorrectes et demandez aux élèves d'identifier et de corriger les erreurs. Des défis supplémentaires peuvent stimuler tous les élèves tout en renforçant la compréhension des concepts. Introduisez des problèmes comme 3 600 + 900 – 700 ou explorez des structures numériques comme : « 54 000 – 4 000 puis 54 000 – 5 000 ».

Tâche 7a : Additionner en posant l’opération

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Additionner en colonnes des nombres inférieurs à 1000



Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

En France, la maîtrise de la technique opératoire de l’addition posée constitue une compétence essentielle en mathématiques à l’école primaire. Cette technique fournit une stratégie fiable pour effectuer des calculs avec de grands nombres lorsque le calcul mental n’est pas suffisant, pour résoudre des problèmes additifs.

Lorsqu’elles sont enseignées de manière appropriée, les techniques opératoires renforcent la compréhension des écritures chiffrées des nombres et, plus précisément, l’aspect positionnel et l’aspect décimal de la numération écrite chiffrée. L’alignement des chiffres (aspect positionnel), les retenues (aspect décimal) et le sens des opérations contribuent à approfondir la compréhension des nombres. La maîtrise des deux aspects de la numération écrite chiffrée prépare les élèves à travailler avec les décimaux et avec les fractions. Ces techniques opératoires offrent également des mécanismes de vérification et des solutions alternatives de calcul. Les élèves qui combinent habilement le calcul mental et les techniques opératoires posées, peuvent choisir la stratégie la plus adaptée et vérifier leurs réponses par différentes approches.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Les erreurs liées à l‘aspect positionnel, se traduisant par un alignement incorrect des chiffres, constituent des obstacles majeurs à la justesse des calculs. Les élèves peuvent mal aligner les chiffres, par exemple en posant 548 + 36 avec le 6 sous le 4 au lieu du 8 (alignement des chiffres à gauche). Une compréhension insuffisante de l‘aspect positionnel (colonnes) peut entraîner des confusions lors de la constitution des groupements résultant des échanges dix contre un (aspect décimal) produisant des retenues. Les idées fausses sur les groupements apparaissent lorsque les élèves interprètent mal les échanges, par exemple en oubliant de reporter une retenue lorsque la somme dépasse neuf ou en reportant des valeurs incorrectes. Les erreurs avec les techniques opératoires surviennent lorsque celles-ci sont appliquées de manière inadéquate, par exemple en calculant de gauche à droite au lieu de droite à gauche ou en confondant les opérations. Certains élèves appliquent des règles en dehors de leur domaine de validité, comme reporter toujours 1 en retenue (règle correcte pour l’addition de deux nombres mais pas au-delà). Parmi les signes annonciateurs d’erreurs, on note des difficultés avec les nombres contenant des zéros (par exemple 760 + 564) et les réponses inappropriées, révélant un faible sens des nombres. Enfin, de nombreuses erreurs proviennent de la méconnaissance des tables d’addition.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Les représentations concrètes aident les élèves à comprendre les techniques opératoires posées. Le matériel en base dix permet de modéliser l’échange dix contre un lors de la constitution d’un groupement, en montrant par exemple comment 10 unités deviennent 1 dizaine dans le calcul de 548 + 36. Les tableaux de numération permettent de visualiser l’alignement des chiffres dans les colonnes, rang par rang, et de mieux comprendre le positionnement des chiffres.

Les unités de numération peuvent constituer un appui précieux pour les élèves. Par exemple, 548 + 36 peut être décomposé en (5c + 4d + 8u) + (3d + 6u). On regroupe alors les termes de même nature : 5c + (4d+3d) + (8u+6u) = 5c + 7d + 14u. Comme 14u=1d+4u, on obtient : 5c + 7d + 1d + 4u = 5c + 8d + 4u soit 584. La *tâche 11* évalue elle aussi les connaissances des élèves sur les unités de numération.

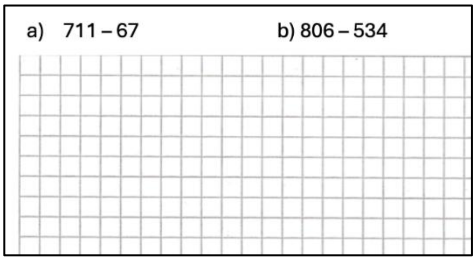
L'enseignement des techniques opératoires doit suivre une progression en lien avec les raisonnements mathématiques en jeu. Initiez les élèves à : travailler avec les unités de numération, faire des arbres à calcul puis passer à la pose en colonnes. Pour cela, plus précisément, il s'agit d'aligner les chiffres rang par rang, de commencer par le rang des unités, d'effectuer les sommes dans chaque rang et de poser une retenue si nécessaire. Utilisez un langage cohérent et encouragez-les à verbaliser leur raisonnement en utilisant le vocabulaire de la numération décimale (unités, dizaines, centaines) et en expliquant oralement les conversions d'unités effectuées (13 dizaines, c'est 1 centaine et 3 dizaines). Les exercices guidés incluant l'analyse d'erreurs permettent aux élèves d'identifier leurs idées fausses : par exemple, proposez 548 + 36 = 574 et discutez des raisons pour lesquelles ce résultat est incorrect. La progression doit aller du simple au complexe : commencez par des additions sans retenue, passez ensuite rapidement à une retenue unique, puis à des retenues multiples (afin d'éviter que des techniques erronées s'installent).

Par ailleurs, les problèmes concrets justifient le recours à l'opération et favorisent la compréhension conceptuelle. Des situations concrètes, comme : « Une école organise une marche sponsorisée. Les élèves de CE2 récoltent 548 € et ceux de CM1 36 €. Combien ont-ils récolté au total ? », aident les élèves à donner du sens aux calculs. Apprenez-leur à estimer avant de calculer et à vérifier leurs réponses à l'aide de l'opération inverse (l'addition et la soustraction sont des opérations inverses). Des activités complémentaires peuvent stimuler les élèves plus avancés tout en consolidant les concepts, par exemple en les confrontant à des problèmes en plusieurs étapes ou en explorant des méthodes avec des nombres plus grands ou en leur demandant d'expliquer leurs procédures.

Tâche 7b : Soustraire en posant l'opération

Compétence clé testée dans cette tâche

Soustraire en colonnes des nombres inférieurs à 1000



Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

En France, la maîtrise d'une technique opératoire de la soustraction posée constitue une compétence essentielle en mathématiques à l'école primaire. Les enseignants peuvent choisir la technique qu'ils privilégient : la technique par emprunt (cassage) ou celle par compensation (traditionnelle) mais ce choix doit être commun aux enseignants d'une même école. La technique choisie fournit une stratégie fiable pour effectuer des calculs avec de grands nombres lorsque le calcul mental n'est pas suffisant.

La technique de la soustraction par emprunt, également appelée soustraction par cassage, consiste à emprunter une unité du rang supérieur lorsque le chiffre du haut est plus petit que celui du bas dans une colonne. Prenons l'exemple 711 – 67. Au rang des unités, on ne peut pas effectuer 1– 7. On emprunte donc 1 dizaine : comme il n'y en avait qu'1, il en reste 0. Les unités deviennent 10u + 1u = 11u et l'on peut maintenant calculer 11– 7 = 4. Au rang des dizaines, on ne peut pas non plus effectuer 0 – 6. On emprunte alors 1 centaine : comme il y en avait 7, il en reste 6. Les dizaines deviennent 10d + 0d = 10d, ce qui permet de faire 10 – 6 = 4. Enfin, au rang des centaines, il reste à calculer 6 – 0 = 6. Le résultat final est donc 644. Cette technique présente l'avantage d'être facilement associée à des manipulations, car elle est cohérente avec le fonctionnement du matériel de numération. En revanche, elle peut devenir difficile à appliquer lorsque le nombre à soustraire comporte des zéros intercalés, ce qui complique les échanges nécessaires entre les unités, dizaines et centaines.

La technique de la soustraction par compensation, aussi appelée soustraction traditionnelle, repose sur la propriété de la conservation des écarts : l'écart entre deux nombres reste inchangé si l'on modifie ces deux nombres de la même manière, c'est-à-dire en leur ajoutant ou en leur retirant la même quantité. Dans cette technique, on exploite cette propriété de façon astucieuse en modifiant les deux nombres dont on cherche l'écart mais au même rang. Lorsqu'on ajoute 10 unités au premier nombre, on ajoute simultanément 10 au deuxième nombre, mais sous la forme d'une dizaine. Reprenons l'exemple 711 – 67. Au rang des unités, on ne peut pas effectuer 1 – 7. On ajoute donc 10 unités à 711 et 1 dizaine à 67. Les unités deviennent 10u + 1u = 11u, ce qui permet de calculer 11 – 7 = 4. Au rang des dizaines, on ne peut pas non plus effectuer 1 – 6, d'autant qu'il faut encore soustraire la dizaine ajoutée à 67. On ajoute alors 10 dizaines à 711 et 1 centaine à 67. Les dizaines deviennent : 10d + 1d – 6d – 1d = 4d. Enfin, au rang des centaines, il reste simplement à calculer 7 – 1 = 6. Et on obtient 644. Finalement, le calcul réellement effectué n'est pas 711 – 67 mais un autre calcul dont le résultat est identique : (711 + 10u + 10d) – (67 + 1d + 1c). Cette technique fonctionne avec tous les nombres, mais elle repose sur une propriété mathématique difficile à appréhender pour les élèves de l'école primaire, sauf à l'aide d'une droite graduée qui en facilite la compréhension.

Lorsqu'elles sont enseignées de manière appropriée, les techniques opératoires renforcent la compréhension des nombres, et plus précisément de l'aspect positionnel et de l'aspect décimal de la numération écrite chiffrée.

L'alignement des chiffres (aspect positionnel), les retenues (aspect décimal) et le sens des opérations contribuent à approfondir la compréhension des nombres. La maîtrise de l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée prépare les élèves à travailler avec les décimaux et avec les fractions. Ces techniques opératoires offrent également des mécanismes de vérification et des solutions alternatives. Les élèves qui combinent habilement le calcul mental et les techniques opératoires posées, peuvent choisir la stratégie la plus adaptée et vérifier leurs réponses par différentes approches, développant ainsi leur flexibilité en résolution de problèmes.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Les erreurs liées à l'aspect positionnel (alignement des chiffres) constituent des obstacles majeurs à la justesse des calculs. Les élèves peuvent mal aligner les chiffres, par exemple en posant 711 – 67 avec le 6 sous le 7 au lieu du 1 des dizaines (alignement des chiffres à gauche). Une compréhension insuffisante de l'aspect positionnel (colonnes) peut entraîner des confusions lors de la gestion des retenues (aspect décimal).

Parmi les erreurs observées, certains élèves, cherchant à éviter les retenues, soustraient systématiquement le plus petit chiffre du plus grand, sans tenir compte de leur position. Cela révèle une confusion sur le sens même de la technique de la soustraction et sur le rôle des rangs.

Pour la technique opératoire de la soustraction par emprunt (cassage), les élèves peuvent oublier des retenues lorsque le chiffre supérieur est plus petit, à emprunter dans les mauvaises colonnes, à ne pas décrémenter après avoir emprunté, ou à tenter de reporter les retenues dans la soustraction comme dans l'addition. Des difficultés surviennent avec les nombres contenant des zéros (par exemple 806 – 534), ce qui entraîne des échanges manqués, des zéros perdus ou des chiffres supérieurs inchangés après l'emprunt.

Pour la technique opératoire de la soustraction par compensation (traditionnelle), les idées fausses sur les retenues peuvent amener les élèves à oublier des retenues lorsque le chiffre supérieur est plus petit, à ne pas appliquer correctement la propriété de la conservation des écarts (par exemple, ajout de 10 unités au nombre initial mais oubli de retirer 1 dizaine au nombre à soustraire). Des difficultés apparaissent lorsque la propriété de la conservation des écarts est à appliquer plusieurs fois au cours d'une même soustraction (par exemple, pour calculer 8 321 – 413, le traitement consiste à transformer en (8 321+10+1 000) – (413+10+1 000) qui est égal à (8 321+10u+10c) – (413+1d+1m)).

Des erreurs avec la technique opératoire se produisent lorsque les élèves appliquent incorrectement les algorithmes, par exemple en travaillant de gauche à droite au lieu de droite à gauche, en mélangeant les étapes d'addition et de soustraction ou en manipulant mal les chiffres (qu'il s'agisse des chiffres empruntés ou des retenues). Les signes annonciateurs peuvent être des difficultés avec les nombres contenant des zéros, le recours au décomptage au lieu du travail en colonnes, le traitement incohérent de problèmes similaires, l'anxiété liée à l'alignement des colonnes et l'absence d'estimation pour vérifier les résultats. Enfin, de nombreuses erreurs proviennent de la méconnaissance des tables d'addition.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Les représentations concrètes aident les élèves à comprendre les techniques opératoires pour la soustraction. Utilisez des blocs en base dix ou des compteurs pour modéliser les échanges, en montrant comment 1 dizaine devient 10 unités lorsque le chiffre supérieur est plus petit (par exemple, dans 806 − 534, échangez 1 dizaine pour compléter la soustraction dans le rang des unités). Les tableaux de numération permettent de visualiser l'alignement des colonnes, rang par rang, et de mieux comprendre le positionnement des chiffres. Les décompositions additives en ligne, peuvent faire du lien entre des stratégies reposant sur le calcul mental réfléchi et des stratégies axées sur les techniques opératoires écrites, en montrant comment 806 − 534 correspond à (800 + 0 + 6) − (500 + 30 + 4) et où se produisent les échanges.

L'enseignement des techniques opératoires doit suivre une progression en lien avec les raisonnements mathématiques en jeu. Enseignez aux élèves à : aligner les chiffres selon leur position, commencer par la colonne des unités, comparer les chiffres, gérer des retenues si nécessaire, effectuer la soustraction de la colonne, inscrire le résultat et ajuster la colonne suivante en fonction de la retenue. Préférez le terme « casser » plutôt que « emprunter » et encouragez les élèves à verbaliser leur raisonnement. Les exercices guidés avec analyse des erreurs permettent aux élèves d'identifier et de corriger leurs idées fausses. Par exemple, présentez une solution incorrecte à 711 − 67 où l'élève soustrait systématiquement le plus petit chiffre du plus grand, puis discutez pourquoi un calcul correct donne 644. La progression doit aller du simple au complexe : commencez par des soustractions sans retenue, puis progressez rapidement vers des opérations avec retenue dans une ou plusieurs colonnes, incluant des retenues en chaîne et des zéros (par exemple, *1 200 − 487*).

Par ailleurs, les problèmes concrets justifient le recours à l'opération et favorisent la compréhension conceptuelle. Des situations concrètes, comme : « Un cinéma compte 760 places et 564 billets sont vendus. Combien de places restent disponibles ? », aident les élèves à donner du sens aux calculs. Apprenez-leur à estimer avant de calculer (par exemple, 806 − 534 devrait se situer entre 200 et 300) et à vérifier leurs réponses à l'aide de l'opération inverse (l'addition et la soustraction sont des opérations inverses). Des activités complémentaires peuvent stimuler les élèves plus avancés tout en consolidant les concepts, par exemple en les confrontant à des problèmes en plusieurs étapes ou en explorant des méthodes avec des nombres plus grands ou en leur demandant d'expliquer leurs procédures.

Tâche 8 : Résoudre un problème additif

Tom a 35 ans.

Il a 4 ans de plus qu'Anna.

Quel est l'âge d'Anna ?

Mon calcul :

Ma réponse : Anna a _______ ans.

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Résoudre un problème additif de comparaison de mesures avec recherche d'une mesure dans le sens inverse de la comparaison.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

Ce problème relevant des structures additives/soustractives (il peut en effet se résoudre par une addition) est un problème arithmétique à une étape, sans donnée inutile et proposé dans un contexte qui devrait être familier des élèves (les âges). Il s'agit d'un problème de comparaison de mesures dans lequel il faut rechercher la mesure dans le sens inverse de la comparaison, ce qui rend le problème plus complexe que s'il fallait trouver la comparaison (Anna a 31 ans et Tom 35 ans. Combien d'années ont-ils d'écart ?) ou la mesure dans le sens la comparaison (Tom a 35 ans. Anna a 4 ans de moins que Tom. Quel est l'âge d'Anna ?). Les problèmes additifs/soustractifs de comparaison ne sont pas les premiers types problèmes additifs/soustractifs travaillés à l'école ; dès la maternelle les élèves travaillent davantage sur des problèmes de partie/partie/tout (avec recherche du tout ou de la partie) et sur des problèmes de transformation (en particulier avec la recherche de l'état final ou de la transformation).

La lecture du texte par l'enseignant permet de s'assurer que les élèves qui rencontreraient des difficultés de lecture ne sont pas désavantagés. Savoir résoudre un tel problème demande de comprendre la situation évoquée par l'énoncé, trouver une opération modélisant le problème et permettant de le résoudre (ici une addition à trou ou une soustraction), produire le résultat du calcul et l'interpréter au regard de la situation à l'aide d'une phrase réponse. Dans *la tâche 8*, l'élève a seulement à compléter la phrase déjà écrite. Même si certains élèves sont capables de donner le résultat sans produire d'opération (en décomptant par exemple), il est attendu, à ce niveau scolaire et dans le test, qu'ils puissent produire une opération quand on leur demande. La *tâche 8* évalue ainsi si l'élève est capable de modéliser le problème avec une soustraction (35-4) mais aussi d'effectuer le calcul (½ point est prévu pour l'opération et ½ point pour le résultat).

Proposé dans un contexte familier des élèves (les âges), le problème évalue ainsi une compétence clé autour de la résolution de problèmes, plus spécifiquement autour du sens accordé à la soustraction dans le cas d'un problème additif de comparaison. Cette tâche est complémentaire avec la *tâche 14* dans laquelle l'élève doit, entre autres, reconnaitre la soustraction comme opération permettant de traiter un problème additif de transformation d'état avec recherche de l'état final. Aucun problème de partie/partie/tout avec recherche d'une des parties n'est proposé dans le test DiToM à ce niveau scolaire afin d'évaluer un autre sens de la soustraction.

A quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on s'attendre avec cette tâche ?

Les problèmes de comparaison de mesures dans lesquels il faut rechercher la mesure dans le sens inverse de la comparaison sont des problèmes difficiles : l'élève doit à la fois comprendre la relation de comparaison (« de plus que ») mais aussi considérer la comparaison en sens inverse. Dans ce cas, la présence de l'expression « de plus que » peut amener l'élève à utiliser une addition, qui peut se traduire soit :

- par l'expression (erronée) 35 + 4, qui peut traduire une compréhension erronée de la situation, voire une démarche superficielle basée uniquement sur la traduction de « de plus que » par une addition (sans que l'élève ne se pose de question),

- par une écriture à trou de la forme : 35 = 4 + …. L'élève peut dans ce cas donner le résultat en procédant par décomptage à partir de 35 (les nombres choisis le permettent), mais plus difficilement par surcomptage à partir de 4. Certains élèves peuvent produire une addition à trou sans par la suite être capable d'écrire une soustraction ou sans en éprouver le besoin (ce qui se traduit par un résultat correct reporté dans la phrase réponse mais sans écriture de la soustraction).

Les élèves qui utiliseraient une multiplication ou une division pour résoudre ce problème n'ont pas reconnu un modèle additif. On peut supposer que face un problème ils adoptent des démarches superficielles les conduisant à choisir une opération sans chercher à comprendre la situation ou encore à s'assurer que le résultat obtenu peut être réellement celui de l'âge d'une personne.

Au-delà des erreurs liées au choix de l'opération, des erreurs de calcul peuvent apparaître, même si les nombres choisis ici sont assez simples ; ces erreurs conduiraient à des réponses du type 35-4 = 32 par exemple.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Afin de proposer des soutiens adaptés pour les élèves qui ne réussissent pas cette tâche, il est essentiel de déterminer le type de difficulté qu'ils rencontrent :

- non reconnaissance d'une situation additive : il est possible de proposer d'autres situations de comparaison qui peuvent être représentées avec des objets (des billes ou des jetons par exemple). Il est nécessaire de travailler d'abord avec des problèmes de comparaison dans lesquels on recherche une des mesures dans le sens de la comparaison ; il est également important que les élèves puissent anticiper la réponse en lien avec la comparaison (la mesure recherchée est-elle plus grande ou plus petite que celle connue ?) afin de s'assurer qu'ils ont bien compris la situation.
- écriture d'une soustraction : si les élèves sont capables de produire une addition à trou mais pas une soustraction, il est possible de retravailler la soustraction dans des problèmes de partie-partie-tout (avec recherche d'une des parties) ou de transformation pour lui redonner du sens, indépendamment des problèmes de comparaison.
- calcul de la différence : il s'agit dans ce cas de renforcer la connaissance des faits additifs par des exercices réguliers autour des tables d'addition. Si l'élève a procédé par décomptage, il est nécessaire de s'assurer qu'il procède correctement (en particulier qu'il ne considère pas 35 comme le décomptage d'une première unité, ce qui conduirait à la réponse 32).

Les questions lors d'échanges oraux avec l'élève peuvent permettre non seulement de comprendre sa démarche mais aussi d'orienter l'élève dans la modélisation du problème, par exemple : « Qui est le plus âgé ? », « L'âge d'Anna devrait-il être supérieur ou inférieur à celui de Tom ? », etc. Il est également possible de demander aux élèves d'écrire des énoncés de problèmes qui utilisent l'expression « de plus que » et qui se résolvent à l'aide du calcul 35 - 4.

De façon générale, pour éviter que les élèves ne se représentent la résolution de problèmes comme un simple exercice de calcul où ils doivent produire une opération avec les nombres en jeu, il est nécessaire de leur proposer des problèmes qui ne se résolvent pas en combinant les nombres en jeu en une seule opération (ce peut être des problèmes avec des données inutiles ou des problèmes « pour chercher » qui demandent par exemple des étapes). Il est également nécessaire de leur apprendre à contrôler leurs résultats. Par exemple, en pensant à un ordre de grandeur en lien avec le contexte (dans notre cas, l'âge d'une personne ne dépassera pas 120 ans), en se référant à la situation (l'âge d'Anna ne peut pas être plus grand que celui de Tom) ou encore en reformulant le problème (si Anna a 31 ans et que Tom a 4 ans de plus, a-t-il 35 ans ? ». Ce dernier type de contrôle renforce l'idée que l'addition et la soustraction sont des opérations inverses.

Tâche 9 : Multiplier avec les tables de multiplication

a) 6 x 1 = ____
b) 10 x 8 = ____
c) 8 x 4 = ____
d) 7 x 9 = ___
e) 9 x 0 = ___
f) 7 x 5 = ___

Compétence clé évaluée dans cet exercice

Connaitre les produits dans les tables de multiplication de 0 à 10.

Pourquoi cette compétence est-elle *essentielle* ?

Les tables de multiplication font partie des faits numériques de base. Connaitre les tables de multiplication signifie à la fois déterminer le produit de deux nombres inférieurs à 10 (par exemple 4 × 6 = 24), décomposer un nombre sous la forme d'un produit (24 = 6 × 4), déterminer un des facteurs connaissant le produit et l'autre facteur (6 × … = 24) (cf. *Tâche 10)* ou même trouver tous les facteurs menant à un produit (24=… x …). Maitriser l'ensemble des résultats des tables de multiplication avec des facteurs allant jusqu'à 10 est nécessaire pour pouvoir mener des calculs plus complexes, tels que la multiplication de nombres à deux chiffres, la division, mais aussi pour travailler avec des fractions (réduction au même dénominateur, opérations).

En France, il est attendu en fin de CM1, début de CM2 que les élèves connaissent de façon automatisée l'ensemble des résultats des tables de multiplication, c'est-à-dire qu'ils soient capables de les donner en un temps limité (sans passer par la reconstruction de certains résultats à partir d'autres déjà connus). Il est donc important de limiter le temps pour réaliser cette tâche afin de savoir si l'élève a une connaissance automatisée ou non de ces résultats, mais cette limite de temps n'est à imposer que tardivement, après un apprentissage qui va permettre de reconstruire les tables à partir de faits numériques connus (par exemple on peut trouver les produits de la table des 4 à partir du double de ceux de la table des 2).

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Le résultat d'une table peut être considéré comme automatisé s'il est produit de manière fiable et rapide sans réflexion supplémentaire, soit par récupération directe dans la mémoire à long terme, soit par déduction rapide et quasi automatique (par exemple, si un élève ne pense pas spontanément à 18 pour 9 × 2, mais pense d'abord à 2 × 9 afin d'arriver au résultat correct en échangeant les facteurs dans un délai minimal). On peut noter qu'un test papier-crayon ne peut pas fournir d'informations fiables sur l'automatisation des résultats. Dans la littérature, le délai maximal pour attester que l'on maitrise un fait numérique de base est généralement fixé à 3 secondes. Cependant, il faut tenir compte du fait que, dans le test DiToM, les élèves doivent d'abord lire les calculs, puis écrire les réponses. D'où le temps imparti de 30 secondes pour les 6 calculs.

Donner les résultats justes pour les 6 calculs pendant ce temps imparti ne devrait généralement pas poser de difficulté aux élèves qui les ont automatisés. Cependant, un élève peut ne pas réussir à répondre à tous les calculs en 30 secondes parce qu'il travaille globalement plus lentement, qu'il est distrait, qu'il rencontre des difficultés à écrire, etc. Par ailleurs, il est possible qu'un élève n'ait effectivement pas automatisé les six résultats, mais qu'il puisse néanmoins les donner en 30 secondes. Par exemple, il peut trouver certains résultats mémorisés et d'autres en comptant ou en calculant rapidement à partir d'un autre résultat connu de la table. La *tâche 12* vise donc à déterminer si les élèves maitrisent certains résultats des tables de multiplication, ni plus, ni moins, et le résultat de l'évaluation n'a de sens que si le délai imparti pour la réalisation est respecté. Vous trouverez dans le manuel de passation du test des conseils pour y parvenir sans stresser les élèves et sans frustrer ceux qui ne terminent pas toutes les tâches dans le temps imparti.

Outre les non-réponses dues au manque de temps, il existe deux principaux types d'erreurs :

- les erreurs de rappel, qui se produisent lorsque l'élève se souvient spontanément d'un résultat incorrect (« se souvient mal »). Ces erreurs concernent souvent les résultats d'autres opérations de multiplication, telles que 5 × 6 = 54, 2 × 9 = 40 et 10 × 7 = 27 ;
- les erreurs telles que 6 × 5 = 35, qui peuvent probablement s'expliquer par le fait que l'élève compte de cinq en cinq et fait soit un pas de trop comme dans 6 x 5 = 35, soit un pas de moins (6 x 5 = 25).

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Pour aider les élèves qui rencontrent des difficultés avec les résultats des tables de multiplication, il est essentiel de s'assurer d'abord que les élèves ont construit le sens de la multiplication à partir de l'addition itérée et qu'ils ont pu observer que la multiplication est commutative (pour utiliser le fait que 3 × 5 = 5 × 3) et associative (par exemple pour multiplier par 4, on pourra multiplier par 2 et encore par 2 : 7 × 4 = 7 × 2 × 2).

Les approches didactiques actuelles recommandent de ne pas travailler les tables de multiplication sous forme de séries isolées (par exemple, les dix résultats de 1 × 4 à 10 × 4 formant la table du 4, les dix résultats de 1 × 6 à 10 × 6 formant une autre table, et ainsi de suite), et de ne pas se concentrer sur la mémorisation pure.

Il convient plutôt d'essayer d'abord de maîtriser les résultats des tables de 2, 5 et 10, puis de développer des stratégies à l'aide desquelles les élèves peuvent retrouver tous les résultats à partir des opérations de base (par exemple, 9 × 7 à partir de 10 × 7, ou 6 × 8 à partir de 5 × 8, etc.). L'automatisation ciblée de tous les résultats est ensuite facilitée par le fait que les élèves peuvent retrouver certains résultats en utilisant des résultats déjà mémorisés ainsi que des stratégies basées sur les relations entre les différents calculs. Cela repose sur une bonne compréhension conceptuelle de la multiplication.

Tâche 10 : Diviser avec les tables de multiplication

a) 80 = 10 × ____

b) 6 = 6 × ____

c) 28 = 4 × ____

d) 72 = 9 × ____

e) 30 = 5 × ____

f) 7 = 1 × ____

Compétence clé évaluée dans cette tâche

Mobiliser des tables de multiplication de 0 à 10 dans des multiplications à trou : trouver un des facteurs connaissant le produit et l'autre des facteurs.

Pourquoi cette compétence est-elle *essentielle* ?

Comme expliqué dans la *tâche 9*, connaitre les tables de multiplication signifie à la fois déterminer le produit de deux nombres inférieurs à 10, décomposer un nombre sous la forme d'un produit et déterminer un des facteurs connaissant le produit et l'autre facteur ; c'est cette dernière compétence qui est évalué dans cette tâche. La connaissance automatisée d'un des facteurs connaissant le produit est particulièrement nécessaire pour traiter les calculs de division, mais elle sera également nécessaire pour travailler avec des fractions.

En France, il est attendu en fin de CM1 - début de CM2, que les élèves connaissent de façon automatisée l'ensemble des tables de multiplication, c'est-à-dire qu'ils soient capables de les donner en un temps limité. Comme pour la *tâche 9*, il est donc important de limiter le temps pour réaliser cette tâche afin de savoir si l'élève a une connaissance automatisée ou non de ces résultats.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Outre les non-réponses dues au manque de temps, les deux principaux types d'erreurs qui avaient été décrits dans la *tâche 9* peuvent se retrouver dans celle-ci :

- les erreurs de rappel, qui se produisent lorsque l'élève se souvient spontanément d'un résultat incorrect (« se souvient mal »). Ces erreurs concernent souvent les résultats d'autres opérations de multiplication ; par exemple, pour les calculs que nous avons donnés, 28 = 4 × 6 ou 72 = 9 × 7 ;
- les erreurs telles que 30 = 5 × 7, qui peuvent probablement s'expliquer par le fait que l'élève compte de cinq en cinq et fait soit un pas de trop soit un pas de moins.

Dans le cas des opérations à trou, les élèves peuvent également effectuer l'opération qui est indiquée, par exemple calculer 6 × 6 pour compléter 6 = 6 × ….

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Les propositions faites pour la *tâche 9* restent adaptées pour soutenir les élèves ne réussissant pas cette tâche. Il est également important que les élèves aient rencontré des problèmes de division (partage ou groupement) afin de comprendre la signification de chacun des facteurs en lien avec le produit dans un problème (par exemple, « combien de paquets de 4 billes peut-on faire avec 28 billes » et « combien de billes mettre dans un paquet si je peux répartir 28 billes en 4 paquets »). Ces problèmes peuvent être modélisés à partir d'une multiplication à trou et à partir d'une division.

Un travail régulier autour de la maitrise des différents résultats des tables de multiplication est nécessaire pour savoir comment retrouver certains résultats puis pour les automatiser.

Tâche 11 : Calcul mental : traiter les zéros

a) 7 × 5 000 = ________

b) 50 × 20 = _________

c) 60 000 ÷ 100 = _____

d) 3 000 ÷ 5 = ________

Compétence clé évaluée dans cet exercice

Effectuer mentalement des multiplications et des divisions avec des nombres qui sont des multiples de dix, cent, mille, etc.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

Une bonne compréhension des aspects décimal et positionnel sous-tendant les écritures chiffrées constitue la base de la compréhension des procédures de calcul mental avec des nombres qui sont des multiples de dix, cent, mille, etc. (et, plus tard, des nombres décimaux). Être capable d'effectuer mentalement ce type de calcul est important car cela permet d'estimer l'ordre de grandeur d'un résultat et donc d'anticiper pour éventuellement contrôler certains résultats (par exemple, au lieu de calculer 7 × 4957 on peut calculer 7 × 5000 en faisant 7 × 5 milliers, et obtenir 35 000 comme ordre de grandeur).

Si un nombre se termine par un zéro, les calculs peuvent être effectués en utilisant le nombre entier des dizaines, en s'appuyant sur la connaissance des nombres plus petits. Si le nombre se termine par deux zéros, les calculs sont effectués sur les centaines ; avec trois zéros, sur les milliers, et ainsi de suite. Par exemple, 7 × 5 000 est 7 fois 5 mille, ce qui donne 35 mille, écrit 35 000. On peut également le décomposer en 7 × 5 × 1000 afin de calculer mentalement avec de grands nombres.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Le raisonnement avec des unités de numération (dizaines, centaines, milliers, etc.) peut être automatisé en manipulant les zéros avec des règles du type « lorsque l'on multiplie par 100, on ajoute 2 zéros ». Cependant, cette règle peut produire des résultats incorrects, par exemple ajouter 3 zéros lorsque l'on multiplie par 100 (parce qu'il y a trois chiffres). Des erreurs plus fréquentes apparaissent lorsque la règle est appliquée aux nombres décimaux. Par exemple, donner 2,30 ou 20,3 comme résultat du calcul 2,3 × 10. Il est donc important de ne pas automatiser les règles des « zéros » sans en comprendre les fondements (cf. partie suivante dédiée aux types de soutien).

Des erreurs de calcul liées à la connaissance des tables de multiplication peuvent également apparaitre (par exemple 7 × 5 =30 ou 30 ÷ 5 = 7). Ces éventuelles erreurs peuvent être mises en perspective avec les résultats fournis dans les *tâches 9 et 10* sur la connaissance des tables et plus particulièrement de 7 × 5 =… et de 30 = 5 × …

L'absence de réponse peut indiquer que l'élève tente d'effectuer les opérations mentalement, comme il le ferait sur papier (DiToM-Tâche 7) en posant le calcul. Cette technique n'est pas le sujet ici, elle est plus difficile à appliquer et propice à des erreurs. Aucune limite de temps n'est donnée pour cet exercice, mais il est cependant important de repérer les élèves qui poseraient les calculs pour cette tâche et de travailler avec eux les procédures de calcul mental.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Comme indiqué précédemment, la compréhension des règles des « zéros » est primordiale pour éviter des erreurs, en particulier sur les décimaux. Il est donc préférable d'expliquer les résultats en passant par des formulations du type « 7 × 5 000, c'est 7 fois 5 mille, ce qui donne 35 mille et s'écrit 35 000 ».

Si un élève éprouve des difficultés autres que celles liées à la connaissance des faits numériques, il est recommandé de procéder à une évaluation plus complète de ses connaissances sur les des deux aspects du système décimal (cf. aussi *tâches 2 et 3a*):

- l'aspect décimal, qui consiste à reconnaître qu'une unité de numération (unité simple, dizaine, centaine, etc.) d'un certain rang vaut dix fois celle du rang inférieur : 10 unités simples = 1 dizaine ; 10 dizaines = 1 centaine ; 10 centaines = 1 millier, et ainsi de suite.
- l'aspect positionnel : l'ordre des chiffres fournit des informations sur les unités de mesure en question. Ainsi, si « 2 dizaines et 3 unités » fait référence à un nombre, seul « 23 » représente ce nombre, tandis que « 32 » fait référence à « 3 dizaines et 2 unités ». Vous trouverez des instructions sur la manière de procéder à l'adresse https://padlet.com/frederick_tempier/numerationdecimale-la0yr0317fhb

En fonction des résultats, il peut être nécessaire de retravailler avec l'élève sur la compréhension du principe de groupement par dix ; les exercices dans lesquels l'élève forme des groupes « de dix » (dix unités, dix dizaines, etc.) avec du matériel approprié sont importants à cet égard. Il convient de se concentrer également sur des exercices spécifiques si nécessaire, comme dans les *tâches 3, 6* et *7* du test DiToM (des propositions d'aides ont été spécifiées lors de l'analyse de ces tâches).

De courts exercices peuvent ensuite être donnés quotidiennement, en suivant une progression didactique basée sur l'aspect décimal et sur l'aspect positionnel. Vous pouvez commencer par des nombres à deux chiffres avec des unités (u) et des dizaines (d) simples. Par exemple, en demandant à l'élève d'écrire en chiffres les nombres : 3d 2u ; 3d ; 5u ; 4u 2d ; 4d 13u ; 15u 3d ; 35u 2d. Pour 15u 3d, la procédure attendue n'est pas un calcul ($15 \times 1 + 3 \times 10$), mais la suivante : puisque 15u est 10u 3u, alors 15u est 1d 5u (car 10u = 1d), nous obtenons donc 1d 5u 3d, soit 5u 4d, écrit « 45 » (ce type d'écriture, 5u 4d, ayant été travaillé en amont). Pour les nombres à trois chiffres, l'égalité 10d = 1c s'applique également. Nous pouvons considérer la progression suivante : 5c 3d 2u ; 6c 4u 2d ; 1c 2u ; 3c 15u ; 2c 4d 23u ; 3c 15u 3d ; 2c 14d 1u ; 4u 21d 2c ; 2c 14d 13u ; 21d 15u 3c ; 5c 9d 12u, et ainsi de suite. Le travail se poursuit avec des nombres à quatre chiffres, puis d'autres plus tard. Comme toujours, il est important d'aider les élèves à progresser vers la résolution de tels problèmes sans matériel, en s'appuyant sur leurs expériences antérieures avec des actions matérielles et en leur demandant régulièrement de verbaliser leurs actions. Vous trouverez des conseils didactiques sur le site : https://padlet.com/frederick_tempier/numerationdecimale-la0yr0317fhb

Tâche 12 : utiliser le signe ×

Compétence clé évaluée dans cette tâche

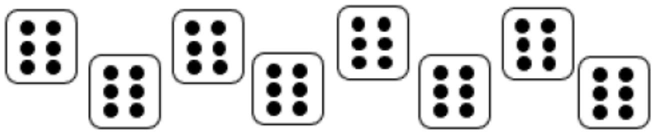
Utiliser le signe × dans une situation multiplicative.

Pourquoi cette compétence est-elle essentielle ?

On cherche le nombre total de points qu'il y a sur les dés.

Ecris la multiplication qui permet de trouver ce nombre.

Il n'est pas nécessaire de donner le résultat.



Mon calcul : ....

La tâche consiste à reconnaître une situation multiplicative (huit ensembles de six points chacun) et à produire une expression arithmétique (8 × 6 ou 6 × 8) sans calculer le résultat. Plus précisément, elle nécessite une traduction au-delà de la notation arithmétique de l'addition itérée (6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6) pour produire une notation arithmétique correspondant à la multiplication (8 × 6). Précisons que la consigne demande à l'élève « d'écrire la multiplication qui permet de trouver le nombre total de points » ; l'initiative laissée à l'élève pour reconnaitre l'opération est donc minime.

Cette tâche est fondamentale car elle nécessite de reconnaître une situation multiplicative dans le cas d'une situation additive de recherche du tout avec des collections qui ont toutes la même quantité (ici 6 points). Percevoir l'addition itérée comme une multiplication est nécessaire pour :

- comprendre la signification du mot « fois » (« 32 fois 100 » = 100 + 100 + 100… + 100 (32 termes))
- construire des résultats des tables de multiplication à partir d'autres connus (7 fois 5 = 6 fois 5 plus 5) et plus généralement comprendre la distributivité (13 fois 5 équivaut à 10 fois 5 plus 3 fois 5, ce qui peut être calculé à l'aide d'additions itérées)
- comprendre les règles basées sur la notation décimale lorsqu'on multiplie un nombre de dizaines ou de centaines par un entier donné (32 fois cent correspond à 32 centaines).

En revanche, la compréhension de la multiplication comme addition itérée ne permet pas directement d'accéder à la propriété de commutativité (difficile d'expliquer que 5 × 6 = 6 × 5 en passant par des additions itérées), ni à celle d'associativité ((5 × 2) × 3 = 5 × (2 × 3)). L'addition itérée ne permet pas non plus de comprendre la signification d'une multiplication entre deux nombres décimaux non entiers. Enfin, les différents sens qui peuvent être attribués à la multiplication ne sont pas tous évalués dans ce test DiToM ; en particulier, il ne figure pas de problème multiplicatif de comparaison ni de type produit cartésien, comme *« Une poupée est livrée avec 4 pantalons différents et 12 tee-shirts différents. De combien de façons est-il possible d'habiller la poupée ? »*.

Enfin, cette tâche permet d'évaluer la flexibilité des connaissances de l'élève dans le passage d'une représentation à une autre nécessitant un changement de registre. Plus précisément, il s'agit de passer d'une représentation iconique (six ensembles de points dessinés sous la forme de constellation du six) à une représentation dans le registre des expressions arithmétiques.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Lorsque la situation n'est pas comprise :

- Réponse incorrecte 8 : les 8 ensembles de 6 points chacun peuvent être identifiés globalement, mais sans percevoir que chaque ensemble contient lui-même 6 points.
- Réponse incorrecte 6 : les 6 points de la constellation de six dans un dé pourraient être perçus sans tenir compte des 8 dés.

Lorsque l'élève procède par comptage :

- Réponse correcte 48 : l'élève peut utiliser une procédure de comptage pour compter 48 points.
- Réponses incorrectes 47 ou 49 ou autres : l'élève peut commettre une erreur de comptage compte tenu des nombres impliqués et du temps limité alloué pour accomplir la tâche.

Lorsque le problème est perçu comme étant un problème additif mais pas multiplicatif :

- Réponse correcte inattendue 6+6+6+6+6+6+6+6 : obtenue en considérant qu'il y a 8 dés et que chaque dé est une constellation de 6 points.
- Réponse correcte inattendue 8+8+8+8+8+8 : obtenue à partir d'une constellation de 6 points et, pour chaque point, en considérant qu'il y en a 8, puisqu'il y a 8 ensembles de six points chacun.

Ces réponses, bien que correctes, peuvent montrer que l'élève reconnait un problème de réunion de 8 collections avec recherche du tout mais ne le considère pas comme un problème multiplicatif

- Réponses incorrectes 6+6+6+6+6+6+6 ou 6+6+6+6+6+6+6+6+6 : le nombre d'itérations peut être incorrect. Cela peut être du à une erreur de comptage dans le nombre de points ou de dés.

Lorsque le problème multiplicatif est perçu :

- Réponses correctes 8×6 ou 6×8 : l'élève traduit par multiplication qu'il y a 8 ensembles de six points chacun.
- Contrairement à d'autres pays européens, les programmes scolaires français ne font pas de distinction entre les significations attribuées à ces deux notations. Les élèves français peuvent donc utiliser soit 8 × 6, soit 6× 8 pour exprimer 8 ensembles de six points chacun.
- Réponses incorrectes 7 × 6, 6 × 6 ou 9 × 6 : le nombre d'occurrences correspondant au nombre de dés avec les six constellations peut être incorrect (erreur de comptage par exemple).

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

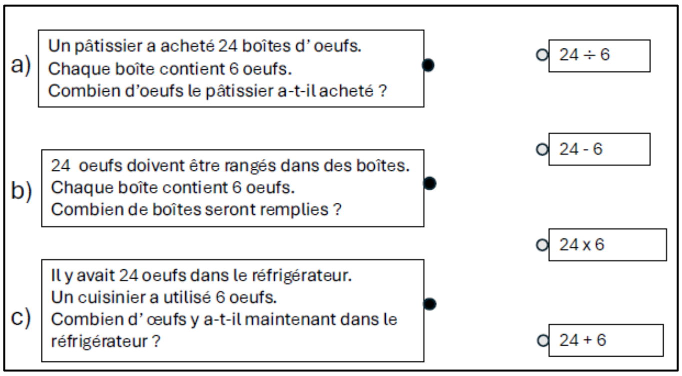
Les soutiens doivent être proposés en fonction du type de difficulté rencontré et du type d'erreur.

Pour les élèves ayant rencontré des difficultés dans le dénombrement des objets ; on peut supposer aisément qu'elles proviennent d'erreurs dans l'énumération des collections (un dé ayant pu être compté deux fois ou oublié). Nous supposons qu'à ce niveau scolaire les élèves reconnaissent la constellation du six. Un travail spécifique sur l'organisation de collections pour énumérer les éléments, en lien avec des procédures de comptage, peut être mené.

Pour les élèves qui ne reconnaissent ni un problème additif, ni un problème multiplicatif, on peut supposer que la situation n'est pas comprise ou que le sens des signes opératoires + et × n'est pas compris. Dans ce cas, il est nécessaire de revenir au sens de l'addition en proposant des problèmes de réunion (partie/partie/tout) avec recherche du tout. Un appui sur des manipulations avec du matériel tangible est recommandé.

Enfin, pour les élèves qui reconnaissent un problème additif mais pas multiplicatif, il est important de travailler avec le sens de la multiplicatif et de (ré)-introduire le symbole × en lien avec le sens attribué au mot « fois » dans la langue française. D’autres situations similaires peuvent être proposées ; il sera aussi important de proposer des problèmes conduisant à des collections qui peuvent être organisées sous forme de rectangles (5 rangées de 6 salades) afin de faire comprendre plus facilement les propriétés de commutativité et d’associativité de la multiplication. Si nécessaire, une calculatrice peut être utilisée pour trouver le résultat de l'addition itérée.

Tâche 13 : Reconnaitre le modèle d'un problème



Compétence clé évaluée dans cette tâche

Reconnaître un modèle additif/multiplicatif associé à un problème arithmétique en une étape.

Pourquoi cette compétence est-elle une compétence clé ?

Les problèmes proposés sont à une étape, ils ne contiennent pas de données inutiles et sont similaires à des problèmes que les élèves de ce niveau scolaire ont déjà rencontrés. Le contexte (des boîtes d'œufs pour cuisiner) est censé être évocateur pour l'ensemble des élèves, facilitant ainsi la compréhension de la situation. Les quatre écritures arithmétiques proposées reprennent les 4 opérations avec les deux mêmes nombres proposés dans l'énoncé, dans le même ordre, d'abord 24 puis 6.

Reconnaitre le modèle sous-jacent à un problème arithmétique, dans des problèmes simples comme ceux proposés, est une compétence clé pour donner du sens aux opérations et pour résoudre des problèmes plus complexes. Cela permet également de s'assurer que l'élève est capable de reconnaitre ces modèles dans des classes de problèmes similaires : problème multiplicatif avec recherche du produit (problème 1) ou du nombre de parts (problème 2) ; problème additif avec retrait (problème 3).

La lecture par l'enseignant des textes des problème permet de ne pas handicaper les élèves qui rencontreraient des difficultés de lecture.

Il s'agit ici de s'assurer que l'élève est capable de modéliser un problème par la reconnaissance d'une écriture arithmétique, avec une opération, sans en donner le résultat. Ne sont donc pas évaluées la capacité de l'élève à calculer (ce qui est une compétence clé évaluée par d'autres tâches de ce test) ni à produire une phrase réponse répondant au problème.

Quels types d'erreurs et autres signaux d'alerte peut-on attendre avec cette tâche ?

Une mauvaise association entre le texte et l'opération pourrait traduire :

- une mauvaise compréhension du texte et – ou du problème : l'élève ne comprend pas la signification d'un des termes (il comprend « a utilisé » comme « a ajouté ») ou un mot le conduit vers une mauvaise opération (le mot « reste » dans le problème 3 peut faire penser à un problème de division) ;
- la non-reconnaissance du bon modèle, de la bonne opération.

Certains élèves peuvent commettre des erreurs dans les associations demandées alors qu'ils sont peut-être capables de résoudre les problèmes 1 et 2 en passant par des additions / soustractions itérées sans encore être capables de reconnaitre des modèles multiplicatifs (multiplication ou division). D'autres élèves sont peut-être capables de résoudre les trois problèmes à l'aide de dessins, les collections étant suffisamment petites pour être dessinées mais sans être capables de produire des écritures arithmétiques.

Quel type de soutien pourrait être apporté aux élèves qui ne réussissent pas cette tâche ?

Pour savoir si certains élèves sont capables de résoudre les problèmes sans utiliser d'opération, il est nécessaire de leur proposer de les résoudre sans leur demander de produire une opération et sans fournir les quatre propositions. Il sera ensuite possible de réintroduire la multiplication ou la division comme addition ou soustraction itérée pour un élève qui ne reconnait pas une multiplication ou une division, mais qui peut résoudre les problèmes 1 et 2 en utilisant une addition ou une soustraction itérée. Connaitre l'opération modélisant la situation permet alors de traiter le calcul avec une calculatrice, ce qui sera indispensable quand les nombres seront trop grands (ou des décimaux).

Si l'élève est capable de résoudre le problème en dessinant des collections, cela signifie que la situation est comprise. On pourra alors réintroduire progressivement les 3 opérations, en commençant par la soustraction, puis la multiplication et enfin la division et en passant par la verbalisation à partir du dessin produit et à l'aide de matériel représentant les collections en jeu.

Pour amener l'élève à mieux comprendre la situation, on peut également lui demander de reformuler le problème : le dire avec ses propres mots, raconter une histoire ; on peut aussi mimer la situation devant lui (avec des œufs, avec des boites, avec des jetons, etc.).

Plus généralement, pour aider un élève à reconnaitre un modèle sous-jacent à un problème, différentes pistes sont possibles : lui proposer du matériel pour l'aider à représenter la situation de façon symbolique, lui demander d'associer le problème à un problème déjà rencontré en classe, lui suggérer de schématiser, lui demander d'anticiper un ordre de grandeur du résultat. Les propositions de soutien faites lors de l'analyse de la *tâche 8* peuvent être transférées ici.

Outils pour l’enseignant et indications sur le calcul des scores

Pour vous aider à évaluer les compétences des élèves, divers outils sont disponibles en téléchargement sur https://www.ditom.org/fr/tests-fr

Si vous préférez évaluer les tests manuellement, nous vous proposons dans les pages qui suivent :

a) **le barème**, qui répertorie pour chaque tâche, les critères d'attribution du nombre de points ;

b) **une grille de saisie des résultats par élèves** pour recenser les scores d'**un seul élève par exercice**, si vous souhaitez conserver un aperçu individuel, en papier-crayon ;

c) **une grille de saisie des résultats pour la classe** pour recenser les scores des élèves pour l’ensemble du test, en papier-crayon.

Une autre possibilité consiste à saisir les réponses des élèves dans une feuille de calcul (à télécharger sur https://www.ditom.org/fr/tests-fr). Ce fichier préprogrammé contient deux onglets situés en bas à gauche :

- dans l’onglet intitulé « ***qualitative*** », il suffit de saisir dans la colonne appropriée, pour chaque élève, la réponse qu’il a donnée à chaque question. Si l’élève n’a pas répondu, il faut saisir le code : 999.
- l’onglet « ***quantitative*** » se remplit automatiquement en fonction de ce qui a été saisi dans la feuille « ***qualitative*** ». Le programme indique alors automatiquement si chaque sous-tâche a été résolue correctement (1) ou incorrectement (0) et calcule le score approprié pour chaque tâche en suivant le barème (1 / 0,5 / 0). À la fin de chaque ligne, vous trouverez le pourcentage de tâches correctement résolues et le score total pour chaque élève.

Les « seuils de score critiques » pour DiToM fin de CM2 — et comment les interpréter

Comme expliqué dans la section 1, DiToM n'a pas pour but d'étiqueter les élèves.

Les seuils de score critiques (*cut-off scores*) ont été déterminés sur la base d'un test pilote avec, pour la version du test de début de CM2, 934 élèves dans les sept pays partenaires du projet à l'aide de la méthode statistique de l'analyse des classes latentes. Cette méthode permet de classer les élèves, en fonction de leur score total au test, dans l'un des trois groupes (A, B, C) de la manière suivante :

Intervalle de scores	Groupe
Entre 0 et 9 points	A - Signes de difficultés générales dans plusieurs domaines clés
Entre 9,5 et 12,5 points	B - Indications de difficultés dans certains domaines clés
Entre 13 et 15 points	C - Aucun signe de difficultés majeures dans les domaines clés

Gardez à l'esprit qu'un diagnostic ne fournit qu'un aperçu du niveau des compétences des élèves. Les résultats doivent donc être comparés à vos propres observations et expériences en classe et, le cas échéant, utilisés comme point de départ pour des entretiens de suivi avec chaque élève, afin d'approfondir, d'affiner ou d'élargir votre compréhension et, si nécessaire, d'ajuster vos conclusions, au moins en partie.

Barème

1	**Dictée de nombres**	1 pt 0,5pt 0 pt	Les trois nombres justes (5089 ; 43005 ; 300500) Deux nombres justes Toute autre solution
2	**Comparaison de nombres**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les trois symboles justes (>, >, <) Deux symboles justes Toute autre solution
3a	**Ajouter 1, 10 et 100**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les trois nombres justes (9900 ; 4600 ; 4000) Deux nombres justes Toute autre solution
3b	**Retrancher 1, 10 et 100**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les trois nombres justes (6999 ; 3490 ; 3900) Deux nombres justes Toute autre solution
4	**Droite graduée**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les quatre nombres justes (7000 ; 5300 ; 4080 ; 12500) Trois nombres sont justes Toute autre solution
5	**Moitié de nombres**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les quatre nombres justes (500 ; 250 ; 350 ; 1500) Trois nombres sont justes Toute autre solution
6a	**Additionner et soustraire sans poser l'opération (a)**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les quatre nombres justes (300 ; 736 ; 699 ; 354) Trois nombres sont justes Toute autre solution
6b	**Additionner et soustraire sans poser l'opération (b)**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les quatre nombres justes (4500 ; 64000 ; 2500 ; 49000) Trois nombres sont justes Toute autre solution
7a	**Additionner en posant l'opération**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les deux résultats justes (584 ;1324) Un résultat juste Aucun résultat juste
7b	**Soustraire en posant l'opération**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les deux résultats justes (644 ;272) Un résultat juste Aucun résultat juste
8	**Résoudre un problème additif**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Le calcul ET le résultat justes (35 – 4 = 31) Le calcul OU le résultat juste Toute autre solution
9	**Multiplier avec les tables de multiplication**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les six nombres justes (6 ; 80 ; 32 ; 63 ; 0 ; 35) Cinq nombres sont justes Toute autre solution

10	**Diviser avec les tables de multiplication**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les six nombres justes (8 ; 1 ; 7 ; 8 ; 6 ; 7) Cinq nombres sont justes Toute autre solution
11	**Multiplier et diviser sans poser l'opération**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les quatre nombres justes (35000 ; 1000 ; 600 ; 600) Trois nombres sont justes Toute autre solution
12	**Utiliser le signe ×**	1 pt 0 pt	La multiplication est juste (8 × 6 ou 6 × 8) Toute autre solution
13	**Reconnaitre le modèle d'un problème**	1 pt 0,5 pt 0 pt	Les trois associations justes (a3 ; b1 ; c2) Deux associations justes Toute autre solution

Grille de saisie des résultats par élève (en papier crayon)

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Nom: ______________________________

Date: ______________________________

Test début de CM2

Item	Réponse juste	Juste ou faux	**Points**
1.a	5 089		
1.b	43 005		
1.c	300 500		
2.a	>		
2.b	>		
2.c	<		
3a.a	9 900		
3a.b	4 600		
3a.c	4 000		
3b.a	6 999		
3b.b	3 490		
3b.c	3 900		
4.a	7 000		
4.b	5 300		
4.c	4 080		
4.d	12 500		
5.a	500		
5.b	250		
5.c	350		
5.d	1 500		
6a.a	300		
6a.b	736		
6a.c	699		
6a.d	354		
6b.a	4 500		
6b.b	64 000		
6b.c	2 500		
6b.d	49 000		

Item	Réponse juste	Juste ou faux	**Points**
7a.a	584		
7a.b	1 324		
7b.a	644		
7b.b	272		
8 calcul	35-4		
8 réponse	31		
9.a	6		
9.b	80		
9.c	32		
9.d	63		
9.e	0		
9.f	35		
10.a	8		
10.b	1		
10.c	7		
10.d	8		
10.e	6		
10.f	7		
11.a	35 000		
11.b	1 000		
11.c	600		
11.d	600		
12	8×6 or 6×8		
13.a	a - 3		
13.b	b - 1		
13.c	c - 2		

Total sur 16 ______

Commentair ______________________________

Barème

Tâches 1 à 3b et 13	les 3 corrects = 1 point; 2 corrects = 0.5 point; 1,0 correct ou pas de réponse = 0 point
Tâches 4 à 6b et 11	les 4 corrects = 1 point; 3 corrects = 0.5 point; 2,1,0 corrects ou pas de réponse = 0 point
Tâches 7a à 8	les 2 corrects = 1 point; 1 correct = 0.5 point; 0 correct ou pas de réponse = 0 point
Tâches 9 et 10	les 6 corrects = 1 point; 5 corrects = 0.5 point; 4,3,2,1,0 corrects ou pas de réponse = 0 point
Tâche 12	correct =1 point; faux ou pas de réponse = 0 point

Grille de saisie des résultats pour la classe (en papier crayon)

Prénom	Age	Aides spécifiques	1 Dictée de nombres	2 Comparaison	3a Ajouter 1, 10 et 100	3b Retrancher 1, 10 et 100	4 Droite graduée	5 Moitiés	6a Additionner /soustraire sans poser (a)	6b Additionner /soustraire sans poser (b)	7a Additionner en posant	7a Soustraire en posant	8 Résoudre un problème additif	9 Multiplications (tables)	10 Divisions (tables)	11 Multiplier et diviser sans poser l'opération	12 Utiliser le signe ×	13 Reconnaitre le modèle d'un problème	Score total

Informations complémentaires

Voici des références à des ouvrages et à des sources Internet en français qui pourraient vous aider à faire face aux difficultés d'apprentissage des mathématiques. Ces références sont organisées par thématique en fonction des tâches proposées dans l'évaluation

Lecture et écriture des nombres (Tâche 1 : Dictée de nombres)

Mounier E., Grapin N. & Pfaff N. (2020). Lire et écrire les nombres. Quelle place dans l'apprentissage au cycle 2 ? *Grand N,* n° 106, 31-47. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/106n2_1604488418614-pdf

Aspects décimal et positionnel de la numération écrite chiffrée (Tâche 2 : Comparaison de nombres - Tâche 3 : Additionner ou retrancher 1, 10, 100)

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N n°89*, 39-69. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/89n3_1554192554699-pdf

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N n°98*, 67-90. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/98n4_1552555468468-pdf

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, 86,59-90.https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/86n4_1554197732886-pdf

Site de Frédérick Tempier. La numération décimale http://numerationdecimale.free.fr/

Droite graduée (tâche 4)

« Placer 9 » est une situation qui a pour objectif de travailler les notions de pas unité et de graduation dans le contexte des nombres entiers. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/le-nombre-au-cycle-3/activite-placer-9--1426418.kjsp

Canter Alain Savary – ENS Lyon – Enseigner la droite numérique https://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/thematiques/mathematiques-en-education-prioritaire/manipulation-nombres-decimaux-aux-cycles-1-2-et-3-1/lenseignement-des-nombres-decimaux-a-lecole-primaire-et-au-college-questions-de-formation-obstacles-choix-didactiques/enseigner-la-droite-numerique

Mazollier, M-S., Mounier, E., Pfaff, N. (2025). Extraits du guide de l'enseignant du manuel Haut Les Maths, éditions Retz. https://haut-les-maths.editions-retz.com/ https://hal.science/view/index/docid/5396678

Calcul mental (tâche 5 : Moitié de nombres jusqu'à 10 000 - Tâche 6 : Additionner et soustraire sans poser l'opération & Tâche 11 : Multiplier et diviser sans poser l'opération)

Boule, F. (1997). Étapes du calcul mental. *Grand N n°62,* 15-34. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/62n3_1562313474918-pdf

Butlen, D. (2007). Le calcul mental. Entre sens et technique. Presses Universitaires de Franche Compté. Besançon.

Butlen, D. & Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté : le calcul mental entre sens et technique. Grand N, n° 79, 7-32. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/79n2_1554796874332-pdf

Charnay, R. & Valentin, D. (1991). Calcul ou comptage ? Calcul et comptage ! *Grand N.* n° 50, 11-20. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/50n2_1562935128422-pdf

Calcul posé (Tâche 7 : Additionner et soustraire en posant l'opération)

Mounier, E. &. Priolet, M. (2016). La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire. Le cas de l'addition et de la soustraction. *Grand N*, 98, 5-26. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/98n1_1552554947130-pdf

Tables de multiplication (Tâches 9 et 10 : Multiplier et diviser avec les tables de multiplication)

Anastasiou, D., Lemonidis, C., Pantsiou, E. (2009). Les tables de multiplication pour des élèves en difficultés en mathématiques : Connaissances et comportement. First French-Cypriot Conference of Mathematics Education. https://www.researchgate.net/publication/215486564_Les_tables_de_multiplication_pour_des_eleves_en_difficultes_en_mathematiques_Connaissances_et_comportement

Résolution de problèmes (Tâche 8 : Résoudre un problème additif - Tâche 12 : Utiliser le signe × - Tâche 13 : Reconnaître le modèle d'un problème)

Beylot, D., Blanchouin, A., Chenevotot, F., Grapin, N., Ledan, L. Mounier, E. (2024). Accompagner les professeurs des écoles à la prise en compte de la diversité des activités des élèves en résolution de problèmes : potentialités et limites d'usages de Verschaffel et De Corte (2008). *Actes du 49e colloque Copirelem.* Marseille 2023. 847-867. https://www.copirelem.fr/colloques/actes/

Grand N Spécial *Résolution de problèmes* (2006). Points de départ IREM de Grenoble.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, n° 71, 7-23. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/71n2_1555579413441-pdf

Mounier, E., Beylot, D., Blanchouin, A., Chenevotot, F., Grapin, N., Ledan, L. (2024). Repérer les démarches en résolution de problèmes d'élèves de grade 2 par l'analyse de leurs procédures : méthodologie et étude de cas. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives. 121-159. https://journals.openedition.org/adsc/5473*

Pfaff, N. & Fénichel, M. (2005). Donner du sens aux mathématiques, tome 2. Bordas.

Polotskaia, E., Gervais, C., Gélinas, M-S, Savard, A. (2023). *Représenter pour mieux raisonner. Résolution de problèmes écrits de multiplication et de divisions*. Editions JFD. Montréal. Canada (Québec).
https://books.google.fr/books?hl=fr&lr=&id=mhq1EAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA9&dq=tables+de+multiplication&ots=ws2ik7lS1k&sig=j1R3bY4xMs4gZdB6VRi2sfLxk04#v=onepage&q&f=false

Vergnaud, G. (1994). Proportionnalité simple. Proportionnalité multiple. *Grand N,* n°56, 55-66. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/56n5_1562850226137-pdf

Vergnaud, G. (1982). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives, *Grand N n°38*, 21-40. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/38n2_1563257743078-pdf