UNIVERSITÄT
BIELEFELD
Fakultät für Mathematik

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Screening 8+

Handbuch für Lehrer

Co-funded by
the European Union

Disclaimer:
Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or Erasmus+ National Agency for Higher Education (German Academic Exchange Service). Neither the European Union nor the granting authority can be held responsible for them.

Inhalt

Vorwort

Dieses Handbuch soll Sie bei der Durchführung des *DiToM* 8+ Screenings und bei der Nutzung der Testergebnisse in Ihrem Unterricht unterstützen. Auf den folgenden Seiten finden Sie:

1. eine kurze Einführung in die Ziele und Leitprinzipien des Erasmus+-Projekts *DiToM* (***Di**agnostic **To**ol in **M**athematics)*;
2. Hinweise zur Durchführung des *DiToM 8+* Screenings;
3. kurze Erläuterungen zu jeder Aufgabe des *DiToM* 8+ Screenings, einschließlich Hinweisen zu möglichen Förderstrategien für Schüler*innen, deren Screening-Ergebnisse Lernlücken in wichtigen mathematischen Kompetenzen aufzeigen;
4. Anleitungen zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse.

Die Anweisungen und die in Abschnitt 4 beschriebenen Bewertungstabellen können auch separat als einzelne PDF-Dateien unter www.ditom.org heruntergeladen werden.

I. Ziele und Leitprinzipien von *DiToM*

Das Lernen von Mathematik verläuft kontinuierlich: Neues Wissen baut auf gesichertem Vorwissen auf. Fehlen grundlegende mathematische Ideen und Konzepte, fällt es den Schüler*innen zunehmend schwerer, mathematische Inhalte zu verstehen und zu begreifen, die auf diesem Fundament aufbauen. Sowohl nationale als auch internationale Studien zeigen, dass ein erheblicher Anteil der Schüler*innen bereits in der Grundschule die Mindeststandards in Mathematik nicht erreicht – und aus den oben genannten Gründen fast zwangsläufig auch in der Sekundarstufe weiterhin Schwierigkeiten hat. Alarmierend ist, dass viele junge Menschen ihre Schulpflicht beenden, ohne das grundlegende Niveau an mathematischer Kompetenz erreicht zu haben, das laut OECD für eine „vollständige Teilhabe am gesellschaftlichen Leben“ unerlässlich ist.

Um dem entgegenzuwirken, müssen Lehrkräfte zunächst in der Lage sein, mathematische Lernschwierigkeiten zu erkennen – idealerweise frühzeitig und so genau wie möglich. Nur auf dieser Grundlage können gezielte Fördermaßnahmen ergriffen werden. Genau hier setzt das EU-Projekt *„**Di**agnostic **To**ol in **M**athematics” (DiToM)* an. In einer Partnerschaft zwischen Deutschland, Frankreich, Griechenland, Kroatien, Italien, Schweden und Spanien wurden fünf miteinander verbundene Screening-Instrumente entwickelt. Diese Tools ermöglichen es Lehrkräften, sich am Ende oder zu Beginn eines Schuljahres einen präzisen Überblick darüber zu verschaffen, welche Schüler*innen Gefahr laufen, in Mathematik zurückzufallen, wenn sie keine gezielten Fördermaßnahmen erhalten.

Die Screenings folgen einem zweijährigen Zyklus:

- **Screening 0** – Beginn der Grundschule
- **Screening 2+** – Ende der 2. Klasse / Beginn der 3. Klasse
- **Screening 4+** – Ende der 4. Klasse / Beginn der 5. Klasse
- **Screening 6+** – Ende der 6. Klasse / Beginn der 7. Klasse
- **Screening 8+** – Ende der 8. Klasse / Beginn der 9. Klasse

Was sind die *DiToM*-Screenings und was bewirken sie?

Die fünf Screenings sind pen-and-paper Tests, die sich auf wichtige mathematische Kompetenzen konzentrieren, die zu Beginn einer Klassenstufe sicher beherrscht werden sollten, damit neue Inhalte mit Verständnis gelernt werden können. Jeder Test kann innerhalb einer Unterrichtsstunde (45-Minuten) mit der gesamten Klasse durchgeführt und mit Hilfe der bereitgestellten Bewertungsinstrumente (siehe Abschnitt V) mit relativ geringem Zeitaufwand ausgewertet werden. Die Ergebnisse geben den Lehrkräften einen ersten strukturierten Überblick darüber, welche Schüler*innen wahrscheinlich zusätzliche Unterstützung benötigen.

Das Wort *„wahrscheinlich“* ist entscheidend: Ein Screening ersetzt **keine** individuelle, qualitative Beurteilung des Lernstands eines Kindes. Es liefert vielmehr erste Anhaltspunkte dafür, welche Strategien oder Lösungsansätze ein Kind möglicherweise verwendet hat. Ein detaillierteres Verständnis erfordert gezielte Beobachtungen und Einzelgespräche unter Verwendung differenzierterer Aufgaben. Das Screening kann jedoch als wertvoller Ausgangspunkt dienen, um zu bestimmen, welche Kinder am meisten von solchen Folgeuntersuchungen profitieren würden.

Was sind „mathematische Schlüsselkompetenzen“?

Wie bereits erwähnt, zeichnet sich die Mathematik in der Schule durch eine *„interne Lernhierarchie“* aus (Wittmann, 2015, S. 199). Dies gilt insbesondere für die Bereiche Arithmetik und Algebra – genau die Bereiche, auf die sich die DiToM-Screenings bewusst konzentrieren. In diesen Bereichen ist es in jeder Lernphase möglich, *Schlüsselkompetenzen* zu identifizieren – Kompetenzen, ohne die weiteres Lernen nicht sinnvoll und nachhaltig stattfinden kann.

Ein Beispiel: Um erfolgreich mit natürlichen Zahlen arbeiten zu können, müssen Kinder diese im Sinne *des Teil-Ganzes-Konzepts* verstehen – ein Entwicklungsprozess, der im ersten Schuljahr abgeschlossen sein sollte. Das Teil-Ganzes-Konzept bedeutet beispielsweise, dass die Zahl sieben als ein Ganzes verstanden wird, das sich aus Teilen zusammensetzt – fünf und zwei, vier und drei, eins und sechs und so weiter. Dieses Verständnis sollte dann automatisch erfolgen: Ein Kind sollte keine bewusste Anstrengung mehr benötigen, um fünf als den fehlenden Teil von sieben zu erkennen, wenn zwei als der andere Teil gegeben ist. Mit anderen Worten: Kinder sollten Zahlen automatisch in Bezug auf ihre Zerlegungen und Beziehungen denken. Diese Kombination aus *Verständnis* und *Automatisierung* ist charakteristisch für viele Schlüsselkompetenzen: Erst wenn bestimmte Fähigkeiten automatisch ablaufen, kann geistige Kapazität freigesetzt werden, um höhere mathematische Herausforderungen anzugehen.

Ob die Schlüsselkompetenz „Zahlen als Zusammensetzungen betrachten” (oder „Zahlenzerlegung”) gut verankert ist, lässt sich beispielsweise an den Rechenstrategien eines Kindes erkennen. Ein Kind, das sieben als fünf und zwei betrachtet, löst 7 – 5 mühelos, selbst in der ersten Schulklasse, ohne zu zählen. Kinder, denen diese Kompetenz fehlt, verlassen sich jedoch oft bis weit in die späteren Grundschul- und Sekundarschulklassen hinein auf mühsame, fehleranfällige Zählstrategien. Das Zählen bei Addition und Subtraktion wird schnell unüberschaubar, wenn es um zwei- oder dreistellige Zahlen geht. Solche Kinder haben auch Schwierigkeiten, Beziehungen zwischen Multiplikationsaufgaben zu erkennen – zum Beispiel, dass $9 \cdot 6$ sechs weniger ist als das leicht zu merkende $10 \cdot 6$. Defizite in einer Schlüsselkompetenz (das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen) behindern somit den Erwerb anderer Kompetenzen (Addition, Subtraktion, Multiplikation), die wiederum Voraussetzungen für fortgeschrittenere Fähigkeiten (Division, proportionales Denken usw.) sind.

Diese Kette setzt sich über die Grundschule hinaus fort: Schüler*innen, die Schwierigkeiten mit natürlichen Zahlen haben, werden noch größere Schwierigkeiten mit Brüchen und Dezimalzahlen haben. Algebra baut später auf Erkenntnissen auf, die durch die Arbeit mit den Grundrechenarten in der Grundschule gewonnen werden sollten. Ohne diese Erkenntnisse kann Algebra für Schüler*innen wie ein unentzifferbarer Code erscheinen.

Aus diesem Grund konzentrieren sich die DiToM-Screenings auf Schlüsselkompetenzen – diejenigen, die zu Beginn der Klassenstufen 1, 3, 5, 7 und 9 sicher etabliert sein sollten, damit das weitere mathematische Lernen erfolgreich fortgesetzt werden kann.

Was geschieht nach der Durchführung des *DiToM*-Screenings?

Mithilfe der in Abschnitt V beschriebenen Auswertungshilfen können die Lehrer*innen den Test digital mit Excel oder analog in Papierform auswerten.

Mit Blick auf einzelne Schüler:

Bei DiToM geht es nicht darum, Schüler*innen zu etikettieren. Die Screenings sind **nicht** darauf ausgelegt, Schüler*innen mit „Dyskalkulie“ zu identifizieren. Klinische Diagnosen dieser Art gehen nicht auf die Kernfrage ein, die *DiToM* beantworten möchte: *Wie können Lehrer*innen Kinder, die Schwierigkeiten mit grundlegenden Rechenkompetenzen haben, am besten unterstützen?* Eine gezielte Unterstützung erfordert ein genaues Verständnis des aktuellen Lernniveaus jedes einzelnen Kindes. DiToM hilft dabei, diejenigen zu identifizieren, für die eine solche detaillierte Bewertung dringend erforderlich ist – nicht mehr, aber auch nicht weniger. Abschnitt IV enthält kurze Hinweise dazu, welche Arten von Folgemaßnahmen für jede einzelne Aufgabe hilfreich sein können.

Die in Abschnitt V diskutierten „kritischen Schwellenwerte“ wurden auf der Grundlage von Datenerhebungen mit DiToM-Screenings bei 8.820 Schüler*innen in den sieben Partnerländern ermittelt. Unter Verwendung *der Latent-Class-Analyse* (siehe Yin, Bezirhan & von Davier, 2025) wurden die Schüler*innen wie folgt gruppiert:

- **Gruppe A:** Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.
- **Gruppe B:** Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.
- **Gruppe C:** Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Es ist wichtig, sich vor Augen zu halten, dass jedes Screening nur eine *Momentaufnahme* darstellt. Manche Schüler*innen hatten vielleicht einfach einen schlechten Tag oder waren abgelenkt, andere haben trotz Vorsichtsmaßnahmen möglicherweise Antworten abgeschrieben. Die Screening-Ergebnisse sollten daher mit Vorsicht interpretiert werden. Sie sollten immer mit den Beobachtungen aus dem täglichen Unterricht verglichen und als Anstoß für weitere gezielte Beobachtungen und Folgeaufgaben in den kommenden Tagen und Wochen genutzt werden.

Wenn sich herausstellt, dass ein Kind in Gruppe A fällt, ist davon auszugehen, dass sich seine mathematischen Schwierigkeiten im Laufe des Schuljahres verschlimmern werden, sofern nicht rechtzeitig wirksame Maßnahmen ergriffen werden. Kapitel IV kann nur allgemeine Hinweise für solche Maßnahmen geben, die auf den in den einzelnen Aufgaben bewerteten Schlüsselkompetenzen basieren. Für ausführlichere Fördermaßnahmen müssen Lehrer*innen die einschlägige pädagogische Literatur heranziehen.

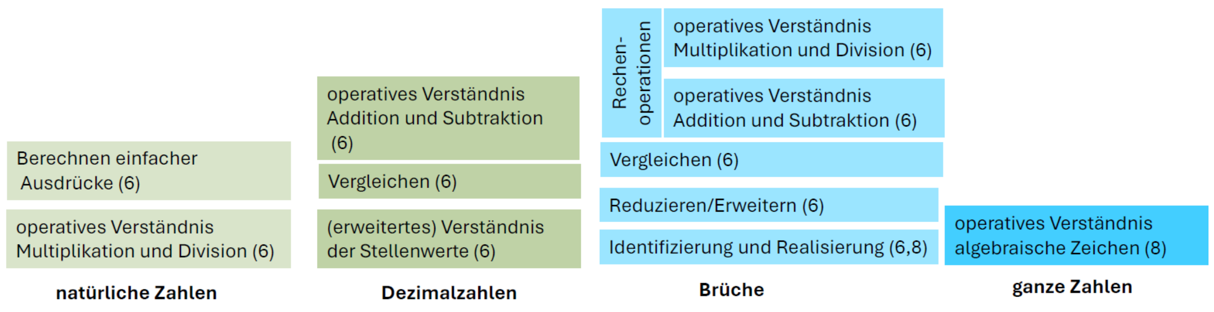
Auch Kinder der **Gruppe B** benötigen wahrscheinlich in mindestens einigen Bereichen gezielte Unterstützung, um erfolgreich lernen zu können. Es sei daran erinnert, dass alle Screening-Aufgaben Schlüsselkompetenzen bewerten. Das Screening ist bewusst so konzipiert, dass es *keine* Unterscheidung zwischen leistungsstarken Kindern trifft – im Idealfall sollten die meisten Kinder die Aufgaben recht einfach finden. Daher sollten auch Fehler, die Kinder **der Gruppe C** bei einzelnen Aufgaben machen, ernst genommen werden, da sie auf Lücken in grundlegenden Schlüsselkompetenzen hinweisen können.

Mit Blick auf die Klasse als Ganzes:

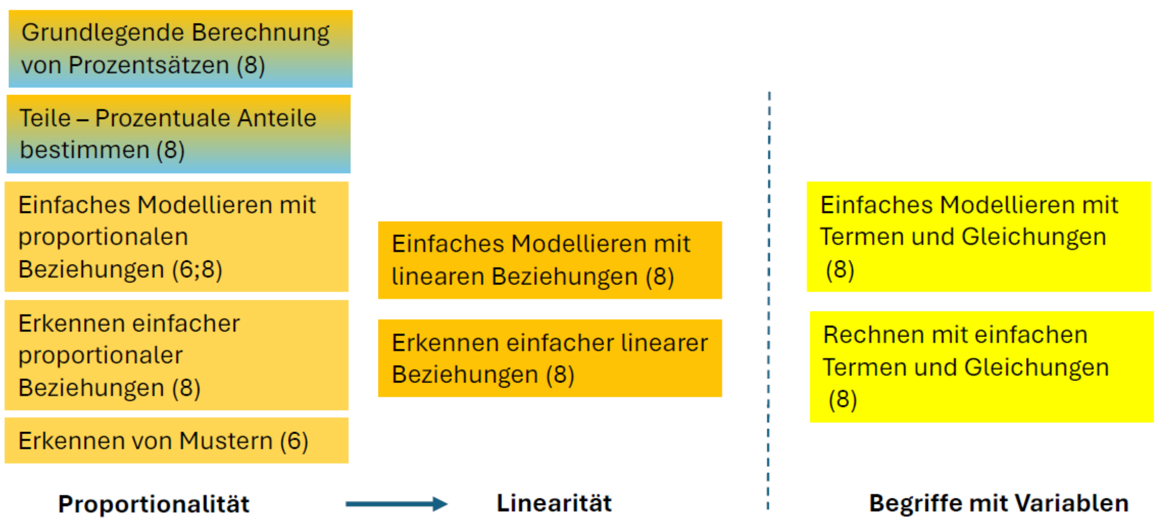
Letzteres gilt insbesondere dann, wenn die Ergebnisse zeigen, dass mehrere Kinder mit demselben Testteil oder derselben Aufgabe Schwierigkeiten hatten. Dies kann darauf hindeuten, dass sie entweder in ihrer bisherigen Schulzeit oder vor der Einschulung nur unzureichend oder nicht gezielt in dieser Kompetenz geübt wurden. In solchen Fällen ist es umso wichtiger, dass diese Lernmöglichkeiten jetzt angeboten werden, auch wenn der Lehrplan bereits zu neuen Inhalten übergegangen ist. Auch hier ist es wichtig, die hierarchische Struktur des Mathematikunterrichts zu berücksichtigen: Jede Stufe hängt vom sicheren Verständnis der grundlegenden Kompetenzen ab, bevor man zur nächsten übergehen kann.

II. Teststruktur Screening 8+

Die Teststruktur in DiToM basiert auf den Inhaltsbereichen Arithmetik und Algebra. Die hierarchische Struktur der Inhaltsbereiche werden berücksichtigt. Der Testaufbau konzentriert sich auf den Bereich der Zahlenbereichsentwicklung und -erweiterung im Sinne technischer Berechnungen. Das Diagramm zeigt die Teststruktur für die Klassenstufen 6+ und 8+.
Der Screening 6+ Test baut auf den Bausteinen von Screening 4+ auf, die sich auf natürliche Zahlen konzentrieren. Wenn Schüler*innen in der 6. Klasse erhebliche Schwierigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen haben, wird empfohlen, den Test für die Klasse 4+ anzuwenden.



Im Bereich der Algebra wird das strukturelle Verständnis einfacher mathematischer Strukturen in internen sowie externen mathematischen Anwendungen unter den Aspekten Proportionalität und Linearität geprüft. Dies gilt ebenso für Terme mit Zahlen oder Variablen in unterschiedlichen Richtungen in grundlegenden Anwendungssituationen sowie für das Termverständnis, soweit es Teil eines grundlegenden Verständnisses ist.



III. Durchführung des DiToM-Tests

- Erklären Sie den Schülern den Zweck des Tests und beruhigen Sie sie.

    - Der Test wird nicht benotet.
    - Er ermöglicht Ihnen, eine Bestandsaufnahme dessen zu machen, was die Schüler*innen wissen und was sie nicht wissen, damit Sie anschließend eine Förderung einleiten können. Daher ist es besonders wichtig, dass die Schüler*innen alleine arbeiten.
    - Betonen Sie, wie wichtig es ist, die Übungen zu absolvieren. Je mehr Fragen sie beantworten, desto leichter lassen sich ihre Kenntnisse, Fähigkeiten und Schwierigkeiten erkennen, um ihnen dabei zu helfen, diese zu überwinden.

- Aufbau des Tests

    - Der Test ist in vier Teile gegliedert, die jeweils aus mehreren Aufgaben bestehen.
    - Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander.

- Dauer: Für jedes Screening gibt es eine maximale Bearbeitungszeit.

    - Die maximale Bearbeitungszeit der Screenings beträgt 42 Minuten.
    - Es ist wichtig, den Schüler*innen vor Beginn des Screenings die Dauer des Tests mitzuteilen.

- Aufgabenformate

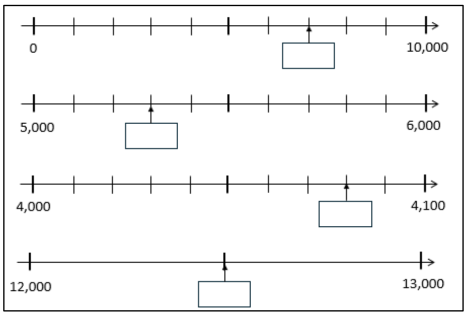
    - Offene Aufgaben: Es gibt Platz für die Antwort (entweder in Form von Sätzen oder einer Zahl).
    - Geschlossene Aufgaben (Multiple-Choice-Fragen): Es werden mehrere Antworten vorgeschlagen und die Schüler*innen müssen eine davon auswählen. Bitte weisen Sie die Schüler*innen darauf hin, dass sie, wenn sie ihre Multiple-Choice-Antwort ändern möchten, neben der ersten Antwort „Nein” und neben der neuen Antwort „Ja” schreiben sollen.

- Weitere Hinweise

    - Taschenrechner sind nicht erlaubt.
    - Die Schüler*innen können jeden freien Teil der Seite verwenden, insbesondere um ihre Berechnungen aufzuschreiben.
    - Die Schüler*innen können die vier Teile in ihrer eigenen Reihenfolge und in ihrem eigenen Tempo bearbeiten.
    - Wenn die Lehrkraft um Hilfe gebeten wird, darf sie keine Hinweise geben, die zur Beantwortung der Aufgaben führen könnten. Das Ziel ist es, die Schwierigkeiten der Schüler*innen zu erkennen.

IV. Erläuterungen und Vorschläge zur Unterstützung bei den einzelnen Aufgaben des *DiToM 8+* Test

Aufgabe 1.1: Zahlen auf der Zahlengeraden



Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Intervalle und Abstände zwischen Zahlen auf einem Zahlenstrahl zu erkennen und Zahlen (bis zu 100 000) an der richtigen Position auf Zahlenstrahlen zu platzieren.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das richtige Einordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl ist ein Aspekt des Verständnisses numerischer Beziehungen, insbesondere von Ordnungszahlen (welche Zahlen kommen vor oder nach anderen). Es hilft den Schüler*innen dabei, die Größe und Position von Zahlen zu visualisieren, ein starkes Gefühl für numerische Größenordnungen zu entwickeln und Beziehungen zwischen Zahlen zu verstehen. Es vertieft das Verständnis für den Stellenwert, indem es zeigt, wie Ziffern zum Gesamtwert einer Zahl beitragen. Die Darstellung von Zahlen auf einem Zahlenstrahl ist für viele andere Fähigkeiten unerlässlich, wie z. B. das Runden von Zahlen und das Schätzen von Summen und Differenzen. Die Darstellung von Zahlen auf einem Zahlenstrahl wird später für Brüche, Dezimalzahlen, Maße und Skalen verwendet.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Einige Kinder zählen die Markierungen, ohne die Skala zu verstehen, was zu Fehlern führt (insbesondere wenn die Intervalle nicht 1 sind). Ein häufiger Fehler ist das Ignorieren der Rolle der Null in Zahlen (Weglassen oder Falschplatzieren von Nullen). In Aufgabe a.) schreiben sie beispielsweise möglicherweise 700 statt 7.000 oder in Aufgabe b.) 5.030 statt 5.300. Manchmal deuten die Fehler, die Kinder bei dieser Aufgabe machen, auf tiefere Missverständnisse hinsichtlich des Zahlenverständnisses oder des Stellenwerts hin. Beispielsweise können Zahlen in der falschen Reihenfolge angeordnet sein (z. B. 70.000 vor 10.000), was auf Schwierigkeiten hinsichtlich der numerischen Reihenfolge hindeutet.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Wenn ein Kind keine vernünftige Entscheidung darüber treffen kann, wo eine Zahl platziert werden soll, kann dies auf ein schwaches Zahlenverständnis hindeuten. Lehrer*innen müssen feststellen, ob die Schwierigkeit beim Zählen liegt (z. B. Zahlen überspringen), beim Verständnis des Stellenwerts (z. B. 100 mit 10 verwechseln), beim Skalieren (z. B. gleichmäßige Abstände nicht verstehen) oder beim Weglassen oder Falschplatzieren von Nullen. Kinder profitieren von Übungen, bei denen sie Zahlen auf einem Zahlenstrahl platzieren müssen. Der Schwerpunkt sollte dabei auf teilweise ausgefüllten Zahlenstrahlen liegen, die die Kinder mit den fehlenden Zahlen vervollständigen müssen. Farbcodierte Bezugspunkte (z. B. 0, 10, 100) können das Verständnis fördern. Es ist auch ratsam, das Platzieren von Zahlen ohne exakte Markierungen zu üben und die Kinder zu ermutigen, anhand bekannter Bezugspunkte zu schätzen. Lehrer*innen können die Kinder auch darum bitten, ihre Platzierungen zu erklären. Wenn möglich, können Lehrer*innen interaktive Zahlenstrahle verwenden, auf denen die Kinder Zahlen per Drag and Drop verschieben können. Auch reale Kontexte (z. B. Zeitachsen, Lineale, Temperaturskalen) können zum besseren Verständnis beitragen.

Aufgabe 1.2: Addieren und Subtrahieren von 1/10/100 zusammen mit Bündeln und Entbündeln

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

a) 1 mehr als 9.899: _________	d) 1 weniger als 7.000: _______
b) 10 mehr als 4.590: _________	e) 10 weniger als 3.500: ________
c) 100 mehr als 3.900: __________	f) 100 weniger als 4.000: ________

Diese Aufgabe erfasst das Verständnis der Schüler*innen für Stellenwerte und ihre Fähigkeit, 1, 10 oder 100 korrekt zu addieren oder zu subtrahieren, einschließlich des Umgangs mit Bündeln oder Übertragen und Entbündeln oder Borgen, sowie das genaue Arbeiten mit mehrstelligen Zahlen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Hinzufügen oder Wegnehmen von 1, 10 oder 100 durch Bündeln und Entbündeln ist eine Schlüsselkompetenz, da es den Schüler*innen dabei hilft, zu verstehen, wie sich Zahlen je nach Stellenwert verändern. Es verstärkt die Vorstellung, dass Ziffern an verschiedenen Stellen unterschiedliche Werte darstellen, und zeigt, wie man überträgt oder „bündelt", wenn eine Ziffer größer als 9 ist, und wie man entbündelt, wenn eine Ziffer nicht ausreicht. Ein solides Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems bildet die Grundlage für flexibles Rechnen mit mehrstelligen Zahlen (und später Dezimalzahlen) und für die Verknüpfung dieser Zahlen untereinander und mit der Welt, in der wir leben (z. B. Schätzen, grobe Berechnungen und die richtige Einschätzung quantitativer Verhältnisse in realen Situationen). Die Beherrschung dieser Fähigkeit ist für das Kopfrechnen, das Addieren und Subtrahieren mit größeren Zahlen und spätere arithmetische Operationen unerlässlich, da sie das konzeptionelle Verständnis fördert. Sie hilft den Schüler*innen auch, Muster in Zahlen zu erkennen und Addition und Subtraktion in praktischen, realen Situationen anzuwenden. Die Fähigkeit, Aufgaben zu lösen, bei denen Dezimaleinheiten entbündelt werden müssen, zeugt von einem höheren Verständnisniveau als Aufgaben, bei denen gebündelt werden muss. Schwierigkeiten beim Entbündeln sind häufiger anzutreffen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Kinder könnten an der falschen Stelle addieren oder subtrahieren, beispielsweise 100 zu 3.900 addieren und 3.910 statt 4.000 schreiben oder 10 zu 4.590 addieren und 4.690 schreiben. Die Schüler*innen können möglicherweise nicht richtig übertragen oder bündeln, weil sie nicht erkennen, dass durch das Addieren von 1 zu 9.899 die Zehner- und Hunderterstelle erhöht wird, um 9.900 zu erreichen. Ähnlich verhält es sich beim Subtrahieren von 1, 10 oder 100: Kinder könnten antworten, dass 1 weniger als 7.000, 6.000 ist, oder (wenn sie gelernt haben, dass solche Antworten eine oder mehrere 9en enthalten sollten) 7.009 oder 6.009 (andere Antworten sind möglich). 10 weniger als 3.500 könnte unter anderem mit 3.400 oder 2.500 beantwortet werden. Kinder könnten missverstehen, was „1 mehr/weniger", „10 mehr/weniger" oder „100 mehr/weniger" bedeutet, und die Änderung auf die falsche Ziffer anwenden. Ein weiterer häufiger Fehler ist das falsche Befolgen einfacher Muster, z. B. immer nur die letzte Ziffer zu erhöhen oder zu verringern, unabhängig von der Struktur der Zahl. Abgesehen von Fehlern oder Nichtantworten sollte es als Warnsignal gewertet werden, wenn ein Kind sich auf algorithmische Addition oder Subtraktion verlässt, um Antworten zu finden, selbst wenn die Antworten richtig sind. Kinder sollten in der Lage sein, die Antworten schnell zu nennen, basierend auf ihrem Verständnis. Diese Fehler deuten oft auf Schwierigkeiten beim Verständnis des Stellenwerts, beim Übertragen/Bündeln, Entbündeln/Borgen und beim Verbinden von Addition und Subtraktion mit der richtigen Position in mehrstelligen Zahlen hin, die für genaues Rechnen und Kopfrechnen unerlässlich sind.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Wenn ein Kind Schwierigkeiten mit dem Addieren oder Subtrahieren von 1, 10 oder 100 hat, ist es wichtig, zunächst sein Verständnis des Dezimalsystems und des Stellenwerts zu beurteilen. Wie bereits erwähnt, ist das Verständnis des Stellenwerts vielschichtig, und es wird empfohlen, das aktuelle Verständnis der

Prinzipien des Dezimalsystems umfassender zu beurteilen. Die Unterstützung kann mit konkreten Aktivitäten beginnen, bei denen Hilfsmittel wie Einer, Zehner und Hunderter verwendet werden, um Dezimalbündel zu bilden und den Kindern zu helfen, zu verstehen, wie sich Zahlen beim Addieren und Subtrahieren verändern. Es ist wichtig, Aufgaben zu verwenden, bei denen das Kind mit geeigneten Materialien Dezimalbündel bildet, und sich dann auf spezifische Aufgaben zu konzentrieren, die das Bündeln und Entbündeln erfordern, wie z. B. 1 zu 9.899 addieren, 100 zu 3.900 addieren oder 3.000 halbieren. Die Verwendung von Stellenwerttafeln ist dabei ein wichtiges Hilfsmittel. Nach und nach sollten die Kinder üben, diese Aufgaben ohne Materialien zu lösen, wobei sie auf ihren früheren konkreten Erfahrungen aufbauen. Ermutigen Sie die Kinder dabei, ihre Überlegungen und Handlungen zu verbalisieren, zunächst unter Anleitung und später zunehmend selbstständig und vorausschauend, um die Verinnerlichung des Bündelungs- und Entbündelungsprinzips sowie das genaue Addieren und Subtrahieren zu unterstützen. Didaktische Tipps zur Entwicklung eines Verständnisses des Dezimalstellwertsystems finden Sie unter: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/

Aufgabe 1.3: Zahlen vergleichen

a)	6.001	5.999
b)	7.955	7.599
c)	99.899	102.101

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, mehrstellige Zahlen zu vergleichen und den Vergleich mithilfe der Symbole für größer als, kleiner als oder gleich genau darzustellen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Vergleichen von Zahlen ist eine Schlüsselkompetenz, da es für das Verständnis der Größe und Reihenfolge von Zahlen von grundlegender Bedeutung ist. Wenn Schüler*innen Zahlen vergleichen, beginnen sie, Muster in Ziffern zu erkennen und zu verstehen, wie Zahlen größer oder kleiner werden, was die Entwicklung des Verständnisses für Stellenwerte fördert. Diese Kompetenz stärkt auch das logische Denken und die Entscheidungsfindung, da die Schüler*innen Zahlen sorgfältig analysieren müssen, um zu bestimmen, welche größer, kleiner oder gleich ist. Das Vergleichen von Zahlen bildet die Grundlage für viele zukünftige mathematische Aufgaben, darunter das Verstehen von Ungleichungen, das Lösen von Rechenaufgaben und das Arbeiten mit Dezimalzahlen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Wenn Schüler*innen aufgefordert werden, das richtige Symbol (<, >, =) zwischen Zahlen wie 5.999 und 6.001, dann zwischen 7.955 und 7.599 oder zwischen 99.899 und 102.101 einzufügen, können mehrere häufige Fehler auftreten. Ein häufiger Fehler ist es, sich auf die letzte Ziffer statt auf die ganze Zahl zu konzentrieren. Beispielsweise könnte ein Schüler*innen 5.999 > 6.001 schreiben, weil 9 größer ist als 1 in der Einerstelle. Ähnlich könnte ein Lernender im Beispiel mit 7.955 und 7.599 nur die letzten beiden Ziffern (55 vs. 99) vergleichen und fälschlicherweise zu dem Schluss kommen, dass 7.955 < 7.599 ist, wobei er die Tausenderstelle ignoriert. Ein weiterer häufiger Fehler ist die Verwechslung der Ziffernanzahl, bei der Lernende denken, dass 99.899 > 102.101 ist, weil „99..." größer als „10..." erscheint. Manche verwenden auch das Gleichheitszeichen falsch, indem sie beispielsweise 7.955 = 7.599 schreiben, weil die Zahlen sehr ähnlich aussehen. Es besteht auch die Möglichkeit von Fehlern bei der Ausrichtung der Symbole, bei denen ein Lernender weiß, dass 5.999 kleiner als 6.001 ist, aber dennoch 5.999 > 6.001 schreibt, was auf Schwierigkeiten hinsichtlich der Ausrichtung des Ungleichheitszeichens hindeutet. Warnsignale, auf die man achten sollte, sind unter anderem, wenn Schüler*innen Vergleiche langsam oder zögerlich anstellen, sich konsequent nur auf die letzte Ziffer verlassen, wiederholt „=" als sichere Schätzung verwenden oder fehlerhafte Abkürzungen wie „die größere letzte Ziffer bedeutet die größere Zahl" anwenden. All dies deutet auf Missverständnisse hinsichtlich des Stellenwerts und der korrekten Verwendung von Vergleichssymbolen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Wenn Schüler*innen Schwierigkeiten beim Vergleichen von Zahlen haben, beobachten wir oft zwei Hauptarten von Fehlern. Einige Schüler*innen wissen, welche Zahl größer oder kleiner ist, verwenden aber das falsche Symbol (<, >, =), während andere Schwierigkeiten haben, zu bestimmen, welche Zahl größer ist, und manchmal durch die Anzahl der Ziffern verwirrt werden. Die Unterstützung kann auf jede Situation zugeschnitten werden. Für Schüler*innen, die Symbole verwechseln, ist es hilfreich, die Bedeutung jedes Symbols zu vermitteln, sie vor dem Schreiben ihre Überlegungen verbalisieren zu lassen und Übungen zur korrekten Verwendung der Symbole anzubieten. Schüler*innen, die Schwierigkeiten haben zu verstehen, welche Zahl größer ist, können Lehrer*innen helfen, indem sie sie anleiten, Zahlen Ziffer für Ziffer von links nach rechts zu vergleichen, mit einfacheren ganzen Zahlen zu beginnen, bevor sie zu größeren Zahlen und Dezimalzahlen übergehen, und sie ermutigen, ihre Überlegungen zu erklären, damit sie ein echtes Verständnis entwickeln, anstatt nur Regeln zu befolgen. Die Verwendung von Stellenwerttafeln als Hilfsmittel kann das Verständnis für die Größenvergleiche unterstützen.

Aufgabe 1.4: Addition und Subtraktion

a.)	248 + 252 = ________	e.)	723 – 24 = ___________
b.)	637 + 199 = _______	f.)	453 – 199 = ________
c.)	3.600 + 900 = ____________	g.)	3.200 – 700 = ________
d.)	56.000 + 8.000 = ___________	h.)	54.000 – 5.000 = _________

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Sicheres Anwenden von Strategien bei Additions- und Subtraktionsaufgaben unter Verwendung von Kompensationsmethoden, Strategien für Nachbarzahlen und Verständnis für Stellenwerte, einschließlich Kopfrechnen mit Hundertern und Tausendern und Nullen als Platzhalter.
Von den Schüler*innen wird erwartet, dass sie mehrstellige Zahlen berechnen und effiziente Berechnungen wie 637 + 99, 723 – 24, 3.600 + 900 oder 54.000 – 5.000 ohne schriftliche Algorithmen durchführen können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Beherrschen von Strategien zum Kopfrechnen ist für das fortgeschrittene Mathematiklernen von grundlegender Bedeutung, da die Schüler*innen die numerische Flexibilität entwickeln, die für die Bewältigung komplexer mehrstufiger Probleme, algebraisches Denken und proportionales Denken in späteren Jahren unerlässlich ist. Rechenstrategien verbessern die Effizienz der Problemlösung erheblich, indem sie die kognitive Belastung reduzieren und es den Schüler*innen ermöglichen, sich auf das Verstehen des Problemkontexts, die Auswahl geeigneter Rechenoperationen und die vertiefte Auseinandersetzung mit mathematischen Überlegungen zu konzentrieren. Diese Strategien stehen in engem Zusammenhang mit dem konzeptionellen Wissen der Schüler*innen über Zahlen und deren Zusammenhänge, ihrem Zahlenverständnis und dem Stellenwert. Beispielsweise können Schüler*innen erkennen, dass 637 + 99 durch „637 + 100 – 1" gelöst werden kann oder dass 3.600 + 900 „36 Hunderter plus 9 Hunderter gleich 45 Hunderter" ergibt, also 4.500. Dieses Verständnis des Zehnersystems und der unterschiedlichen Werte von Ziffern an verschiedenen Stellen ist für die spätere Arbeit mit größeren Zahlen, Dezimalzahlen, Brüchen und algebraischen Notationen unerlässlich. Sicheres Kopfrechnen mit und ohne Nullen bereitet die Schüler*innen auf formale schriftliche Methoden vor, unterstützt das Schätzen und Überprüfen und hat einen klaren praktischen Bezug zu alltäglichen Situationen, in denen es um Geld, Zeit, Maße, Mengen und große Zahlen geht.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Rechenfehler treten auf, wenn Schüler*innen Schwierigkeiten mit Kompensationsstrategien haben. Sie erkennen möglicherweise, dass eine Zahl nahe an einem Vielfachen von 10 oder 100 liegt (z. B. 99 oder 199), vergessen jedoch, ihr Endergebnis anzupassen, und berechnen 637 + 99 als 637 + 100 = 737, ohne 1 abzuziehen. Sie können auch angepasste Zahlen falsch berechnen, z. B. 248 + 52, 248 + 50 oder 723 – 20, was Lücken in den grundlegenden Rechenkenntnissen offenbart. Fehlvorstellungen zum Stellenwert stellen erhebliche konzeptionelle Herausforderungen dar. Die Schüler*innen behandeln Ziffern möglicherweise unabhängig voneinander und ignorieren ihre Positionen, indem sie beispielsweise 3.600 + 900 durch Addition von 3 + 9 und 6 + 0 berechnen oder nicht erkennen, dass 3.600 sechsundreißig Hunderter und 900 neun Hunderter sind. Bei der Arbeit mit Tausendern erkennen sie möglicherweise nicht, dass 54.000 fünfzigtausend sind, und rechnen 54.000 – 5.000 falsch. Fehler im Zusammenhang mit der Null treten auf, wenn Schüler*innen die Rolle der Null als Platzhalter missverstehen, Nullen weglassen oder hinzufügen und Antworten wie 5.680 oder 640.000 für 56.000 + 8.000 geben. Fehler bei der Strategieauswahl deuten auf konzeptionelle Schwierigkeiten hin. Einige Schüler*innen verlassen sich auf ineffiziente Zählstrategien (z. B. einzeln zählen) oder versuchen, schriftliche Algorithmen mental zu replizieren, was die kognitive Belastung und das Fehlerrisiko erhöht. Andere wenden möglicherweise Kompensationsmaßnahmen an. Warnzeichen sind unter anderem eine starke Abhängigkeit von Zählmethoden bei Aufgaben, die für strategisches Kopfrechnen konzipiert sind, Verwirrung darüber, welche Ziffer durch das Addieren oder Subtrahieren von Zehnern, Hundertern oder Tausendern betroffen ist, inkonsistente Leistungen oder offensichtliche Angst vor dem „Kopfrechnen". Diese Muster deuten oft auf ein schwaches Zahlenverständnis und ein unsicheres Verständnis des Stellenwerts hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung sollte sich darauf konzentrieren, das Verständnis für Stellenwerte zu stärken und ein Repertoire an mentalen Strategien aufzubauen. Zahlzerlegungen sind eine wichtige Vorläuferfähigkeit, visuelle Darstellungen besonders hilfreich. Zahlenstrahle können zur Veranschaulichung dienen (z. B. indem sie 637 + 99 als einen Sprung von +100 und einen Schritt zurück von –1 darstellen). Stellenwerttafeln und Zehnermaterialien (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender) können verwendet werden, um Berechnungen wie 3.600 + 900 oder 3.200 – 700 zu verdeutlichen, wodurch „36 Hunderter plus 9 Hunderter" oder „32 Hunderter minus 7 Hunderter" sichtbar werden. Bringen Sie den Schüler*innen bei, ähnliche Zahlen zu erkennen und wann eine Kompensation sinnvoll ist. Üben Sie mit Aufgaben wie 37 + 19, 248 + 52, 637 + 99, 723 – 24 oder 453 – 99 und führen Sie sie durch den zweistufigen Prozess: Anpassen, um eine leicht zu merkende Zahl zu erhalten, dann in die entgegengesetzte Richtung kompensieren. Bauen Sie die Fähigkeiten schrittweise auf, beginnend mit einfacheren Zahlen und übergehend zu größeren Zahlen und komplexeren Mustern (z. B. 36 + 9 → 360 + 90 → 3.600 + 900). Verwenden Sie Schätzungen, um zu überprüfen, ob die Antworten plausibel sind, und umgekehrte Rechenoperationen, um die Ergebnisse zu überprüfen. Realistische Kontexte (Preise, Entfernungen, Mengen) können Berechnungen sinnvoll machen und die Nützlichkeit von mentalen Strategien hervorheben.

Aufgabe 1.5: Berechnen fehlender Werte bei Addition und Subtraktion

a) 37 + _______ = 82	c) 88 – _______ = 37
b) _______ + 90 = 789	d) _______ – 55 = 23

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe prüft die Fähigkeit der Schüler*innen, fehlende Komponenten (Ausgangsmenge, Austauschmenge) in Additions- und Subtraktionsaufgaben zu bestimmen, indem sie die Umkehrbeziehung zwischen den Rechenoperationen verstehen und anwenden. Konkret müssen sie erkennen, ob der erste Summand, zweite Summand, Minuend oder Subtrahend gesucht ist, und die entsprechende Umkehroperation (Subtraktion bzw. Addition) durchführen.

Warum ist diese Kompetenz eine Schlüsselkompetenz?
Das Verständnis der Umkehrrelationen zwischen Addition und Subtraktion ist eine zentrale arithmetische Kompetenz, die weit über das bloße Rechnen hinausgeht. Diese Fähigkeit zeigt, dass Schüler*innen Rechenoperationen nicht nur prozedural ausführen, sondern deren strukturelle Beziehungen durchdrungen haben. Das Bestimmen der fehlenden Menge erfordert flexibles Denken über Zahlenbeziehungen und ist grundlegend für das Lösen von Gleichungen in der Algebra (z. B. x + 37 = 82). Diese Kompetenz stärkt das relationale Verständnis von Zahlen – die Einsicht, dass Zahlen zueinander in Beziehung stehen und dass diese Beziehungen durch verschiedene Operationen ausgedrückt werden können. In Alltagssituationen begegnen uns solche Fragestellungen ständig: „Ich habe 37 €, brauche aber 82 €. Wie viel fehlt mir noch?“ oder „Nach einer Abgabe von 55 € bleiben mir 23 € übrig. Wie viel hatte ich vorher?“ Die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Darstellungen einer Rechenoperation zu wechseln, ist außerdem essentiell für das Überprüfen von Rechenergebnissen und entwickelt metakognitive Fähigkeiten. Schüler*innen, die diese Umkehrbeziehungen verstehen, können Fehler selbstständig erkennen und korrigieren.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Fehler im Verständnis der Rechenoperationen treten auf, wenn Schüler*innen die falsche Umkehrung wählen. Bei Aufgabe a) (37 + __ = 82) berechnen sie fälschlicherweise 37 + 82 = 119 statt 82 – 37 = 45, weil sie das Pluszeichen sehen und automatisch addieren, ohne die Aufgabenstruktur zu analysieren. Bei Aufgabe d) (__ – 55 = 23) rechnen sie 55 – 23 = 32 anstatt die (größere) Zahl zu suchen, von der 55 subtrahiert wird, so dass 23 übrig bleibt: 55 + 23 = 78.
Positionsfehler entstehen, wenn zwar die richtige Operation gewählt, aber die Zahlen in falscher Reihenfolge verwendet werden. Bei Aufgabe c) (88 – __ = 37) könnte 37 – 88 berechnet werden statt 88 – 37 = 51, was zu negativen Zahlen oder der Aussage „geht nicht” führt.
Konzeptionelle Missverständnisse zeigen sich durch Probierstrategien statt systematischer Nutzung der Umkehrrelation. Kinder setzen verschiedene Zahlen ein und prüfen, ob das Ergebnis stimmt. Bei größeren Zahlen wie in Aufgabe b) (__ + 90 = 789) wird dies sehr ineffizient. Manche verwenden auch Zählstrategien (vorwärts oder rückwärts zählen), was bei solchen Aufgaben aufwendig und fehleranfällig ist.
Rechenfehler können auftreten, selbst wenn die richtige Strategie gewählt wurde. Bei Aufgabe b) wird zwar korrekt erkannt, dass 789 – 90 gerechnet werden muss, aber beim Subtrahieren entsteht ein Fehler

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Förderung sollte mit konkreten Materialien und Visualisierungen beginnen. Nutzen Sie Plättchen oder Würfel, um die Teil-Ganzes-Beziehung handelnd zu erfahren: „Ich habe 37 rote Plättchen. Wie viele (blaue) Plättchen muss ich hinzunehmen, damit ich insgesamt 82 Plättchen habe?”. Lassen Sie Kinder ihre Überlegungen verbalisieren: „Das Ganze ist 82, ich habe bereits einen Teil davon, nämlich 37. Also nehme ich diesen Teil weg, um den Rest zu finden.“ Gestufte Übungen beginnen mit einfachen Zahlen und nur einem Aufgabentyp (z. B. nur fehlender zweiter Summand), bevor verschiedene Typen gemischt und Zahlengrößen gesteigert werden. Verknüpfen Sie Aufgaben mit Alltagssituationen: „Tom hat 37 € gespart, braucht aber 82 € für ein Geschenk. Wie viel fehlt noch?” Diese Kontextualisierung hilft beim Verstehen der Aufgabenstruktur und ermöglicht Plausibilitätsprüfungen.

Aufgabe 1.6: Grundlegende Rechenoperationen mit Zahlen – Multiplikation und Division

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe umfasst die Sicherheit und Automatisierung der Schüler*innen beim Abrufen und Anwenden grundlegender Multiplikations- und Divisionsaufgaben sowie ihre Fähigkeit, Multiplikationen und Divisionen mit Zahlen, die Vielfache von zehn, hundert und tausend sind, durchzuführen.

a.) 6 · 1 = ______	g.) 80 : 10 = ______
b.) 10 · 8 = ______	h.) 6 : 6 = ______
c.) 8 · 4 = ______	i.) 7 : 1 = ______
d.) 9 · 0 = ______	j.) 72 : 9 = ______
e.) 7 · 5.000 = ________	k.) 60.000 : 100 = ________
f.) 50 · 20 = ________	l.) 7.200 : 9 = ________

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Beherrschen grundlegender Multiplikations- und Divisionsaufgaben ist aus mehreren Gründen unerlässlich. Es bildet eine solide Grundlage für folgende Inhalte des Mathematikunterrichts: Wenn Schüler*innen Aufgaben wie 6 · 1, 10 · 8, 8 · 4 oder 72 : 9 schnell abrufen können, können sie mehrstellige Multiplikationen und Divisionen effizienter durchführen und Themen wie Bruchrechnung oder algebraische Inhalte leichter angehen. Die Beherrschung grundlegender Rechenaufgaben erhöht auch die Effizienz bei der Problemlösung, da sie die kognitive Belastung verringert. Anstatt mentale Kapazitäten für einfache Berechnungen aufzuwenden, können sich die Schüler*innen darauf konzentrieren, den Kontext der Aufgaben zu verstehen, geeignete Rechenoperationen auszuwählen und Strategien zu wählen. Darüber hinaus haben Multiplikation und Division klare Anwendungen in der realen Welt, von der Berechnung von Kosten und Maßen bis hin zum Teilen von Mengen und dem Arbeiten mit Prozentsätzen. Der Aspekt des „Umgangs mit Nullen" stärkt das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems zusätzlich. Wenn Schüler*innen 7 · 5.000 als „7 · 5 Tausend = 35 Tausend = 35.000" oder 60.000 : 100 als „Wie viele Hunderter sind in 60.000?" sehen, hilft ihnen das, flexibel mit Zehnern, Hundertern und Tausendern zu rechnen. Dieses Verständnis der Stellenwerte bildet die Grundlage für das flexible Rechnen mit mehrstelligen Zahlen (und später mit Dezimalzahlen) und für die Verknüpfung dieser Zahlen mit alltäglichen Kontexten, z. B. Schätzen, grobe Berechnungen und Einschätzen von Größenordnungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Schüler*innen, die das Multiplizieren lernen, können typische Fehler und Warnsignale zeigen. Ein häufiges Problem ist das Verlassen auf das Zählen mit den Fingern, selbst bei einfachen Rechenaufgaben. Einige Schüler*innen überspringen möglicherweise Aufgaben oder raten Antworten, indem sie zufällige Zahlen anstelle von berechneten Ergebnissen angeben. Eine übermäßige Abhängigkeit von additiven Strategien (wiederholte Addition) zeigt, dass Multiplikationsaufgaben noch nicht automatisiert sind. Bei der Division können Schüler*innen die Rechenoperationen verwechseln und die (leichtere) Multiplikation statt Division ausführen (z. B. 80 : 10 als 80 · 10 interpretieren). Möglicherweise habe sie Probleme mit den strukturellen Beziehungen der Multiplikation und Division als Umkehroperationen und erkennen beispielsweise bei der Lösung von 72 : 9 nicht, dass 9 · 8 = 72 ist. Auch die falsche Anwendung von Identitäts- und Umkehrregeln ist häufig, beispielsweise wenn nicht erkannt wird, dass 6 : 6 = 1 oder 7 : 1 = 7 ist.

Beim Umgang mit Nullen und Vielfachen von zehn können Schüler*innen die Nullen falsch handhaben. Sie können Nullen übersehen oder hinzufügen (z. B. 350 oder 3.500.000 statt 35.000 für 7 · 5.000) oder sie erkennen nicht, dass 50 · 20 als 5 · 2 mit zwei Nullen im Ergebnis berechnet werden kann. Solche Fehler deuten auf ein unsicheres Verständnis des Stellenwerts und der Beziehung zwischen Zehnern, Hundertern und Tausendern hin. Wichtige Warnsignale sind:

- die Verwendung von Zählen oder wiederholter Addition/Subtraktion für diese Aufgaben,
- Schwierigkeiten, zu erklären, was 80 : 10, 72 : 9 oder 60.000 : 100 im Kontext tatsächlich bedeutet,
- sichtbare Ängste, Stress oder Vermeidungsverhalten bei der Bearbeitung von Multiplikations-, Divisions- oder „Null"-Aufgaben.

Diese Anzeichen deuten darauf hin, dass Multiplikation, Division und Stellenwert noch nicht sicher verstanden oder automatisiert sind.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die Defizite bei dieser Aufgabe zeigen?
Die Unterstützung sollte schrittweise erfolgen, beginnend mit dem konzeptionellen Verständnis bis hin zur Automatisierung, wobei stets auf den Beziehungen zwischen bekannten Fakten aufgebaut werden sollte.

1. **Überprüfen Sie das operative Verständnis von Multiplikation und Division:**
   Stellen Sie sicher, dass die Schüler*innen verstehen, was Multiplikation und Division bedeuten, bevor sie sich auf das Auswendiglernen konzentrieren. Können sie beispielsweise 10 · 8 als „10 Gruppen zu je 8" oder „8 Gruppen zu je 10" erklären? Können sie 80 : 10 als gleichmäßige Aufteilung von 80 Gegenständen in 10 Gruppen darstellen? Verwenden Sie konkrete Materialien (Zählsteine, Blöcke, Arrays), Zeichnungen und reale Kontexte, um die Bedeutung zu vermitteln.

2. **Überprüfen und festigen Sie wichtige Multiplikationstabellen:**
   Stellen Sie zunächst sicher, dass die „Einstiegstabellen" (2er-, 5er- und 10er-Reihe) automatisiert sind, und erweitern Sie dann auf andere Reihen. Wenn diese nicht automatisiert sind, arbeiten Sie systematisch daran, bevor Sie flüssiges Dividieren erwarten, da Divisionsaufgaben wie 80 : 10 oder 72 : 9 von der Kenntnis der entsprechenden Multiplikationen abhängen.

3. **Nutzen Sie die umgekehrte Beziehung, um Divisionsaufgaben abzuleiten:**
   Üben Sie, jede Division mit einer Multiplikation zu verbinden:
   - 72 : 9 → „9 · ? = 72" → 9 · 8 = 72
   - 6 : 6 → „6 · ? = 6" → 6 · 1 = 6
   - 7 : 1 → „1 · ? = 7" → 1 · 7 = 7

Dies reduziert den Lernaufwand und stärkt das Verständnis, dass Division aus Multiplikation abgeleitet werden kann.

4. **Entwickeln Sie ein Verständnis für Stellenwerte und den „Umgang mit Nullen"**
   Verwenden Sie Zehnermaterialien und Stellenwerttafeln, um zu zeigen, dass:
   - 7 · 5.000 „7 mal 5 Tausend" → 35 Tausend → 35.000 ist,
   - 50 · 20 kann als 5 · 2 Zehner · Zehner gesehen werden,
   - 60.000 : 100 die Frage „Wie viele Hunderter sind in 60.000?" stellt.

Betonen Sie, dass 10 Einer 1 Zehner ergeben, 10 Zehner 1 Hunderter, 10 Hunderter 1 Tausender usw. Vermeiden Sie es, „Nullen hinzufügen oder entfernen" als Regel zu lehren, ohne dieses Verständnis zu vermitteln.

5. **Automatisierung auf der Grundlage von Verständnis**
   Sobald Bedeutung und Zusammenhänge klar sind, üben Sie regelmäßig, damit die Antworten schnell und zuverlässig werden. Verwenden Sie Muster (z. B. Aufbau von 5 · 8 auf 10 · 8), Rechenfamilien, Spiele und kurze tägliche Übungen. Ermutigen Sie die Schüler*innen, ihre Strategien laut zu erklären, damit effizientes Denken verinnerlicht wird und Fehlvorstellungen sichtbar werden.

Durch die Kombination von Grundlagenarbeit, dem Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen Multiplikation und Division und dem Verständnis der Stellenwerte für Vielfache von zehn können Kinder flexible und sichere Kopfrechenfähigkeiten entwickeln, die das spätere mathematische Lernen unterstützen.

Aufgabe 1.7: Multiplikation und Division

a) 3 · ___ = 126	c) 54 : ___ = 6
b) 172 = 4 · ___	d) ___ : 3 = 27

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe zielt darauf ab, dass die Schüler*innen die strukturelle Beziehung zwischen Multiplikation und Division verstehen. In den vier Unteraufgaben sollen die Schüler*innen eine fehlende Zahl in einer Aufgabe angeben, die entweder Multiplikation oder Division darstellt, z. B. „3 · ___ = 126" oder „172 = 4 · ___". Um diese Aufgaben richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen die Rolle der bekannten und unbekannten Zahlen erkennen und flexibel zwischen den Rechenoperationen wechseln. Sie müssen die Gleichungen nicht nur als Aufforderung zum Rechnen interpretieren, sondern als Ausdruck einer Teil-Ganzes-Beziehung, in der eine Größe aus der Multiplikation oder Division zweier anderer Größen resultiert, und das Gleichheitszeichen als Äquivalenzrelation erkennen. Diese operative Flexibilität ist ein Kennzeichen für ein tieferes Verständnis der Arithmetik und unerlässlich für den Zugang zu fortgeschritteneren mathematischen Inhalten.

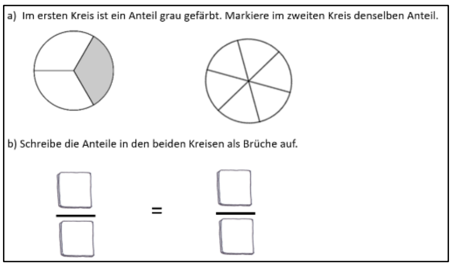
Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Erkennen und Anwenden der umgekehrten Beziehung zwischen Multiplikation und Division ist eine Schlüsselkompetenz für das spätere mathematische Lernen. Dieses Verständnis bildet die Grundlage für das Denken mit Verhältnissen, Proportionen, algebraischen Ausdrücken und funktionalen Beziehungen. Gemäß dem DiToM-Rahmenwerk werden solche Fähigkeiten als mathematische Schlüsselkompetenzen eingestuft, da ihr Fehlen den zukünftigen Lernfortschritt behindern oder sogar blockieren können. Schüler*innen, die eine Gleichung strukturell interpretieren können, beispielsweise verstehen, dass „3 · ___ = 126" (z.B. Wie groß muss eine Gruppe sein, wenn 3 dieser Gruppen insgesamt 126 ergeben) gleichbedeutend ist mit der Bestimmung von „126 : 3" (z.B. 126 werden in drei gleich große Gruppen zerlegt, wie groß ist eine dieser Gruppen?), zeigen mehr als nur das Abrufen von Verfahren: Sie beschäftigen sich mit mathematischem Denken. Die frühzeitige Entwicklung dieser Fähigkeit stellt sicher, dass die Schüler*innen besser für den Umgang mit symbolischen Darstellungen und mehrstufigen Problemlösungen in der Mathematik der Sekundarstufe gerüstet sind.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Schüler*innen, die den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division noch nicht verinnerlicht haben, zeigen häufig den Fehler, alle Gleichungen als Vorwärtsmultiplikation zu interpretieren, selbst wenn die umgekehrte Operation erforderlich ist. Wenn sie beispielsweise auf „172 = 4 · ___" stoßen, berechnen die Schüler*innen fälschlicherweise „172 · 4", anstatt zu dividieren. Andere raten aufgrund auswendig gelernter Fakten, ohne die Struktur der Gleichung zu berücksichtigen. Ein Missverständnis der Funktion des Gleichheitszeichens – als Hinweis zum Berechnen und nicht als Symbol für Gleichheit – kann ebenfalls zu verfahrenstechnisch korrekten, aber falschen Antworten führen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Es ist wichtig, verwandte Zahlenkonstanten (z. B. „6 · 4 = 24", „24 : 4 = 6" und „24 : 6 = 4") explizit miteinander zu verknüpfen, um die Umkehrbarkeit der Rechenoperationen hervorzuheben. Die Förderung der Verbalisierung der Überlegungen der Schüler*innen, beispielsweise durch die Frage „Welche Zahl ergibt multipliziert mit 4 das Ergebnis 172?", unterstützt die Verinnerlichung. Schließlich sollte die Variation der Position der gesuchten Zahl (am Anfang, in der Mitte oder am Ende der Gleichung) geübt werden, um das flexible Verständnis der Gleichungsstruktur zu vertiefen. Um Schüler*innen zu unterstützen, die mit diesem Konzept Schwierigkeiten haben, ist es hilfreich, mit visuellen Darstellungen zu arbeiten, die multiplikative Strukturen sichtbar machen (Polotskaia & Savard, 2021). Diese Modelle ermöglichen es den Schüler*innen zu sehen, wie eine Menge aus gleichen Teilen zusammengesetzt oder in diese zerlegt werden kann – entsprechend der Multiplikation bzw. Division.

Aufgabe 2.1: Darstellung und Interpretation gleichwertiger Brüche

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz



Diese Aufgabe konzentriert sich auf die Fähigkeit, äquivalente Brüche anhand von zwei Darstellungsaspekten zu erkennen und zu konstruieren: zunächst in einem visuellen Format (Schattieren von Teilen eines Kreises) und dann in symbolischer Notation (Schreiben einer Bruchgleichung). In Teil (a) werden die Schüler*innen gebeten, eine visuelle Darstellung zu vervollständigen, indem sie den gleichen Anteil eines Kreises schattieren, wie er in dem vorgegebenen Kreis gezeigt wird. In Teil (b) sollen sie diese Beziehung in Bruchschreibweise ausdrücken. Die geprüfte Schlüsselkompetenz ist die Koordination zwischen dem visuellen Verständnis von Teilen und Ganzen und ihrer formalen Darstellung als äquivalente Brüche.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis äquivalenter Brüche ist ein Grundpfeiler des Verständnisses rationaler Zahlen und stellt somit eine mathematische Schlüsselkompetenz dar. Es bildet die konzeptionelle Grundlage für Rechenoperationen mit Brüchen, proportionales Denken, Verhältnisbegriffe und algebraische Äquivalenz. Im Rahmen von DiToM wird die Erkenntnis, dass unterschiedlich aussehende Brüche dieselbe Menge darstellen können, als entscheidend für die Entwicklung flexiblen Zahlenverständnisses angesehen. Die Schüler*innen müssen verstehen, dass ein Bruch nicht nur eine Zahl darstellt, sondern auch eine Beziehung zwischen einem Teil und einem Ganzen – und dass diese Beziehung auch dann konstant bleibt, wenn sowohl Zähler als auch Nenner skaliert werden. Aufgaben, die visuelle und symbolische Ebenen kombinieren, fördern ein tieferes Verständnis und unterstützen den Übergang zum abstrakten Denken.

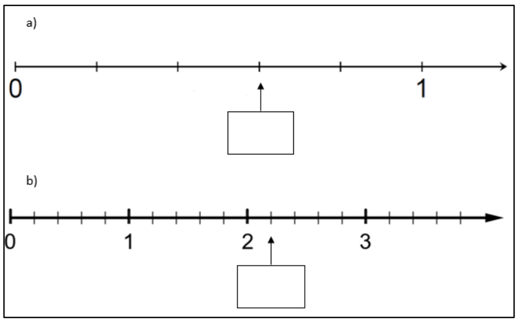
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Die Schüler*innen könnten im zweiten Kreis eine falsche Anzahl von Teilen schattieren, z. B. indem sie die Anzahl der schattierten Teile anstelle der proportionalen Größe zuordnen. Dies deutet eher auf eine Zählstrategie als auf relationales Denken hin und zeigt, dass sie den Zähler als statische Zahl und nicht als Teil eines Ganzen betrachten. In Teil (b) könnten die Schüler*innen den gegebenen Bruch ohne Umwandlung kopieren, nicht äquivalente, aber ähnlich aussehende Brüche schreiben (z. B. nur den Zähler verdoppeln) oder die Reihenfolge von Zähler und Nenner verwechseln.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Um ein solides Verständnis für äquivalente Brüche aufzubauen, sollten die Schüler*innen regelmäßig mit Manipulativen und visuellen Modellen arbeiten – wie Bruchkreisen, Balken oder Kacheln –, um gleiche Teile über verschiedene Teilungen hinweg zu sehen und zu erstellen. Der Schwerpunkt sollte darauf liegen, zu erkennen, wie viele Teile von wie vielen Teilen den gleichen Anteil ausmachen und wie sich sowohl die Anzahl der schattierten Teile als auch die Gesamtzahl der Teile parallel verändern. Lehrer*innen können die Schüler*innen dabei anleiten, den Skalierungsprozess in Worte zu fassen, z. B. „Ich habe die Anzahl der Teile insgesamt verdoppelt und die Anzahl der schattierten Teile ebenso verdoppelt." Dies unterstützt die Verinnerlichung der proportionalen Struktur, die hinter der Äquivalenz steht. Überbrückungsaktivitäten – z. B. Schattieren, dann Schreiben, dann mündliches Erklären – sind besonders effektiv, um die Verbindung zwischen visuellen Bildern und formalen Bruchgleichungen zu festigen.

Aufgabe 2.2: Symbolische Darstellung von Zahlen auf einem Zahlenstrahl



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe zielt auf die Fähigkeit der Schüler*innen ab, eine in Teilintervalle unterteilte Zahlengerade zu interpretieren und eine Bruch- oder Dezimalzahl entsprechend ihrer relativen Position zwischen 0 und 1 (oder darüber hinaus) zu platzieren. Die Schüler*innen müssen die Unterteilungen der Zahlengeraden analysieren, die Einheit bestimmen und die richtige Bruch- oder Dezimalzahl identifizieren, die einen bestimmten Punkt markiert. Dies erfordert ein Verständnis von Brüchen als Zahlen mit Größenordnungen und nicht nur als Teil-Ganzes-Beziehungen.

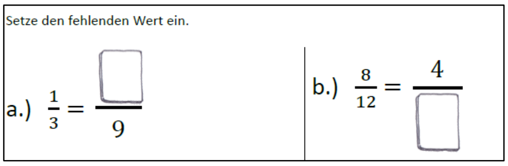
Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Fähigkeit, Brüche auf einem Zahlenstrahl zu lokalisieren, ist eine wichtige mathematische Schlüsselkompetenz, da sie eine Verlagerung des Verständnisses von Brüchen als Teile von Objekten hin zu Brüchen als Zahlen auf einer kontinuierlichen Skala widerspiegelt. Diese räumliche Interpretation von Brüchen bildet die Grundlage für das Vergleichen, Ordnen und Rechnen mit Brüchen. Im Rahmen von DiToM gelten die Schätzung und Positionierung auf dem Zahlenstrahl als starke Indikatoren für konzeptionelle Klarheit. Untersuchungen (z. B. Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) zeigen, dass Schüler*innen, die die metrische Struktur der Zahlengeraden verstehen, später eher Erfolg in Arithmetik, Algebra und Geometrie haben. Darüber hinaus bietet die Zahlengerade ein einheitliches Modell, das den Übergang zwischen natürlichen Zahlen, Brüchen, Dezimalzahlen und negativen Zahlen unterstützt.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Schüler*innen verlassen sich oft auf das Zählen von Markierungen und gehen dabei von einer Dezimalunterteilung der Einheit aus, anstatt über die Größe des Bruchteils nachzudenken. Beispielsweise interpretieren sie vier Teilungen fälschlicherweise als „Viertel", unabhängig davon, ob das Ganze in gleiche Teile unterteilt ist oder nicht. Ein weiterer häufiger Fehler ist die falsche Platzierung des Bruchteils – z. B. die falsche Platzierung von 3/4 bei 2/3 aufgrund mangelnder proportionaler Argumentation. Einige Schüler*innen raten möglicherweise aufgrund ihrer visuellen Intuition, anstatt den durch die Unterteilungen implizierten Nenner zu berechnen. In fortgeschritteneren Varianten können Schüler*innen Schwierigkeiten haben, wenn die Zahlengerade nicht bei 0 beginnt oder wenn unechte Brüche oder gemischte Zahlen beteiligt sind. Diese Fehler deuten auf eine unzureichende Integration von Größe, Notation und Struktur hin. Es gibt auch Schüler*innen, die eine falsche Dezimalzahl als Lösung angeben. Bitte beachten Sie Aufgabe 3.1, die sich mit diesem Problem befasst.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Um die Schüler*innen zu unterstützen, ist es unerlässlich, Zeit in den Aufbau eines soliden mentalen Modells der Zahlenreihe zu investieren, das Brüche und Dezimalzahlen umfasst. Lehrer*innen können interaktive Hilfsmittel wie Faltstreifen, Bruchlineale und digitale Zahlenreihen einsetzen, um das proportionale Denken zu fördern. Der Unterricht sollte sich darauf konzentrieren, wie man die Größe eines Einheitsintervalls bestimmt, wie man Bruchteile zählt und wie man diese Schritte mit dem geschriebenen Symbol in Verbindung bringt. Der Vergleich verschiedener Brüche auf derselben Linie hilft dabei, die relationale Größe und Äquivalenz zu verfestigen. Brückenaktivitäten – wie das Zeichnen von Brüchen auf einer Linie, das anschließende Schreiben in symbolischer Form und umgekehrt oder das Herstellen von Beziehungen zu den Schüler*innen bereits bekannten ikonischen Darstellungen (z. B. Kreisanteile) – stärken die repräsentativen Verbindungen.

Aufgabe 2.3: Erweitern und Kürzen von Brüchen

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz



Diese Aufgabe prüft die Kompetenz der Schüler*innen, äquivalente Brüche zu erkennen und zu erzeugen, indem sie Brüche erweitern oder kürzen. In Teilaufgabe a) müssen sie einen Bruch erweitern, in Teilaufgabe b) einen Bruch kürzen. Dies erfordert das Verständnis, dass Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert oder durch denselben Faktor dividiert werden müssen, um einen gleichwertigen Bruch zu erhalten.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis von Bruchgleichheit und die Fähigkeit, Brüche zu erweitern und zu kürzen, bilden eine wichtige Grundlage für das weitere Arbeiten mit Brüchen. Diese Kompetenz ist unerlässlich für das Addieren und Subtrahieren von Brüchen mit unterschiedlichen Nennern, da Brüche zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden müssen. Sie ermöglicht das Vergleichen von Brüchen und das Erkennen, dass verschiedene symbolische Darstellungen (wie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$) denselben mathematischen Wert repräsentieren können, eine fundamentale Einsicht der Zahlbereichserweiterung. Das Erweitern und Kürzen stärkt zudem das Verständnis multiplikativer Strukturen und bereitet auf proportionales Denken vor, das später bei Verhältnissen, Maßstäben und der Prozentrechnung zentral ist.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Bei Aufgabe a) zeigen sich häufig Fehler im Verständnis der multiplikativen Beziehung. Manche Schüler*innen verwenden additive Strategien und denken „von 3 auf 9 sind es 6 mehr, also muss ich auch beim Zähler 6 addieren" und schreiben $\frac{7}{9}$ statt $\frac{3}{9}$. Andere erkennen zwar, dass der Nenner von 3 auf 9 verändert wurde, verstehen aber nicht, dass dies eine Multiplikation mit 3 ist. Bei Aufgabe b) können ähnliche konzeptionelle Schwierigkeiten auftreten. Kinder erkennen möglicherweise nicht, dass 8 auf 4 durch Division mit 2 verändert wurde, und suchen daher keine systematische Beziehung zwischen den Nennern. Auch hier treten häufig additive Fehler auf: „Von 8 auf 4 sind es 4 weniger, also muss auch der Nenner 4 weniger werden" führt zu $\frac{8}{8}$ statt $\frac{4}{6}$. Andere multiplizieren falsch und denken „8 mal etwas ist 4" funktioniert nicht, also nehme ich 12 mal 2 und erhalte 24.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Förderung sollte mit anschaulichen Darstellungen beginnen, die Bruchgleichheit erfahrbar machen. Nutzen Sie Visualisierungen wie Kreismodelle oder Rechteckmodelle, um zu zeigen, dass $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{9}$ dieselbe Fläche darstellen. Falten Sie beispielsweise einen Papierstreifen oder einen Papierkreis. Digitale Tools oder Bruchstreifen können diese Visualisierung unterstützen.

Aufgabe 2.4: Vergleichen von Brüchen mit gleichem Nenner bzw. gleichem Zähler

Kreuze jeweils den kleinsten Bruch an.

a)	☐ $\frac{4}{3}$	☐ $\frac{5}{3}$	☐ $\frac{6}{3}$	☐ $\frac{7}{3}$
b)	☐ $\frac{5}{3}$	☐ $\frac{5}{4}$	☐ $\frac{5}{5}$	☐ $\frac{5}{6}$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe sollen die Schüler*innen jeweils den kleinsten Bruch aus vier vorgegebenen Brüchen ankreuzen. In Teil A haben alle Brüche denselben Nenner (Drittel): $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$. In Teil B haben alle Brüche denselben Zähler (5): $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{6}$. Die Aufgabe prüft, ob Schüler*innen die Größenbeziehungen von Brüchen verstehen und gezielt zwischen der Rolle von Zähler und Nenner unterscheiden können. Bei gleichem Nenner bestimmt der Zähler die Größe des Bruchs – ein größerer Zähler bedeutet einen größeren Bruch. Bei gleichem Zähler bestimmt hingegen der Nenner die Größe: Ein größerer Nenner führt zu einem kleineren Bruch, da das Ganze in mehr Teile geteilt wird. Teil A ist dabei eher intuitiv lösbar, während Teil B ein bewusstes Nachdenken über die Bedeutung des Nenners erfordert.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das sichere Vergleichen von Brüchen ist eine zentrale Voraussetzung für das weitere Arbeiten mit Bruchzahlen: zum Ordnen von Brüchen, zum Finden gemeinsamer Nenner und für alle vier Grundrechenarten mit Brüchen. Wer versteht, wie sich Änderungen von Zähler und Nenner auf die Größe eines Bruchs auswirken, betrachtet Brüche nicht nur als 'zwei Zahlen übereinander', sondern als Verhältnis. Die hier geforderte Unterscheidung – einmal Variation des Zählers bei konstantem Nenner, einmal Variation des Nenners bei konstantem Zähler – stärkt genau dieses Verhältnisdenken. Sie bereitet auf proportionales Denken, Prozentrechnung und das Arbeiten mit Termen vor, in denen Quotienten und Verhältnisse eine wichtige Rolle spielen. Gleichzeitig zeigt sie, ob Schüler*innen ein flexibles Bruchverständnis entwickelt haben oder sich auf oberflächliche Muster ('kleinere Zahlen = kleinerer Bruch') verlassen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Viele Schüler*innen nutzen in Teil A die korrekte Strategie 'der Bruch mit dem kleinsten Zähler ist der kleinste', da alle Nenner gleich sind. Sie übertragen diese Regel jedoch unreflektiert auf Teil B und wählen dort z. B. $\frac{5}{3}$ oder $\frac{5}{4}$, weil sie generell 'kleinere Zahlen' mit 'kleinerem Bruch' verknüpfen. Das deutet darauf hin, dass sie Zähler und Nenner nicht in Beziehung zueinander, sondern getrennt betrachten. Ein typisches Missverständnis in Teil B ist die Annahme, dass ein größerer Nenner einen größeren Bruch bedeutet ('6 ist größer als 3, also ist $\frac{5}{6}$ größer als $\frac{5}{3}$'). Hier wird die Rolle des Nenners als 'Teiler des Ganzen' nicht verstanden: Mehr Teilstücke bedeuten kleinere Teile. Beim Spezialfall $\frac{5}{5}$ erkennen einige Schüler*innen zwar, dass dieser Bruch gleich 1 ist, ordnen diese 1 aber falsch ein – etwa als 'größer' als alle anderen Brüche, ohne zu bedenken, dass $\frac{5}{3}$ und $\frac{5}{4}$ größer als 1 sind. Das weist auf ein unsicheres Verständnis unechter Brüche hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Hilfreich ist zunächst das Arbeiten mit Anschauungsmitteln wie Bruchstreifen, Kreis- oder Balkenmodellen. Lassen Sie die Schüler*innen z. B. $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$ als über 1 hinausgehende Streifen legen und vergleichen. Anschließend können die Brüche mit gleichem Zähler, aber unterschiedlichen Nennern (z. B. $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{6}$) dargestellt werden, um sichtbar zu machen: Je mehr Teile das Ganze hat, desto kleiner ist jeder Teil. Darüber hinaus sollten Vergleichsaufgaben systematisch variiert werden. Geben Sie Serien wie $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ (gleicher Nenner) und $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{6}$ (gleicher Zähler) zum Sortieren nach Größe. Anschließend sollen die Schüler*innen beschreiben, was sich verändert hat (Zähler oder Nenner) und wie sich das auf die Größe auswirkt. So wird strukturiertes Betrachten statt bloßer Zahlenspielerei gefördert. Auch die Einbindung des Zahlenstrahls ist sinnvoll: Gerade bei Teil B wird durch die Position auf dem Zahlenstrahl anschaulich, dass $\frac{5}{6}$ näher bei 0 liegt als $\frac{5}{5}$ oder $\frac{5}{4}$, obwohl die Zahlen im Nenner größer wirken. Schließlich sollten Begründungen eingefordert werden, das zwingt dazu, über die Rolle von Zähler und Nenner nachzudenken und nicht nur auf Intuition zu vertrauen.

Aufgabe 2.5: Rechnen mit Brüchen – alle Grundrechenarten

Berechne den fehlenden Wert.

a) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=$ ______

b) $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=$ ______

c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=$ ______

d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=$ ______

e) $3:\frac{2}{3}=$ ______

f) $\frac{3}{4}:\frac{4}{5}=$ ______

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
In dieser Aufgabe bearbeiten die Schülerinnen sechs Teilaufgaben (a) – f)), in denen alle vier Grundrechenarten mit Brüchen vorkommen. Teilaufgabe a) prüft die Addition gleichnamiger Brüche, Teilaufgabe b) die Subtraktion mit unterschiedlichen Nennern. Die Teilaufgaben c) und d) testen die Multiplikation, während e) und f) den Umgang mit dem Kehrwert bei der Division prüfen. Der Schwierigkeitsgrad steigt stufenweise an, sodass erkennbar wird, ob die Schülerinnen die Rechenregeln flexibel anwenden und sicher zwischen den Rechenarten unterscheiden können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das sichere Rechnen mit Brüchen gehört zu den zentralen Grundlagen der Sekundarstufe. Wer diese Fertigkeit beherrscht, kann Brüche in vielfältigen Kontexten nutzen – beim Arbeiten mit Termen und Gleichungen, in der Prozent- und Zinsrechnung oder bei Proportionalitätsaufgaben. Die Aufgabe zeigt, ob Schüler*innen Brüche nach starren Rezepten bearbeiten oder die Struktur der Bruchrechnung verstanden haben. Durch die Kombination einfacher Einstiegsaufgaben mit anspruchsvolleren Beispielen wird deutlich, ob sie beim Wechsel der Rechenart in fehlerhafte Muster zurückfallen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein verbreiteter Fehler ist die Behandlung nach dem Schema „Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner". So entsteht bei a) etwa $\frac{7}{10}$, weil 3+4 und 5+5 gerechnet wird. Bei b) wird oft ohne gemeinsamen Nenner subtrahiert oder fehlerhaft erweitert. In den Multiplikationsaufgaben c) und d) werden teilweise nur die Zähler multipliziert oder Vorgehensweisen aus der Addition übertragen. Bei den Divisionsaufgaben e) und f) zeigt sich häufig, dass das Konzept „Teilen durch einen Bruch" nicht verstanden ist: Statt mit dem Kehrwert zu arbeiten, wird „Zähler durch Zähler" gerechnet. Besonders aufschlussreich ist Teilaufgabe e) – das Ergebnis muss größer als 3 sein. Entstehen systematisch kleinere Ergebnisse, wurde die Vorstellung „Teilen macht immer kleiner" unreflektiert übernommen. Fehlende oder falsche Kürzungen weisen zudem auf Unsicherheiten bei äquivalenten Brüchen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Zunächst sollten die verschiedenen Rechenarten klar gegeneinander abgegrenzt werden. Gemeinsam mit den Schüler*innen kann erarbeitet werden, was bei Addition/Subtraktion, Multiplikation und Division jeweils zu tun ist. Eine Gegenüberstellung typischer Beispiele hebt die Besonderheit des gemeinsamen Nenners und die Rolle des Kehrwerts hervor. Ergänzend sollten Brüche mit Anschauungsmitteln wie Bruchstreifen, Kreisdiagrammen oder dem Zahlenstrahl verknüpft werden. Besonders wirksam ist es, typische Fehlstrategien explizit zu thematisieren und durch Gegenbeispiele zu widerlegen. Wenn das Verständnis vorhanden ist, benötigen viele Kinder Übung zur schrittweisen Automatisierung – zunächst mit gleichnamigen Brüchen, dann mit unterschiedlichen Nennern, weiter mit Multiplikation und schließlich mit Division. Alltagsnahe Kontexte wie das Teilen von Pizzen helfen, die Bruchrechnung an bedeutungsvolle Situationen anzubinden. Sinnvoll ist außerdem, vor dem Rechnen abzuschätzen, ob das Ergebnis größer oder kleiner als 1 bzw. als der Ausgangswert sein wird – so werden grobe Fehler leichter erkannt.

Aufgabe 3.1: Fehlende Summanden in Dezimalgleichungen finden

Berechne den fehlenden Wert.	
a) $1{,}12 + 1{,}44 =$ ________	c) $1{,}8 +$ ________ $= 5{,}3$
b) ________ $+ 0{,}51 = 2$	d) $4{,}3 + 0{,}52 =$ ________

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Kompetenz der Schüler*innen, einen unbekannten Summanden in einer Dezimaladditionsgleichung zu berechnen, indem sie ihr Verständnis für Stellenwerte, die Struktur von Gleichungen und umgekehrte Rechenoperationen anwenden. In beiden Teilen wird den Schüler*innen eine Summe vorgelegt, in der eine Komponente fehlt:

Dies erfordert entweder subtraktives Denken oder ein konzeptionelles Verständnis der additiven Beziehung. Die Schlüsselkompetenz hierbei ist die Fähigkeit, grundlegende algebraische Strukturen und Dezimalarithmetik flexibel anzuwenden.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Lösen von Unbekannten in numerischen Gleichungen ist eine grundlegende Schlüsselkompetenz, um eine Brücke zwischen Arithmetik und Algebra zu schlagen. Im Rahmen von DiToM werden solche Aufgaben als frühes algebraisches Denken angesehen, die Schüler*innen müssen die Gleichung als Ganzes betrachten und die strukturelle Rolle der Unbekannten verstehen. Darüber hinaus stärkt der Umgang mit Dezimalwerten die Vertrautheit der Schüler*innen mit der Zehnerbasisstruktur und unterstützt den späteren Erfolg in Themen wie proportionalem Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen versuchen möglicherweise zu raten, anstatt die Subtraktion anzuwenden, insbesondere wenn sie sich nicht sicher sind, wie sie mit Dezimalstellen umgehen sollen. Ein typischer Fehler ist die falsche Ausrichtung der Dezimalstellen (z. B. 1,8 als 18 behandeln). In Teil b.) verwechseln die Schüler*innen möglicherweise die Position der Unbekannten und subtrahieren 0,51 von 1 statt von 2. Andere lösen die Gleichung möglicherweise durch Addition statt durch Subtraktion oder schreiben ein logisch falsches Ergebnis auf, das numerisch „passt", aber die Dezimalstruktur nicht berücksichtigt. Diese Fehler deuten auf Verfahrenslücken, Unsicherheit im Umgang mit Dezimalzahlen oder mangelnde Fähigkeiten zur Interpretation von Gleichungen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Eine wirksame Unterstützung umfasst das Üben der Lösung offener Rechenaufgaben unter Verwendung von Dezimalzahlengeraden, Stabmodellen oder Gleichungsausgleichsmodellen, um Beziehungen zu visualisieren und intelligente Berechnungsstrategien anzuwenden. Die Schüler*innen sollten dazu ermutigt werden, Gleichungen unter Verwendung der Subtraktion umzuschreiben, um die Unbekannte zu isolieren, und ihr Ergebnis zunächst zu schätzen, um ein Gefühl für die Plausibilität zu entwickeln. Wenn die Fehler in den strukturellen Beziehungen der Addition und Subtraktion als Umkehroperationen liegen, lohnt es sich auch zunächst noch einmal auf das Rechnen mit natürliche Zahlen zurückzugehen.

Aufgabe 3.2: Dezimalzahlen subtrahieren

Berechne den fehlenden Wert.

a) $23{,}5 - 1{,}12 =$ ___________

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
In dieser Aufgabe berechnen die Schüler*innen das Ergebnis der Subtraktion 23,5 − 1,12. Geprüft wird, ob sie Dezimalzahlen mit unterschiedlicher Stellenanzahl sicher subtrahieren können. Zentral ist das Verständnis, dass Dezimalzahlen stellenwertgebunden sind (23,5 entspricht 23,50) und dass die Dezimalkommas korrekt ausgerichtet werden müssen. Die Aufgabe erfordert, Zehntel und Hundertstel bewusst zu berücksichtigen und flexible Rechenstrategien anzuwenden, etwa das Zerlegen in 23,5 − 1 = 22,5 und anschließend 22,5 − 0,12.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Rechnen mit Dezimalzahlen ist für viele Inhalte der Sekundarstufe grundlegend. Sichere Subtraktion ist Voraussetzung für den Umgang mit Längen, Gewichten, Zeitangaben und Geldbeträgen sowie für Prozentrechnung und Sachaufgaben. Wer Dezimalzahlen korrekt stellenwertig verarbeitet, entwickelt ein tragfähiges Verständnis der Zehnerbasisstruktur und kann später leichter zwischen Brüchen, Dezimalzahlen und Prozentangaben wechseln.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Häufig richtet sich der Blick mehr auf die Ziffern als auf deren Stellenwert. Ein typischer Fehler ist die fehlerhafte Ausrichtung der Dezimalstellen, etwa wenn 1,12 unter 23,5 so notiert wird, dass die Stellen nicht übereinanderstehen. Manche Kinder behandeln die Zahlen wie ganze Zahlen, rechnen 235 − 112 und setzen das Komma anschließend beliebig. Andere Schwierigkeiten entstehen beim Entbündeln im Hundertstel- oder Zehntelbereich, sodass falsche Ergebnisse wie 22,3 oder 22,43 entstehen. Solche Fehler deuten darauf hin, dass das Stellenwertverständnis im Dezimalbereich noch nicht gefestigt ist.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Hilfreich ist es, das Rechnen zunächst an anschauliche Kontexte wie Geldbeträge zu knüpfen („23,50 € minus 1,12 €"). Die Schüler*innen können auf einer Zahlengeraden eintragen, wie sie schrittweise von 23,5 zu 22,38 gelangen. Beim schriftlichen Rechnen sollte das Auffüllen der Dezimalstellen (23,5 → 23,50) geübt und die korrekte Ausrichtung der Kommas thematisiert werden. Außerdem sollten die Schüler*innen ihr Ergebnis zunächst grob schätzen („etwa 22"), um die Plausibilität zu prüfen und das Größenverständnis zu stärken.

Aufgabe 3.3: Eine passende Dezimalzahl finden

Schreibe eine Dezimalzahl auf, die…

a) … größer ist als 2,6: _______

b) … kleiner ist als 0,06: _______

c) … größer ist als - 2,5: _______

d) … kleiner ist als - 0,3: _______

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe sollen die Schüler*innen jeweils eine Dezimalzahl notieren, die bestimmte Ungleichungen erfüllt. In Teil a) ist eine Zahl gesucht, die größer ist als 2,6, in Teil b) eine, die kleiner ist als 0,06. In Teil c) soll eine Dezimalzahl größer als −2,5 gefunden werden, in Teil d) eine kleiner als −0,3. Es gibt jeweils unendlich viele richtige Lösungen – entscheidend ist, dass die gewählte Zahl korrekt auf der Zahlengerade verortet wird. Die Aufgabe prüft, ob die Schülerinnen ein tragfähiges Verständnis von Dezimalzahlen haben, sowohl im positiven als auch im negativen Bereich, und ob sie Ungleichungen sicher interpretieren können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Einordnen und Vergleichen von Dezimalzahlen, auch im negativen Bereich, ist Voraussetzung für viele Inhalte der Sekundarstufe – etwa bei Sachaufgaben zu Temperatur, Höhe oder Gewinn/Verlust sowie bei funktionalen Zusammenhängen. Wer sicher entscheiden kann, ob eine Dezimalzahl größer oder kleiner als eine andere ist, hat verstanden, dass Zahlen auf einer kontinuierlichen Zahlengeraden liegen und dass zwischen zwei Zahlen immer weitere existieren. Gerade die Kombination aus positiven und negativen Dezimalzahlen fordert die Schüler*innen heraus, ihre Vorstellungen über „größer" und „kleiner" auch im negativen Bereich bewusst anzuwenden.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

In den Teilen A und B zeigen sich häufig Stellenwertprobleme: Manche Kinder wählen etwa 2,59 als Zahl „größer als 2,6" oder 0,6 als Zahl „kleiner als 0,06". Hier wird „59" als größer als „6" gedeutet, ohne den Stellenwert zu berücksichtigen. In den Teilen c) und d) treten zusätzlich Missverständnisse zur Ordnung negativer Zahlen auf. Typisch ist die Annahme, dass −3 größer sei als −2,5, weil „3 größer ist als 2,5", oder dass −0,25 kleiner sei als −0,3, weil 25 kleiner als 30 ist. Solche Antworten zeigen, dass das Vorzeichen nicht einbezogen wird und die Richtung der Zahlengeraden im negativen Bereich noch nicht verinnerlicht ist.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Hilfreich ist intensives Arbeiten mit der Zahlengeraden, zunächst nur im positiven, dann erweitert um den negativen Bereich. Die Schülerinnen können vorgegebene Zahlen wie 2,6 oder −2,5 markieren und anschließend Beispiele für „größer als" und „kleiner als" eintragen. Dabei sollte thematisiert werden, dass zwischen zwei Zahlen immer weitere liegen und dass im negativen Bereich „weiter links" zugleich „kleiner" bedeutet. Das Umschreiben von Dezimalzahlen in gleichwertige Darstellungen (z. B. 0,06 als 0,060) kann Stellenwertprobleme entschärfen. Die Schüler*innen sollten außerdem begründen, warum ihre Zahl tatsächlich größer oder kleiner ist („Ich habe 2,61 gewählt, weil es rechts von 2,6 liegt"). So wird das Größenverständnis nachhaltig gestärkt.

Aufgabe 4.1: Fehlende ganze Zahl in Grundrechenaufgaben bestimmen

Berechne den fehlenden Wert.

a) $-4 + 2 =$ ____	e) $-5 \cdot (-3) =$ ____
b) $-1 +$ ____ $= -5$	f) ____ $\cdot -2 = -10$
c) $-3 - 5 =$ ____	g) $-18 : (-9) =$ ____
d) $-2 -$ ____ $= 4$	h) $36 :$ ____ $= -3$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
In dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen in verschiedenen Gleichungen mit ganzen Zahlen den fehlenden Wert bestimmen. Dabei kommen alle Grundrechenarten vor, und die Unbekannte kann an unterschiedlichen Stellen stehen, etwa in Aufgaben wie „−4 + 2 = ☐", „−1 + ☐ = −5" oder „☐ · (−2) = −10". Gefordert ist, dass die Schüler*innen sowohl mit negativen Zahlen sicher umgehen als auch verstehen, wie man eine Gleichung strukturiert „auflöst", um die Lücke zu füllen. Die Schlüsselkompetenz besteht darin, Grundrechenarten mit Vorzeichen zu beherrschen und Umkehraufgaben flexibel zu nutzen, um den gesuchten Wert zu ermitteln.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Lösen solcher Lückenaufgaben bildet eine wichtige Brücke vom ausführenden Rechnen zum algebraischen Denken. Die Schüler*innen müssen die Gleichung als Ganzes betrachten und erkennen, welche Zahl eingesetzt werden muss, damit die Beziehung stimmt. Damit verbunden ist das Verständnis, dass Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division Umkehroperationen sind. Gleichzeitig vertieft die Aufgabe den sicheren Umgang mit negativen Zahlen, der für viele Kontexte bedeutsam ist – etwa bei Temperaturangaben, Höhenunterschieden oder Kontoständen. Wer solche Aufgaben sicher löst, verfügt über ein Fundament für das spätere Lösen von Gleichungen und das Arbeiten mit Termen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Typisch sind zunächst Fehler im Umgang mit Vorzeichen. So wird etwa „−4 + 2" zu „−6" oder „+6" gerechnet, weil die Richtung der Zahlengeraden nicht sicher verinnerlicht ist. Bei Lückenaufgaben wie „−1 + ☐ = −5" wird häufig die falsche Umkehroperation gewählt, sodass statt „−4" Ergebnisse wie „4" oder „−6" auftreten. In Multiplikationsaufgaben wie „☐ · (−2) = −10" zeigen sich Unsicherheiten bei den Vorzeichenregeln. Manche Schüler*innen erkennen zwar, dass man durch −2 teilen müsste, sind aber unsicher über das Vorzeichen des Ergebnisses. Antworten, die die Gleichung nicht erfüllen, sind ein deutliches Warnsignal dafür, dass Gleichungen als „Rechenanweisung von links nach rechts" gelesen werden statt als Beziehung, die auf beiden Seiten denselben Wert ausdrückt.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Hilfreich ist es, das Rechnen mit ganzen Zahlen an anschauliche Darstellungen zu knüpfen, etwa an einer Zahlengeraden, Temperaturskalen oder Kontostände („−4 Euro + 2 Euro"). Für Lückenaufgaben sollte die Gleichung gemeinsam „rückwärts" gedacht werden: Was muss ich mit der bekannten Zahl tun, um zum Ergebnis zu kommen? Dies kann durch einfache Sprechweisen unterstützt werden („Um die Lücke zu finden, mache ich das Gegenteil von plus 2"). Schrittweise aufgebaute Übungsreihen – zunächst nur eine Rechenart mit negativen Zahlen, dann Lücken an verschiedenen Positionen, schließlich gemischte Aufgaben – helfen, Sicherheit aufzubauen. Wichtig ist zudem, die Schüler*innen ihre Lösungen durch Einsetzen überprüfen zu lassen. So wird das Verständnis für Gleichungen als Beziehungen gestärkt.

Aufgabe 4.2: Rechnen mit negativen Zahlen

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe konzentriert sich auf die Fähigkeit der Schüler*innen, die Auswirkungen von Addition, Subtraktion und Multiplikation mit negativen Zahlen zu verstehen. Sie müssen die Aufgabe unter Berücksichtigung der korrekten Interpretation der Vorzeichen (+ und −) berechnen.

Berechne den fehlenden Wert.

a) $12 - (-5) =$ _______

b) $11 *$ ______ $= -44$

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis des Verhaltens negativer Zahlen bei grundlegenden Grundrechenarten ist für die Beherrschung der Algebra unerlässlich. Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen die bekannte Vorzeichenregel anwenden und dabei die Fähigkeit entwickeln, vorzeichenbehaftete Ausdrücke nicht nur anhand von Verfahren, sondern auch auf der Grundlage ihres Strukturverständnisses im Kopf zu manipulieren. Im Rahmen des DiToM-Konzepts fördert diese Aufgabe das Symbolverständnis, die strukturelle Flexibilität und das konzeptionelle Denken über Grundrechenarten und Größenordnungen – grundlegende Elemente für das Lösen von Gleichungen, das Verstehen von Funktionsverhalten und das Auswerten algebraischer Ausdrücke.

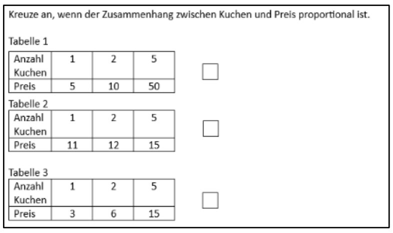
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

In Teil a subtrahieren viele Schülerinnen fälschlicherweise 5 von 12 und interpretieren die Subtraktionszeichen falsch. In Teil b fügen einige Schüler*innen möglicherweise eine positive ganze Zahl ein, ohne die Vorzeichenregel für die Multiplikation zu berücksichtigen. Alternativ verbinden einige die Subtraktion möglicherweise nur mit „kleineren" Ergebnissen und versäumen es, strukturell zu argumentieren. Solche Fehler deuten auf ein fragiles Verständnis der Rechenregeln mit negativen Zahlen hin, insbesondere in Fällen mit verschachtelten Vorzeichen oder Klammern. Sie zeigen auch, ob die Schüler*innen in der Lage sind, von einem Ergebnis rückwärts zu denken – eine wesentliche Fähigkeit in der Algebra.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Schüler*innen profitieren von Aufgaben, die Vorzeichen-Kombinationen (z. B. (+)(+), (+)(−), (−)(+), (−)(−)) explizit mit Anschauungsmitteln wie Zahlengerade oder farbigen Zählsteinen kontrastieren. Lehrer*innen können strukturierte Satzmuster vorgeben, z. B. „Das Subtrahieren einer negativen Zahl ist dasselbe wie …", und den Lernenden helfen, Grundrechenarten zu verbalisieren. Wenn die Schüler*innen Beispiele erstellen, bei denen sie die Vorzeichen bewusst variieren und das Ergebnis beobachten, kann dies dazu beitragen, die Muster zu verinnerlichen. Insbesondere in Teil b hilft die Einführung des Multiplikationsdreiecks (Faktor 1 x Faktor 1 = Produkt) und das Rückwärtsrechnen vom Produkt den Schüler*innen, fehlende Vorzeichen logisch abzuleiten. Letztendlich kann regelmäßiges Üben von Umkehraufgaben – vom Ergebnis zum Eingabewert – ein solideres algebraisches Denken aufbauen.

Aufgabe 5.1: Identifizieren proportionaler Beziehungen in tabellarischen Darstellungen



Kreuze an, wenn der Zusammenhang zwischen Kuchen und Preis proportional ist.

Tabelle 1

Anzahl Kuchen	1	2	5
Preis	5	10	50

☐

Tabelle 2

Anzahl Kuchen	1	2	5
Preis	11	12	15

☐

Tabelle 3

Anzahl Kuchen	1	2	5
Preis	3	6	15

☐

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, tabellarische Daten zu analysieren, um festzustellen, ob zwischen zwei Größen ein proportionales Verhältnis besteht. In jeder der drei Tabellen sollen die Lernenden untersuchen, ob das Verhältnis zwischen den Spalten durch einen konstanten Multiplikationsfaktor beschrieben werden kann, der das bestimmende Merkmal der direkten Proportionalität ist. Die Schüler*innen müssen ein Kreuz setzen, wenn die Tabelle direkt proportional ist.

Um diese Aufgabe erfolgreich zu lösen, hier einige Beispiele:

- Überprüfe, ob die Quotienten (z. B. y : x) über alle Zeilen hinweg konstant sind.
- Überprüfe, ob die „Kreuzmultiplikation“ gleichwertige Produkte ergibt.
- Stelle fest, ob eine konsistente Regel wie „mit 3 multiplizieren” oder „verdoppeln” gilt.

Diese Form der Analyse erfordert die Berücksichtigung der numerischen Struktur und der zugrunde liegenden multiplikativen Muster, nicht nur der oberflächlichen Merkmale.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Verständnis proportionaler Beziehungen ist ein grundlegender Bestandteil des funktionalen und algebraischen Denkens. Im DiToM-Rahmenwerk unterstützt diese Aufgabe die Entwicklung des relationalen Denkens, insbesondere das Erkennen von Strukturen in Daten. Die Fähigkeit, zu bestimmen, ob eine Beziehung proportional ist, bildet eine wesentliche Grundlage für die Interpretation linearer Funktionen, Skalierungsprobleme und grafischer Darstellungen. Sie fördert auch die Flexibilität beim Arbeiten mit verschiedenen Darstellungsformen – Tabellen, Grafiken, verbalen Beschreibungen und Gleichungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen behandeln Beziehungen möglicherweise als proportional, wenn sie oberflächliche Zunahmen feststellen (z. B. „beide Zahlen werden größer“), ohne die Konstanz des Verhältnisses zu überprüfen. Andere vergleichen möglicherweise absolute Unterschiede anstelle von Verhältnissen und verwechseln dabei additives mit multiplikativem Denken. Wenn beispielsweise beide Werte um 2 zunehmen, könnten Schüler*innen fälschlicherweise auf Proportionalität schließen. Fehler können auch durch unachtsames Rechnen entstehen (z. B. durch falsche Division oder das Überspringen von Werten). Diese Muster spiegeln unterentwickelte Fähigkeiten im Vergleich durch Multiplikation, in der Interpretation von Verhältnissen und in der symbolischen Verallgemeinerung wider. In einigen Fällen könnten Schüler*innen eine nicht proportionale Tabelle aufgrund einfach aussehender Zahlen falsch klassifizieren oder alle Tabellen überkreuzen, um eine Analyse zu vermeiden. Solche Tendenzen unterstreichen die Notwendigkeit stärkerer Strukturierungsstrategien und mehr Selbstvertrauen bei der Überprüfung.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Eine wirksame Unterstützung umfasst die Bereitstellung von Hilfsmitteln für die Schüler*innen, mit denen sie die Proportionalität systematisch überprüfen können, z. B. durch die Berechnung von Verhältnissen Zeile für Zeile, die Verwendung von Einheitsratenanalysen oder Anschauungsmittel wie doppelte Zahlenstrahlen. Lehrer*innen können vorführen, wie man Ergebnisse verbal erklärt („Da 6 : 2 = 3 und 9 : 3 = 3 ist, ist das Verhältnis konstant“) und die Schüler*innen dazu ermutigen, bei der Analyse von Tabellen Checklisten zu verwenden. Paarweise Diskussionsaufgaben, bei denen die Schüler*innen verteidigen, ob eine Tabelle proportional ist oder nicht, können das logische Denken vertiefen. Die Verknüpfung von

Tabellen mit realen proportionalen Szenarien (z. B. Rezepte, Preise, Geschwindigkeiten) hilft, das Verständnis zu festigen und den Transfer zu fördern.

Aufgabe 5.2: Lösen eines proportionalen Denkproblems im Alltag

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

2 kg Kartoffeln kosten 2,40 €. Berechne den Preis für 5 kg Kartoffeln.

Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen multiplikatives Denken anwenden, um ein Proportionalitätsproblem zu lösen, das in einen vertrauten Alltagskontext eingebettet ist. Angenommen, 2 kg Kartoffeln kosten 2,40 €, müssen die Schüler*innen den Preis für 5 kg ermitteln. Dazu müssen sie einen konstanten Preis pro Kilogramm (1,20 € pro kg) erkennen und diesen auf eine neue Menge skalieren. Der richtige Ansatz besteht entweder darin, mit Einheitspreisen zu rechnen (2,40 € durch 2 teilen und mit 5 multiplizieren) oder eine Proportion aufzustellen und zu lösen. Oder man interpretiert 5 = 2 + 2 + 1 und addiert 2,40 + 2,40 + 1,20. Die Aufgabe testet nicht nur die verfahrensorientierte Fähigkeit, sondern auch das konzeptionelle Verständnis dafür, wie Mengen in direktem Verhältnis zueinander wachsen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Proportionales Denken ist ein Grundpfeiler des mathematischen Denkens. Es ermöglicht den Schüler*innen, reale Zusammenhänge zu interpretieren und zu modellieren, die Skalierungen, Einheitsraten und multiplikative Vergleiche beinhalten. Im DiToM-Rahmenwerk unterstützt diese Art von Aufgabe wichtige Entwicklungsschritte in Richtung funktionales Denken und bereitet die Lernenden auf fortgeschrittene Themen wie lineare Funktionen und Prozentrechnungen vor. Darüber hinaus fördert sie das Zahlenverständnis und die Flexibilität bei der Anwendung verschiedener Strategien auf proportionale Situationen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

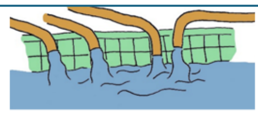
Die Schüler*innen könnten fälschlicherweise additives Denken anwenden, z. B. indem sie „2 kg → 2,40 € berechnen, also 5 kg → 2,40 € + 5 €“ oder andere inkonsistente Sprünge, was darauf hindeutet, dass sie die proportionale Struktur nicht verstehen. Andere versuchen möglicherweise, mit 2 zu skalieren und dann zu subtrahieren (z. B. 2 kg → 2,40 €, 4 kg → 4,80 €, und leiten daraus irgendwie 5 kg ab), was auf eine teilweise Anwendung der Strategie ohne die erforderlichen Voraussetzungen hindeuten kann. Einige Lernende schätzen einfach einen Preis, der „vernünftig erscheint”, was eine oberflächliche Vertrautheit mit dem Kontext, aber ein schwaches quantitatives Denken zeigt. Fehler können auch durch ungenaue Berechnungen oder falsche Divisionen entstehen (z. B. Division von 5 durch 2,40 statt umgekehrt). Diese Muster deuten auf Lücken in der Skalierungslogik, im Verständnis der Einheitsrate oder in der Interpretation realer Mengen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung sollte sich darauf konzentrieren, ein starkes intuitives und verfahrensorientiertes Verständnis der Proportionalität aufzubauen. Durch die Verwendung von doppelten Zahlenstrahlen oder Verhältnis-Tabellen können die Schüler*innen Beziehungen visualisieren und schrittweise skalieren. Lehrer*innen können verbale Stützfragen stellen wie „Wie viel kostet 1 kg?“ oder „Was passiert, wenn du doppelt so viel kaufst?“ Die Förderung verschiedener Strategien – Einheitsrate, Proportionsaufstellung, schrittweise Skalierung – hilft den Schüler*innen, Flexibilität und Fehlerprüfungsgewohnheiten zu entwickeln. Die Verknüpfung solcher Probleme mit realen Einkaufserfahrungen kann ebenfalls das Engagement und das Verständnis stärken.

Aufgabe 5.3: Lösen einer Aufgabe mit umgekehrter Proportionalität

Ein Schwimmbecken wird mit Schläuchen gefüllt. Aus jedem Schlauch kommt pro Stunde immer dieselbe Menge Wasser. Aus Erfahrung weiß man, dass das Becken mit vier Schläuchen in 6 Stunden gefüllt wird.



Berechne, wie viele Schläuche man braucht, wenn man das Becken in 2 Stunden füllen möchte.

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe beinhaltet ein reales Szenario, in dem die Schüler*innen die Beziehung zwischen Zeit und Menge bei einem Füllvorgang verstehen müssen. Konkret füllen vier identische Wasserhähne einen Pool in 6 Stunden. Die Frage lautet nun: Wie viele Wasserhähne sind erforderlich, um denselben Pool in nur 2 Stunden zu füllen? Um die Aufgabe zu lösen, müssen die Schüler*innen erkennen, dass umso mehr Wasserhähne erforderlich sind, je schneller die Aufgabe erledigt werden muss. Obwohl dies nicht ausdrücklich angegeben ist, handelt es sich um einen Fall von umgekehrter Proportionalität, bei dem eine Größe zunimmt, wenn die andere abnimmt. Eine sinnvolle und leicht verständliche Strategie besteht darin, die bekannten und gewünschten Werte in einer Tabelle oder einem Verhältnisdiagramm zu organisieren:

Anzahl der Wasserhähne	Zeit (in Stunden)
4	6
?	2

Von hier aus können die Schüler*innen folgern, dass, da die Zeit durch 3 geteilt wird (von 6 auf 2 Stunden), die Anzahl der Wasserhähne mit 3 multipliziert werden muss, was zu folgendem Ergebnis führt: $4 \cdot 3 = 12$ Wasserhähne. Diese Strategie betont das relationale Denken und unterstützt einen proportionalen Denkansatz, ohne auf formelhafte oder abstrakte Methoden zurückzugreifen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Fähigkeit, Beziehungen zu verstehen, in denen Größen in entgegengesetzte Richtungen interagieren, ist ein wichtiger Aspekt des flexiblen multiplikativen Denkens. Im Gegensatz zu direkten Proportionen erfordern inverse Beziehungen eine andere Art von Strukturbewusstsein. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept hilft die Beherrschung dieser Fähigkeit den Schülern, ihr quantitatives Denken zu erweitern und bereitet sie auf fortgeschrittene Themen wie Arbeitsprobleme, Raten und funktionales Denken vor. Situationen wie diese fördern auch die Fähigkeiten der Schüler, reale Beziehungen mithilfe mathematischer Werkzeuge zu modellieren und zu verstehen.

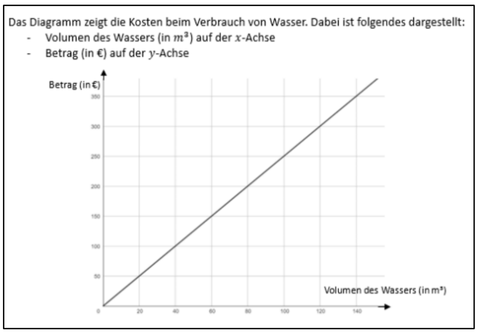
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen könnten das Szenario fälschlicherweise als einen Fall direkter Proportionalität interpretieren und davon ausgehen, dass eine Verkürzung der Zeit auch zu einer Verringerung der Anzahl der Wasserhahndrehungen führen sollte – was möglicherweise zu falschen Antworten wie 1 Drehung oder 2 Drehungen führt. Andere wenden möglicherweise arithmetische Strategien inkonsistent an oder kehren die Proportionalität um, indem sie die Anzahl der Drehungen dividieren, anstatt sie zu erhöhen. Ein häufiges Missverständnis besteht darin, die Situation additiv statt multiplikativ zu behandeln (z. B. „2 ist 4 weniger als 6, also 4 Klicks abziehen"). Diese Muster deuten auf eine mangelnde Vertrautheit mit inversen Strukturen und der Rolle der Skalierung in entgegengesetzte Richtungen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Der Unterricht kann mit Anschauungsmitteln oder konkreten Beispielen beginnen, die zeigen, wie mehr Menschen oder Geräte, die zusammenarbeiten, eine Aufgabe schneller erledigen können. Die Verwendung von doppelten Zahlenstrahlen oder strukturierten Tabellen wie der oben gezeigten hilft, die multiplikativen Beziehungen deutlich zu machen. Es ist auch nützlich, gezielte Fragen zu stellen, wie z. B. „Was passiert, wenn du in der Hälfte der Zeit fertig sein musst?" oder „Wie verändert sich die Zeit, wenn du die Anzahl der Wasserhahndrehungen verdoppelst?" Die Bereitstellung von paarweisen Vergleichsaufgaben – eine direkte

und eine inverse – kann helfen, strukturelle Unterschiede hervorzuheben. Die Schüler*innen sollten dazu angeregt werden, ihre Überlegungen laut zu erklären und verschiedene Lösungswege zu vergleichen.

Aufgabe 5.4: Arbeiten mit Grafiken in einem proportionalen Kontext

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz



Diese zweiteilige Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, ein lineares Diagramm zu interpretieren und anzuwenden, das eine proportionale Beziehung darstellt. In Teil a) besteht die Aufgabe darin, einen Wert direkt aus dem Diagramm abzulesen: Es muss ermittelt werden, wie viele Kubikmeter Wasser für 200 € erhältlich sind. In Teil b) muss die Schüler*in den Preis für 300 m^3 Wasser bestimmen – einen Wert, der über den sichtbaren Bereich des Diagramms hinausgeht – und muss daher auf der Grundlage der im Diagramm beobachteten Änderungsrate berechnen. Die Schlüsselkompetenz besteht darin, die grafische Veranschaulichung mit dem zugrunde liegenden proportionalen Denken zu verbinden und zwischen dem Lesen des Diagramms und der modellbasierten Extrapolation zu unterscheiden.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Lesen und Interpretieren von Diagrammen ist eine zentrale mathematische Kompetenz. Diese Aufgabe schlägt eine Brücke zwischen der visuellen Dateninterpretation und dem funktionalen Denken. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept fördert diese Art von Aufgabe die folgenden Fähigkeiten: Verständnis der Steigung als Rate, Verwendung eines Diagramms als Entscheidungshilfe, Übersetzung zwischen grafischen, numerischen und verbalen Darstellungen. Darüber hinaus unterstützt diese Fähigkeit Kompetenzen im Bereich der mathematischen Modellierung, insbesondere beim Erkennen, wann Daten durch proportionales Denken statt durch Schätzungen erweitert werden müssen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

In Teil a) könnten die Schüler*innen die Achsen falsch lesen (z. B. Werte aufgrund ungewohnter Skalierung falsch ausrichten) oder zwischen Punkten falsch interpolieren. Wenn sie missverstehen, dass der Graph eine kontinuierliche Beziehung darstellt, beziehen sie sich möglicherweise nur auf beschriftete Gitterwerte und überspringen Zwischenpunkte. In Teil b) könnten einige Schüler*innen versuchen, visuell zu extrapolieren, obwohl der Graph bei 140 m^3 endet, was zu ungenauen oder spekulativen Antworten führt. Andere erkennen möglicherweise die lineare Struktur nicht und greifen auf Vermutungen oder irrelevante Strategien zurück. Ein weiterer typischer Fehler ist die Fehlinterpretation der Steigung – beispielsweise die Annahme, dass sie nichtlinear ansteigt oder sich außerhalb des sichtbaren Bereichs unvorhersehbar verändert. Diese Schwierigkeiten können auf Verständnislücken in Bezug auf proportionales Wachstum, lineare Extrapolation oder Konventionen zum Lesen von Graphen (wie gleiche Skalierung und Ausrichtung der Gitterlinien) zurückzuführen sein.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Eine gezielte Unterstützung sollte mit abgestützten Übungen zum Lesen von Grafiken beginnen, die die Schüler*innen dazu anleiten, die Werte auf beiden Achsen korrekt auszurichten, konstante Raten zu erkennen und Lineale oder Pauspapier zu verwenden, um die Orientierung beizubehalten. Bei der Extrapolation (Teil b) sollte der Unterricht den Schwerpunkt darauf legen, wie man die Einheitsrate aus der Grafik ermittelt (z. B. 1 € pro m^3 ; 5 € pro 20 m^3) und diese Beziehung dann numerisch oder über in einer Tabelle zu erweitern. Die Lehrkräfte könnten die Schüler*innen auch dazu ermutigen, in Worten auszudrücken, „was der Graph aussagt“ (z. B. „pro 20 Kubikmeter steigen die Kosten um 50 €“), um so die verbal-numerisch-visuellen Verbindungen zu verstärken. Der Vergleich des Graphen mit der entsprechenden Gleichung oder der Verhältnis-Tabelle stärkt ebenfalls den flexiblen Zugang zur zugrunde liegenden Struktur.

Aufgabe 5.5: Lösen einer Divisionsaufgabe im Alltag

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

> In einem Lagertank befinden sich 810 Liter Wasser. Jeden Tag werden 30 Liter Wasser aus dem Tank entnommen. Berechne, nach wie vielen Tagen der Tank leer sein wird.

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit, eine Divisionsaufgabe in einem zeitbasierten Kontext zu lösen, bei der eine Gesamtmenge (810 Liter Wasser) mit einer konstanten täglichen Rate (30 Liter pro Tag) verbraucht wird. Die Frage lautet, wie viele gleiche tägliche Entnahmen erforderlich sind, bis der Speichertank vollständig leer ist. Dazu muss die Division als „wie oft passt 30 in 810“ oder gleichwertig interpretiert werden:

810 : 30 = 27 Tage

Diese Interpretation erfordert ein Verständnis der wiederholten Subtraktion (oder Addition) über einen bestimmten Zeitraum hinweg und die Fähigkeit, einen realen Vorgang in eine symbolische Operation zu übersetzen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Im Rahmen des DiToM-Modells unterstützt diese Aufgabe Schlüsselkompetenzen im Bereich des multiplikativen Denkens, des funktionalen Denkens und der grundlegenden algebraischen Strukturierung. Die Schüler*innen müssen die zugrunde liegende Regelmäßigkeit („30 Liter pro Tag“) erkennen und auf einen wiederholten Prozess übertragen. Dies stärkt auch das Verständnis von Raten, Zeitmodellierung und der Interpretation der Division in nicht-räumlichen, prozessorientierten Kontexten. Ein solches Denken bildet die Grundlage für das spätere Lernen in den Bereichen lineare Funktionen, Wachstumsmuster und Differenzengleichungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

In der Praxis gehen viele Schüler*innen die Aufgabe mit den folgenden Strategien an:

- Wiederholte Subtraktion: Immer wieder 30 von 810 subtrahieren und die Schritte zählen.
- Wiederholte Addition: Jedes Mal 30 addieren, bis 810 erreicht ist, dann die Anzahl der Schritte zählen.
- Schätzfehler: Springen zu plausibel klingenden Zahlen wie 30 oder 25.
- Rechenfehler bei der Durchführung der schriftlichen Division oder Verwechslung von Dezimalstellen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung sollte sich darauf konzentrieren, den Schüler*innen zu helfen, ein internes Modell der gleichmäßigen Aufteilung über die Zeit hinweg zu entwickeln. Visuelle Hilfsmittel wie in gleiche Teile unterteilte Balken, Zahlenstrahlen oder Kalender können das Verständnis erleichtern. Lehrer*innen können die Schüler*innen dazu ermutigen, die Situation mit Divisionsgleichungen darzustellen und zu erklären, was jede Zahl bedeutet. Die Verbindung dieses Problems mit alltäglichen Routinen (z. B. täglicher Wasserverbrauch, Mahlzeitenportionen, Tagesbudget) kann die Vertrautheit erhöhen. Die Betonung strategischer Gruppierungen, wie z. B. die Aufteilung in 10-Tage-Einheiten (10 · 30 = 300), fördert effizientes Denken und die Kontrolle der Schätzung.

Aufgabe 5.6: Kombination von fixen und variablen Kosten im Alltag

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

> Sven hat 15 Freunde zu seiner Geburstagsfeier eingeladen. Er muss 50€ für den Partyraum und zusätzlich 10€ für jeden eingeladenen Freund bezahlen.
> Berechne, wie viel € Sven ingesamt für seine Geburtstagsfeier bezahlen muss.

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, grundlegende algebraische Modelle und Grundrechenarten im Alltag mit festen und variablen Kosten anzuwenden. Den Schüler*innen wird mitgeteilt, dass Sven 50 € für ein Spielzimmer und zusätzlich 10 € für jeden eingeladenen Freund ausgibt. Die Aufgabe besteht darin, die Gesamtkosten für die Geburtstagsfeier zu ermitteln.

Die erwartete Strategie lautet:

1. Berechnen Sie die variablen Kosten: 15 Ketten · 10 € = 150
2. Fügen Sie die Fixkosten hinzu: 150 € + 50 € = 200 € Gesamtkosten

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Diese Aufgabe bildet eine wichtige Grundlage für funktionales Denken und frühe Algebra, insbesondere für das Konzept linearer Modelle. Bei DiToM unterstützt sie die Entwicklung mathematischer Modellierungsfähigkeiten, der operativen Flüssigkeit und der Interpretation symbolischer Ausdrücke in angewandten Situationen. Das Verständnis des Unterschieds zwischen festen und variablen Komponenten ist für viele reale Kontexte zentral, beispielsweise für die Budgetierung, Preisgestaltung und Ressourcenplanung. Darüber hinaus stärkt diese Aufgabe die Fähigkeit der Schüler, mehrstufige Probleme zu strukturieren, was ein wesentliches Merkmal der mathematischen Problemlösung auf mittlerem Niveau ist.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein häufiger Fehler besteht darin, dass die Schüler*innen nur die variablen Kosten berechnen und die Fixkosten weglassen. Das zeigt ein unvollständiges Verständnis der Aufgabenstruktur, bei der nur eine Komponente (oft die am einfachsten zu berechnende) berücksichtigt wird. Andere Schüler*innen kehren möglicherweise die Schritte um (z. B. 50 € von 150 € subtrahieren) oder missverstehen die Rolle der einzelnen Zahlen. Einige multiplizieren möglicherweise fälschlicherweise alle Werte miteinander oder versuchen unnötige Grundrechenarten, was auf ein schwaches Verständnis der Aufgabenstellung hindeutet. Diese Fehler deuten auf Defizite beim Lesen mehrstufiger Aufgaben, beim Zuordnen realer Größen zu Grundrechenarten und beim Integrieren verschiedener numerischer Komponenten in eine einzige kohärente Lösung hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die Defizite bei dieser Aufgabe zeigen?

Lehrer*innen können die Lernenden unterstützen, indem sie die Aufgabe visuell strukturieren, z. B. mithilfe einer Tabelle mit zwei Zeilen (fixe und variable Kosten) oder indem sie die Gesamtkosten als Balken in zwei Teile unterteilt darstellen. Durch explizites Unterrichten und Üben der Struktur „Gesamt = fix + variabel” in verschiedenen Kontexten kann Vertrautheit mit linearen Modellen aufgebaut werden.

Aufgabe 5.7: Umrechnung eines Bruchs in einen Prozentsatz

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler, einen bekannten Bruch (drei Fünftel) in einen Prozentsatz umzuwandeln. Um sie zu lösen, müssen die Schüler*innen die Beziehung zwischen Brüchen und Prozentsätzen verstehen und erkennen, dass:

> Kreuze an, welcher Prozentsatz dem Bruch $\frac{3}{5}$ entspricht.
>
> ☐ 0.6%
> ☐ 6%
> ☐ 35%
> ☐ 60%

$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\ \%$ $\qquad$ $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\ \%$

Dazu muss entweder zuerst der Bruch in eine Dezimalzahl umgewandelt werden (durch Division des Zählers durch den Nenner) und dann mit 100 multipliziert werden, oder es müssen bekannte Bruch-Prozent-Äquivalenzen angewendet werden. Die Aufgabe erfordert somit sowohl Rechenfertigkeiten als auch ein konzeptionelles Verständnis von proportionalen Darstellungen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Umrechnung zwischen Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten ist in vielen Situationen des täglichen Lebens grundlegend (z. B. bei der Interpretation von Statistiken, Rabatten oder Datenvergleichen). Im Rahmen des DiToM-Modells fördert diese Fähigkeit das Verständnis rationaler Zahlen, die Flexibilität im Umgang mit Zahlen und die symbolische Übersetzung. Sie bereitet die Schüler*innen auf Aufgaben vor, die Prozentwachstum, Vergleiche und proportionales Denken in der Algebra und Datenkompetenz beinhalten. Die Beherrschung dieses Bereichs stärkt auch das Selbstvertrauen beim Umgang mit verschiedenen Darstellungen von Teilen und Ganzem, was in allen Bereichen der Mathematik entscheidend ist.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Viele Schüler*innen behandeln den Bruch fälschlicherweise als Dezimalzahl oder verwechseln die Rollen von Zähler und Nenner. Zum Beispiel:

- Die Auswahl von 0,6 % deutet darauf hin, dass die Schüler*innen 0,6 fälschlicherweise als bereits vorhandene Prozentzahl interpretieren.
- Die Wahl von 6 % ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass die Dezimalstelle einmal falsch verschoben wurde.
- 35 % kann aus einer Verwechslung von drei Fünfteln resultieren.

Diese Fehler deuten auf eine Verwirrung zwischen relativen Werten, der Verschiebung von Dezimalstellen und der Bedeutung von Prozent („pro Hundert") hin. Sie zeigen, dass ein besseres Verständnis dafür erforderlich ist, wie Brüche auf die hundertbasierte Skala der Prozentsätze abgebildet werden.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Lehrer*innen können die Lernenden unterstützen, indem sie Anschauungsmittel (z. B. 100er-Gitter, Kreisdiagramme) verwenden, um zu zeigen, wie Brüche wie $\frac{3}{5}$ dann 60 schattierten Quadraten von 100 Quadraten insgesamt entsprechen. Strukturierte Aktivitäten, bei denen häufig verwendete Referenzbrüche wiederholt in Prozent umgerechnet werden (wie $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$), können Vertrautheit schaffen und das Verständnis festigen.

Die Aufforderung an die Schüler*innen, immer zuerst in eine Dezimalzahl umzuwandeln und dann mit 100 zu multiplizieren, bietet eine zuverlässige Routine. Zahlenstrahlen und Prozentbalken können das Verständnis für äquivalente Darstellungen weiter vertiefen. Mündliche Erklärungen („Drei von fünf entspricht wie vielen von hundert?") helfen, das proportionale Denken zu festigen.

Aufgabe 5.8: Berechnung einer prozentualen Steigerung

Ein Preis von 30€ wird um 50% erhöht. Kreuze das Ergebnis nach der Erhöhung an.

☐ 80 €
☐ 45 €
☐ 35 €
☐ 15 €

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe prüft, ob die Schüler*innen in der Lage sind, eine prozentuale Erhöhung eines gegebenen Basiswerts richtig zu interpretieren und anzuwenden. Der Ausgangswert beträgt 30 und die Anweisung lautet, diesen Wert um 50 % zu erhöhen. Um zur richtigen Lösung zu gelangen, müssen die Schüler*innen berechnen, wie viel 50 % von 30 sind, und diesen Wert dann zum ursprünglichen Betrag addieren.

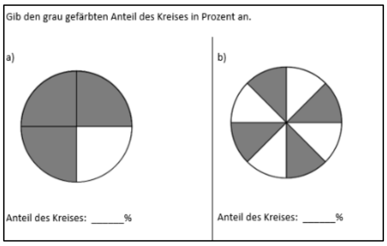
Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Fähigkeit, prozentuale Erhöhungen zu berechnen und zu interpretieren, ist sowohl im Alltag als auch in fortgeschrittenen mathematischen Kontexten eine Kernkompetenz. Sie ist unerlässlich, um Veränderungen bei Preisen, Bevölkerungswachstum, Finanzzinsen und statistischen Vergleichen zu verstehen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept unterstützt prozentuales Denken die Entwicklung von funktionalem Denken, proportionalem Denken und der Integration multiplikativer Strukturen über verschiedene Kontexte hinweg. Diese Aufgabe stärkt insbesondere die Flexibilität der Schüler*innen beim Wechsel zwischen additiver und multiplikativer Interpretation von Prozenten und trägt zu ihrer Fähigkeit bei, Verallgemeinerungen vorzunehmen und strukturbasiertes Denken auf zunehmend abstrakte Probleme anzuwenden.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiges Missverständnis, das in den Antworten der Schüler*innen zu beobachten ist, ist die Verwechslung von absoluten Werten und relativen Prozentwerten. Einige Schüler*innen addieren fälschlicherweise 50 zu 30 statt 50 % von 30 und kommen so zu einer falschen Antwort von 80. Das deutet auf ein Missverständnis der grundlegenden Natur von Prozenten als relative Maßeinheit hin. Eine andere Gruppe von Schüler*innen könnte 15 als Antwort wählen, weil sie die Aufgabe fälschlicherweise so interpretieren, dass lediglich 50 % von 30 gefragt sind, anstatt den gesamten erhöhten Wert zu berechnen. Es ist auch möglich, dass die Schüler*innen die Formulierung der Aufgabe falsch lesen oder falsch interpretieren und davon ausgehen, dass es sich um eine Subtraktions- oder Differenzaufgabe handelt, oder dass sie sich eher auf ihre Intuition als auf strukturierte Berechnungen verlassen. Solche Antworten offenbaren Lücken im konzeptionellen Verständnis, in der Verfahrenssicherheit und im Leseverständnis. Sie können auch auf eine unzureichende Verinnerlichung von Prozentrechnungen als skalierbare multiplikative Prozesse und auf einen Bedarf an mehr angeleiteter Übung bei der Unterscheidung zwischen Teil, Ganzem und Wachstumsrate hinweisen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Lehrkräfte können eine Hilfestellung bieten, indem sie reale Situationen modellieren, in denen Prozentsteigerungen natürlich vorkommen – wie Preisaufschläge, Lohnerhöhungen oder Bevölkerungswachstum – und so abstrakte Konzepte anhand konkreter Beispiele veranschaulichen. Visuelle Hilfsmittel wie Prozentbalken oder doppelte Zahlenstrahlen können den Schüler*innen helfen, sich vorzustellen, wie eine Steigerung um 50 % die ursprüngliche Menge vergrößert.

Eine klare Anleitung zur Unterscheidung zwischen Basis, Prozentsatz und Ergebnis innerhalb eines strukturierten Rahmens kann Verwirrung vermeiden und ein solideres Verständnis fördern. Darüber hinaus trägt die Verwendung sowohl additiver (z. B. „50 % finden und dann addieren") als auch multiplikativer Strategien (z. B. „mit 1,5 multiplizieren") und die Ermutigung der Schüler*innen, die Ergebnisse durch Schätzungen zu überprüfen, dazu bei, die strategische Flexibilität zu fördern.

Aufgabe 5.9: Interpretieren von Kreisdarstellungen und Umrechnen in Prozent



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Teile eines Ganzen anhand einer visuellen Darstellung – in diesem Fall ein in gleiche Sektoren unterteilter Kreis – zu interpretieren und diese Teile in Prozentzahlen umzuwandeln. Die Aufgabe besteht aus zwei Teilen:

- Teil a) zeigt einen Kreis, der in vier gleiche Sektoren unterteilt ist, von denen drei schraffiert sind.
- Teil b) zeigt einen Kreis, der in acht gleiche Sektoren unterteilt ist, wobei jeder zweite Sektor schraffiert ist, sodass vier von acht Sektoren schraffiert sind.

In beiden Fällen erfordert die richtige Lösung das Erkennen des schraffierten Anteils des Kreises und dessen Umrechnung in einen Prozentsatz. Diese Aufgabe beinhaltet die Umwandlung visueller Mengen in rationale Zahlen oder Brüche und anschließend in Prozentangaben, wodurch die Kompetenz im Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen unter Beweis gestellt wird.

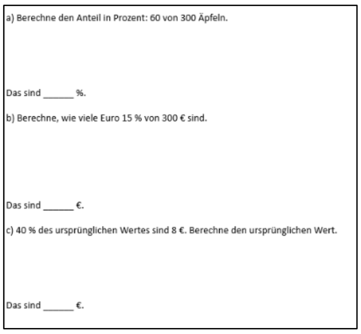
Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Umrechnung zwischen Anschauungsmitteln, Brüchen und Prozenten ist eine zentrale Fähigkeit in der Mathematikausbildung. Sie fördert ein tieferes Verständnis von Teil-Ganzes-Verhältnisen, proportionalem Denken und Schätzen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept stärken Aufgaben wie diese die konzeptionelle Flexibilität und die Fähigkeit, mathematische Darstellungen miteinander zu verknüpfen – ein entscheidendes Merkmal der mathematischen Kompetenz. Die Fähigkeit ist auch in Alltagskontexten von großer Bedeutung, beispielsweise bei der Interpretation von Diagrammen, Statistiken und Datenvisualisierungen, in denen Teil-Ganzes-Verhältnissen oft visuell eingebettet und in Prozentzahlen ausgedrückt sind.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiger Fehler, der in beiden Teilen der Aufgabe beobachtet wird, ist, dass die Schüler*innen zwar erkennen, wie viele Teile schattiert sind, diese Zahl dann aber fälschlicherweise als Prozentsatz angeben. In Teil a) könnten die Schüler*innen beispielsweise mit „3” antworten, weil drei von vier Teilen schattiert sind – wobei sie die Anzahl mit dem entsprechenden Prozentsatz verwechseln. Ähnlich schreiben die Schüler*innen in Teil b) oft „4”, weil vier von acht Sektoren schattiert sind, und übersehen dabei, dass der Bruch $\frac{4}{8}$ in einen Prozentsatz umgewandelt werden muss. Diese Fehler spiegeln eine oberflächliche Verarbeitung der visuellen Daten wider, bei der die Schüler*innen die schattierten Segmente zählen, aber die konzeptionelle Umwandlung in Prozent nicht vollständig durchführen. Ein weiteres häufiges Problem besteht darin, dass die Schüler*innen die Regelmäßigkeit in Teil b) möglicherweise nicht erkennen, da die abwechselnd schattierten Sektoren den unmittelbaren visuellen Eindruck von „der Hälfte“ verschleiern. Daher schätzen einige aufgrund des unregelmäßigen Musters fälschlicherweise weniger als 50 % an. Diese Fehler deuten darauf hin, dass stärkere Fähigkeiten bei der Verknüpfung konkreter und abstrakter Darstellungen erforderlich sind, insbesondere bei der Umrechnung zwischen Zahlen, Brüchen und Prozenten.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Um die Schüler*innen beim Erlernen dieser Fertigkeit zu unterstützen, können Lehrer*innen strukturierte Anschauungsmittel wie 100er-Gitter, Kreisdiagramme oder Bruchbalken einsetzen, um deutlich zu zeigen, wie Bruchteile mit Prozenten zusammenhängen. Wenn die Schüler*innen dazu angehalten werden, zunächst den Bruch zu benennen (z. B. „3 von 4”), bevor sie ihn in einen Prozentsatz umrechnen, wird der

Zwischenschritt verdeutlicht. Hilfreich ist auch, mit bekannten Referenzbrüchen (z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$) und den entsprechenden Prozentsätzen zu üben. Lehrer*innen können diesen Prozess laut vorführen: „Es gibt 4 gleiche Teile und 3 sind schraffiert. Das sind also drei Viertel. Wie viel sind drei Viertel in Prozent?“ Aktivitäten, bei denen Anschauungsmittel, Brüche, Dezimalzahlen und Prozentzahlen miteinander in Verbindung gebracht werden, können ebenfalls das Verständnis für verschiedene Darstellungsformen stärken.

Aufgabe 5.10: Prozentrechnen – Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert


a) Berechne den Anteil in Prozent: 60 von 300 Äpfeln.

Das sind ______ %.

b) Berechne, wie viele Euro 15 % von 300 € sind.

Das sind ______ €.

c) 40 % des ursprünglichen Wertes sind 8 €. Berechne den ursprünglichen Wert.

Das sind ______ €.

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe bearbeiten die Schüler*innen drei unterschiedliche Prozentaufgaben, die jeweils eine andere Konstellation der Größen Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert in den Mittelpunkt stellen. In Teil a) („Berechne den Anteil in Prozent: 60 von 300 Äpfeln") sollen sie den Prozentsatz bestimmen. In Teil b) („Berechne, wie viel Euro 15 % von 300 Euro sind") ist der Prozentwert gesucht. In Teil c) („40 % des ursprünglichen Wertes sind 8 Euro. Berechne den ursprünglichen Wert.") ist der Grundwert gesucht. Die Aufgabe prüft, ob die Schüler*innen flexibel zwischen diesen drei Größen wechseln können, ob sie erkennen, was gegeben und was gesucht ist, und ob sie die zugehörigen Beziehungen sinnvoll nutzen können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Prozentrechnung ist in vielen Alltagskontexten unverzichtbar – beim Rechnen mit Rabatten, Zinsen, Steuern oder statistischen Angaben. Ein sicheres Verständnis der Zusammenhänge zwischen Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert bildet eine wichtige Grundlage für proportionales Denken und für weiterführende Inhalte wie Zinsrechnung oder Wachstumsmodelle. Die Aufgabe zwingt die Schüler*innen dazu, Prozentaufgaben nicht als starres Einsetzschema zu sehen, sondern jeweils neu zu klären: „Was sind hier 100 %? Was ist gegeben? Was soll ich herausfinden?"

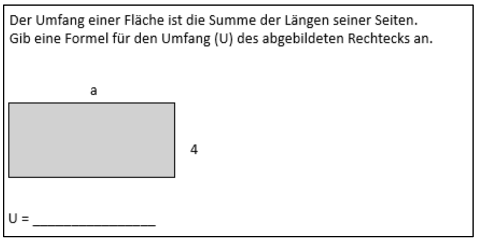
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

In Teil a) verwechseln manche Schüler*innen die Rolle von Zähler und Nenner und berechnen 300/60 · 100 statt 60/300 · 100, wodurch unrealistisch große Prozentsätze entstehen. In Teil b) wird 15 % häufig nicht als 0,15 verwendet, sondern als 15, wodurch aus „15 % von 300" plötzlich „15 · 300" wird. Besonders aufschlussreich ist Teil c): Hier wird häufig 8 · 0,4 gerechnet oder 8 durch 40 geteilt, statt zu erkennen, dass 8 der Prozentwert ist und eine Rückrechnung auf 100 % erfolgen muss. Wenn Schüler*innen Grundwert und Prozentwert verwechseln oder nicht benennen können, was in der Situation 100 % sein sollen, ist das ein klares Warnsignal für Lücken im Verständnis. Ebenso weist eine rein schematische Formelanwendung ohne Plausibilitätsprüfung auf fehlendes Verständnis hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Hilfreich ist das Arbeiten mit Anschauungsmitteln wie Strecken- oder Balkenmodellen. Dabei wird zunächst visualisiert, was 100 % darstellen, und anschließend markiert, wo sich der gegebene Wert befindet. Besonders wichtig ist es, die drei Aufgabentypen – Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert berechnen – explizit zu unterscheiden und mit typischen Fragestellungen zu verknüpfen. Die Schüler*innen sollten vor dem Rechnen in Worten formulieren, was 100 % sind und ob das Ergebnis größer oder kleiner als der gegebene Wert sein muss. Auch Überschlagsrechnungen („40 % von etwas sind 8 Euro, also muss der Grundwert etwas über 20 Euro liegen") unterstützen die Entwicklung eines tragfähigen Verhältnissinns und helfen, grobe Fehler schneller zu entdecken.

Aufgabe 6.1: Umfang eines Rechtecks



Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine formale Schreibweise für den Umfang eines Rechtecks zu erstellen, wenn die Seitenlängen in algebraischer Form angegeben sind. Das Rechteck ist mit den Seitenlängen a und 4 gekennzeichnet, und die Aufgabe verlangt von den Schülern*innen, den Umfang U als allgemeinen Ausdruck auszudrücken, anstatt einen numerischen Wert zu berechnen. Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen verstehen, dass ein Rechteck zwei Paare gleicher Seiten hat, und die folgende Formel anwenden:

	$U=2\cdot(a+4)$	$U=(a+4)\cdot 2$		
oder gleichwertig:	$U=2a+8$	$U=2a+2\cdot 4$	oder $U=a+4+a+4$	oder ähnlich

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Diese Aufgabe fördert die Entwicklung des algebraischen Denkens, indem sie die Schüler*innen dazu anregt, Beziehungen zwischen Größen mithilfe von Variablen darzustellen. Bei DiToM ist das Erstellen solcher Formeln unerlässlich, um symbolische Flüssigkeit aufzubauen und funktionale Beziehungen zu verstehen. Es verbindet geometrisches Denken (Umfang) mit algebraischen Ausdrücken und festigt die Verwendung von Variablen als verallgemeinerte Zahlen. Diese Fertigkeit bereitet die Schüler*innen auch auf die spätere Arbeit mit Funktionen, parametrisierten Modellen und dem Lösen von Gleichungen vor.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein sehr häufiges Missverständnis besteht darin, dass die Schüler*innen versuchen, einen numerischen Wert für die mit a bezeichnete Seite zu berechnen – etwa durch direktes Abmessen aus der Zeichnung –, anstatt zu erkennen, dass a eine Variable ist und die Aufgabe eine allgemeine Formel erfordert, nicht ein bestimmtes Ergebnis. Das deutet auf eine Diskrepanz zwischen algebraischer Darstellung und konkreter Berechnung hin. Darüber hinaus geben einige Schüler*innen die Formel für die Fläche des Rechtecks anstelle des Umfangs an, indem sie beispielsweise $A = a \cdot 4$ oder $A = 4a$ schreiben, wodurch sie die Konzepte von Fläche und Umfang verwechseln. Das deutet entweder auf eine konzeptionelle Verwirrung zwischen den beiden Eigenschaften oder auf Schwierigkeiten beim Extrahieren relevanter Informationen aus dem Text hin. Insgesamt deuten diese Fehler auf Schwächen in folgenden Bereichen hin:

- Verständnis der Rolle von Variablen
- Unterscheidung verschiedener geometrischer Konzepte
- der genauen Interpretation mathematischer Anweisungen

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Schüler*innen profitieren von Übungen, die Aufgaben, bei denen Formeln gefragt sind, klar von solchen unterscheiden, bei denen numerische Ergebnisse gefragt sind. Lehrer*innen können physische ausgeschnittene Rechtecke oder digitale Manipulatives verwenden, bei denen die Schüler*innen die Seiten mit Buchstaben beschriften und um die Form „herumlaufen”, um die Gesamtlänge zu zählen. Visuelle Hilfsmittel wie Algebra-Kacheln oder Rahmen zur Berechnung des Umfangs helfen zu veranschaulichen, warum gegenüberliegende Seiten gleich sind und zweimal addiert werden müssen. Die Förderung verbaler Formulierungen („zweimal die Summe von a und 4”) hilft dabei, konkretes Verständnis mit algebraischer Notation zu verbinden. Darüber hinaus können kontrastierende Aufgaben (z. B. „Schreibe eine Formel für den Umfang in Bezug auf die Variable/Unbekannte a“ oder „Berechne mit Hilfe der Formel den Wert des Umfangs für a = 5”) helfen, damit Schüler*innen Anweisungen genau lesen.

Aufgabe 6.2: Auswerten eines Ausdrucks mit Variablenersetzung

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, einen algebraischen Ausdruck zu berechnen, indem sie einen gegebenen Wert für die Variable einsetzen und die richtige Reihenfolge der Grundrechenarten anwenden. Konkret erhalten die Schüler*innen den Ausdruck 1 + 3x und müssen dessen Wert für x = 8 berechnen. Da 3x „3 mal x" bedeutet, ist die richtige Vorgehensweise, zuerst zu multiplizieren:

> Kreuze das Ergebnis an, wenn du $x = 8$ in den Term $1 + 3x$ einsetzt.
>
> ☐ 25
> ☐ 32
> ☐ 39
> ☐ 48

$1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$

Die Schüler*innen müssen die Variable korrekt ersetzen und dann die Grundrechenarten in der richtigen Reihenfolge ausführen, wobei sie die Reihenfolge der Grundrechenarten beachten müssen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Ersetzen ist einer der grundlegendsten Prozesse in der Algebra und bildet eine Brücke zwischen symbolischen Ausdrücken und numerischem Denken. Bei DiToM hilft das Auswerten von Ausdrücken durch Ersetzen von Werten dabei, die Rechenfertigkeit, das Verständnis für Symbole und das Vertrauen im Umgang mit Variablen zu entwickeln. Diese Fähigkeiten sind grundlegend für den Umgang mit Funktionen, das Erstellen von Tabellen und Grafiken und das algebraische Lösen von Problemen aus dem Alltag. Außerdem fördert es ein flexibles Verständnis der mathematischen Struktur, insbesondere der Beziehung zwischen Symbolen, Grundrechenarten und ihrer Bedeutung.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Häufige Fehler sind das Missverständnis der Ausdrucksstruktur oder die falsche Anwendung der Reihenfolge der Operationen. Einige Schüler*innen berechnen möglicherweise 1 + (3 + 8) = 12, weil sie 3x fälschlicherweise als 3 + x statt als 3 mal x lesen. Andere berechnen 3x möglicherweise fälschlicherweise als 38 (durch Verknüpfung von 3 und 8), was eher auf eine symbolische Fehlinterpretation als auf einen Rechenfehler zurückzuführen ist. Schüler, die 32 wählen, haben möglicherweise zuerst 1 zu 8 addiert und dann die Summe mit 3 multipliziert: (1 + 8) · 3 = 27 oder den Ausdruck falsch gelesen als (1 + 3) · 8 = 32, wodurch unbeabsichtigte Klammern eingefügt wurden. Die Auswahl von 39 oder 48 kann auf eine falsche Verdopplung, willkürliche Schätzung oder völlige Missachtung der Reihenfolge hindeuten. Diese Ablenkungsmanöver zeigen, ob die Schüler*innen verstehen, wie Variablen in Ausdrücken funktionieren und wie die Reihenfolge der Operationen ohne explizite Klammerung funktioniert.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Der Unterricht sollte den Schwerpunkt darauf legen, algebraische Ausdrücke strukturell und nicht verfahrensmäßig zu lesen. Lehrer*innen können das Lernen unterstützen, indem sie die Schüler*innen dazu ermutigen, Ausdrücke zu verbalisieren („eins plus drei mal x") und diese mit der numerischen Auswertung in Verbindung zu bringen. Die Verwendung von Substitutionstabellen, die jede Operation klar voneinander trennen, hilft, die Struktur zu verdeutlichen. Vergleichsaufgaben, wie z. B. die Auswertung von 1 + 3x und (1 + 3)x, verdeutlichen, wie Klammern die Bedeutung verändern, während dynamische Tools es den Schüler*innen ermöglichen, verschiedene Werte interaktiv zu testen. Die Vertiefung der Reihenfolge der Grundrechenarten durch strukturierte Übungen, insbesondere in Kontexten ohne Klammern, fördert die langfristige Genauigkeit und Flüssigkeit.

Aufgabe 6.3: Ermitteln der Lösung einer linearen Gleichung

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Kreuze das Ergebnis an, dass die Gleichung $7x + 3 = 80$ erfüllt.

- ☐ $x = 7$
- ☐ $x = 8$
- ☐ $x = 10$
- ☐ $x = 11$

Diese Aufgabe prüft, ob die Schüler*innen das Konzept einer linearen Gleichung verstehen und durch Einsetzen von Werten bestimmen können, ob eine bestimmte Zahl eine Lösung ist. Den Schüler*innen wird die Gleichung 7x + 3 = 80 vorgelegt und sie werden gebeten, den Wert von x zu ermitteln, der diese Aussage wahr macht. Die richtige Antwort ist x = 11, da das Einsetzen dieses Wertes eine wahre Gleichung ergibt:

$7 \cdot 11 + 3 = 80$

Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen nicht nur die Berechnung durchführen, sondern auch verstehen, dass eine Lösung einer Gleichung eine Zahl ist, die beide Seiten ausgleicht.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis von Gleichungen als Gleichheitsaussagen und das Wissen, wie man sie überprüft, ist für die Algebra grundlegend. Im DiToM-Rahmenkonzept gehört diese Fähigkeit zum Bereich der symbolischen Interpretation und des Gleichheitsdenkens. Sie bereitet die Schüler*innen darauf vor, Gleichungen systematisch zu lösen und zu überprüfen, ob eine mögliche Lösung eine Gleichung erfüllt. Dieses Verständnis unterstützt ein höheres algebraisches Denken und stärkt das Zahlenverständnis durch umgekehrtes Denken und operationelle Kontrolle.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Einige Schüler*innen ersetzen die Werte möglicherweise mechanisch, machen jedoch Rechenfehler bei der Auswertung von 7x + 3. Andere verstehen möglicherweise die Aufgabe der Gleichung falsch und interpretieren den Ausdruck als Rechenaufgabe statt als bedingte Aussage. Ein häufiger Irrtum ist die Wahl von x = 10, einfach weil es „naheliegend erscheint", was eher auf eine Schätzung als auf logisches Denken hindeutet. Einige wählen möglicherweise x = 8 oder x = 7 aufgrund von Vermutungen oder unvollständiger Substitution und hören möglicherweise auf, sobald die linke Seite nahe bei 80 liegt. Oder sie ersetzen x durch 7 als Ziffer einer Zahl im Dezimalsystem. Diese Fehler zeigen Lücken im Verständnis der Bedeutung von Gleichheit sowie Schwächen bei Substitutionsverfahren und der rechnerischen Genauigkeit.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Schüler*innen sollten durch Aktivitäten geführt werden, die betonen, was es bedeutet, dass ein Wert eine Gleichung erfüllt. Strukturierte Substitutionstabellen, in denen die Schüler*innen mehrere Werte für eine einzelne Gleichung überprüfen, helfen dabei, Intuition aufzubauen. Lehrer*innen können auch zur verbalen Reflexion anregen („Ist die linke Seite gleich der rechten Seite?") und neben exakten Berechnungen auch Schätzstrategien fördern.

Aufgabe 6.4: Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten lösen

Berechne x.

$$50 + x = 748$$

$$x = \_\_\_\_\_$$

$$x - 44 = 29$$

$$x = \_\_\_\_\_$$

$$x \cdot 3 = 111$$

$$x = \_\_\_\_\_$$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
In dieser Aufgabe sollen die Schüler*innen in drei einfachen Gleichungen den Wert von x bestimmen: In 50 + x = 748 steht die Unbekannte als zweiter Summand, in x – 44 = 29 als Minuend und in x · 3 = 111 als unbekannter Faktor. Alle drei Gleichungen sind grundsätzlich im Kopf lösbar, erfordern aber, dass die Schüler*innen die Struktur der Gleichung erkennen und gezielt mit Umkehroperationen arbeiten. Die zentrale Kompetenz besteht darin, eine Gleichung „aufzulösen", indem man die inverse Rechenoperation anwendet und die Beziehung beider Seiten im Blick behält.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Lösen einfacher Gleichungen ist eine zentrale Grundlage für jedes weitere algebraische Arbeiten. In solchen Aufgaben zeigt sich, ob Schüler*innen das Gleichheitszeichen nicht nur als „Startzeichen zum Rechnen", sondern als Ausdruck einer Gleichheit verstehen, die auf beiden Seiten denselben Wert beschreibt. Wer solche Gleichungen sicher bearbeiten kann, hat verstanden, dass Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division Umkehroperationen sind, mit denen man eine Unbekannte schrittweise freilegen kann. Die Aufgabe unterstützt damit den Übergang vom arithmetischen Rechnen zum algebraischen Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Typische Schwierigkeiten ergeben sich, wenn Gleichungen nicht als Beziehungen, sondern als einseitige Rechenanweisungen gelesen werden. Manche Schülerinnen neigen dazu, bei 50 + x = 748 einfach „irgendwie weiterzurechnen", etwa 50 und 748 zu addieren, ohne die Rolle von x zu reflektieren. Bei x – 44 = 29 wird häufig die falsche Umkehroperation gewählt, sodass statt x = 73 Ergebnisse wie 15 oder −15 entstehen. In der Multiplikationsgleichung x · 3 = 111 wird der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division nicht immer sicher genutzt; einige Schülerinnen multiplizieren fälschlicherweise weiter oder versuchen, sich über wiederholte Addition anzunähern. Lösungen, die offensichtlich nicht zur Ausgangsgleichung passen und nicht durch Probe überprüft werden, sind ein Warnsignal dafür, dass das Gleichungsverständnis noch nicht ausreichend entwickelt ist.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Hilfreich ist es, Gleichungen mit anschaulichen Modellen zu verknüpfen, etwa mit Waagen- oder Balancemodellen, in denen beide Seiten als gleich schwer dargestellt werden. So wird deutlich, dass man auf beiden Seiten „dasselbe tun" muss, um x freizulegen. Auch Streckenmodelle können helfen, indem bekannte und unbekannte Anteile sichtbar gemacht werden. Einfache Sprechweisen unterstützen das Verständnis: „Um x herauszufinden, mache ich das Gegenteil von plus 50" oder „das Gegenteil von mal 3 ist geteilt durch 3". Wichtig ist, die Schüler*innen ihre Lösungen regelmäßig durch Einsetzen überprüfen zu lassen – so erleben sie Gleichungen als Beziehungen, die kontrolliert werden können. Schrittweise aufgebaute Übungsreihen, in denen die Unbekannte an verschiedenen Positionen steht, tragen dazu bei, ein flexibles Verständnis des Gleichungslösens aufzubauen.

Aufgabe 6.5: Aufbau eines Ausdrucks aus einer mehrstufigen schriftlichen Beschreibung

Laura hat 10 Bücher mehr als Jenny. Kevin hat doppelt so viele Bücher wie Laura. Die Anzahl der Bücher von Jenny wird mit n bezeichnet.

Kreuze den Term an, mit dem du die Anzahl der Bücher von Kevin berechnet kannst.

☐ $10 + n$

☐ $10 + n + 2$

☐ $2 \cdot (n + 10)$

☐ $2 \cdot n + 10$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine zweistufige verbale Beschreibung in einen symbolischen Ausdruck zu übersetzen. Die Aufgabe beschreibt, dass Jenny x Bücher besitzt, Laura 10 mehr als Jenny und Kevin doppelt so viele wie Laura. Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen erkennen, dass Lauras Anzahl als n + 10 ausgedrückt wird, und dann die Multiplikation anwenden, um Kevins Gesamtzahl zu ermitteln, was zu dem Ausdruck 2 · (n + 10) führt. Das erfordert die Beachtung sowohl der Reihenfolge der Beziehungen als auch der strukturellen Rolle der Gruppierung in algebraischen Ausdrücken (dies geschieht mit Klammern).

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, aus relationalen Beschreibungen symbolische Ausdrücke zu konstruieren, ist grundlegend für die Algebra. Sie zeigt die Fähigkeit eines Schülers, funktionale Abhängigkeiten zu erkennen und sie strukturell auf der Grundlage der Rolle von Klammern zu kodieren. Bei DiToM stellt eine solche Aufgabe eine Schlüsselkompetenz in Mathematik dar, da sie die Koordination mehrerer Größen und Operationen erfordert und den Übergang vom arithmetischen Denken zur algebraischen Verallgemeinerung unterstützt. Durch die Arbeit mit abstrakten Platzhaltern und verschachtelten Operationen beginnen die Schüler, in Beziehungen zwischen Variablen zu denken – ein wesentlicher Schritt in Richtung Modellierung, Gleichungsauflösung und funktionales Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein häufiger Fehler besteht darin, dass Schüler*innen die Struktur vorzeitig vereinfachen, indem sie den Ausdruck 2n + 10 anstelle des korrekten Ausdrucks 2 · (n + 10) angeben, was darauf hindeutet, dass sie die Priorität der Multiplikation gegenüber der Addition nicht berücksichtigt haben. Andere hören möglicherweise nach der ersten Beziehung auf und schreiben einfach n + 10, was eher Lauras Bücher als die von Kevin darstellt. Ein häufiges Missverständnis bei 10+n+2 liegt auch darin, „doppelt so viele" als separate Erhöhung statt als Multiplikation zu interpretieren oder die Priorität der Multiplikation gegenüber der Addition zu ignorieren, was zu einer Fehlinterpretation der beabsichtigten Berechnung führen kann. In einigen Fällen verwechseln die Schüler*innen möglicherweise die Zeichen oder den Informationsfluss, was darauf hindeutet, dass sie Schwierigkeiten haben, mehrere relationale Aussagen aus dem Text zu extrahieren oder zu behalten. Diese Schwierigkeiten deuten auf Lücken im strukturellen Verständnis hin, insbesondere bei der Kombination von additivem und multiplikativem Denken in symbolischer Form.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Schüler*innen profitieren von einer expliziten verbalen Aufschlüsselung der Beziehungen, angeleitet durch Fragen wie „Was hat Laura in Bezug auf Jennys Bücher?" und „Was macht Kevin mit Lauras Betrag?" Die Verwendung von Anschauungsmitteln wie Beziehungsdiagrammen, Rechenbaum oder Kästchen hilft, diese Zusammenhänge greifbarer zu machen. Darüber hinaus stärkt das Üben der Übersetzung von verbalen in symbolische Ausdrücke mit einfacheren einstufigen Beziehungen das Selbstvertrauen, bevor mehrere Schritte kombiniert werden. Der Unterricht sollte auch ausdrücklich auf die Verwendung von Klammern eingehen und Ausdrücke wie 2n + 10 und 2 · (n + 10) mit konkreten Zahlenbeispielen (z. B. mit einer Tabellenkalkulation) gegenüberstellen, um die Auswirkungen der Struktur zu veranschaulichen. Wenn die Schüler*innen dazu ermutigt werden, ihre Überlegungen laut auszusprechen, wird sowohl die operative Logik als auch die algebraische Bedeutung verstärkt.

Aufgabe 6.6: Aufbau eines strukturierten Ausdrucks aus einer schriftlichen Beschreibung

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler*innen eine schriftliche Situation in einen strukturierten algebraischen Ausdruck übersetzen. Der Kontext wird schriftlich dargestellt: 13 Freunde kaufen jeweils eine Kinokarte für x Euro und geben zusätzlich 3,20 € für Popcorn aus. Die Gesamtkosten für die Gruppe müssen durch einen Ausdruck dargestellt werden, der beide Komponenten – die Variable und die Konstante – kombiniert und die gesamten Einzelkosten mit der Anzahl der Personen multipliziert. Der richtige Ausdruck lautet daher 13 · (x + 3,20). Um die richtige Lösung auszuwählen, müssen die Schüler*innen sowohl die narrative Struktur verstehen als auch wissen, wie man wiederholte Additionen durch Multiplikation mit Klammern modelliert.

Eine Gruppe aus 13 Freunden geht ins Kino. Jeder von ihnen bezahlt eine Eintrittskarte für x € und Popcorn für 3,20 €.
Kreuze an, mit welchem Term man den Preis für die gesamte Gruppe berechnen kann.

☐ $13 + (x + 3{,}20)$
☐ $x \cdot (13 + 3{,}20)$
☐ $13 \cdot x + 3{,}20$
☐ $13 \cdot (x + 3{,}20)$

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Darstellung kontextbezogener Situationen als algebraische Ausdrücke spiegelt eine Kernkompetenz der mathematischen Modellierung wider. Diese Aufgabe veranschaulicht einen grundlegenden Übergang vom arithmetischen Denken zur algebraischen Strukturierung: Anstatt zu rechnen oder zu schätzen, werden die Schüler*innen aufgefordert, eine Beziehung zu verallgemeinern und darzustellen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept spielt diese Fähigkeit eine zentrale Rolle bei der Entwicklung von funktionalem Denken, Strukturbewusstsein und einem flexiblen Verständnis der Verwendung von Variablen. Sie fördert auch ein tiefes Verständnis von Operationen, Gruppierungen und der Distributivgesetzmäßigkeit – Fähigkeiten, die für die Manipulation von Ausdrücken und Gleichungen unerlässlich sind.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Viele Schüler*innen neigen dazu, die Notwendigkeit von Klammern zu übersehen und Ausdrücke wie 13x + 3,20 zu wählen. Andere kehren möglicherweise die Multiplikation um und wählen x + 13 · 3,20 oder stellen fälschlicherweise nur einen Teil der Situation dar. Diese ablenkenden Auswahlmöglichkeiten sind bewusst so gestaltet, dass sie bestimmte Fehlvorstellungen aufdecken, zum Beispiel die Nichtanwendung der distributiven Struktur oder die Fehlinterpretation der Modellierung von Kostenwiederholungen in der Algebra. In einigen Fällen entscheiden sich die Schüler*innen auch für die numerisch einfachste Option, ohne deren Bedeutung zu analysieren, was auf oberflächliches Lesen oder das Verlassen auf Heuristiken anstelle von relationalem Denken hindeutet.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Um das Verständnis der Schüler*innen zu stärken, kann es hilfreich sein, das Szenario anhand von Tabellen, Diagrammen oder Rechenbaum zu visualisieren, wobei beispielsweise in Tabellen pro Person eine Zeile angezeigt und die Kosten spaltenweise summiert werden. Die explizite Modellierung ähnlicher Aufgaben – wie „Jede Person zahlt x € und y €, wie hoch ist die Gesamtsumme für n Personen?" – schafft Vertrautheit mit der Aufgabenstruktur. Die Betonung der Verwendung von Klammern durch gesprochene Phrasen („das Ganze pro Person, dann mal 13") unterstützt die Schüler*innen dabei, verbale Strukturen in algebraische Form zu übertragen. Darüber hinaus können Diskussionen, in denen die gegebenen Optionen verglichen und bewertet werden, was jeder Ausdruck darstellt, den Schüler*innen helfen, Strategien zur Selbstüberprüfung für die Interpretation symbolischer Entscheidungen zu entwickeln. Ermutigen Sie auch die Schüler*in (die nicht weiß, wie sie beginnen soll), zunächst mit einer selbst gewählten Zahl zu testen.

Aufgabe 6.7: Strukturierung eines schriftlichen Ausdrucks aus einer mehrstufigen Regel

> Die Rechnung besteht aus den folgenden Schritten:
> - *Wähle eine Zahl x*
> - *Addiere 4 zu x*
> - *Multipliziere das Ergebnis mit 8*
>
> Kreuze an, welcher Term zu den Rechenschritten passt.
>
> ☐ $8 \cdot x + 4$
> ☐ $x + 4 \cdot 8$
> ☐ $(x + 4) \cdot 8$
> ☐ $(8 \cdot 4) + x$

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe sollen die Schüler*innen eine sequenzielle Berechnung darstellen, insbesondere das Ergebnis der Addition von 4 zu x und der anschließenden Multiplikation des Ergebnisses mit 8 symbolisch ausdrücken. Obwohl in der verbalen Anleitung zusätzliche Schritte erwähnt werden, beziehen sich die Antwortmöglichkeiten nur auf diese erste Operationskette. Der richtige Ausdruck in diesem reduzierten Kontext lautet (x + 4) · 8, wobei die Schüler*innen die Reihenfolge der Operationen einhalten müssen, indem sie x + 4 gruppieren, bevor sie die Multiplikation anwenden.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verstehen und Darstellen der hierarchischen Struktur von Grundrechenarten ist eine grundlegende Fähigkeit in der Algebra. Sie ermöglicht es den Schüler*innen, von der schrittweisen Interpretation arithmetischer Operationen zur Organisation dieser Schritte in einer strukturierten formalen Schreibweise überzugehen. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept ist dies Teil der Entwicklung symbolischer Modellierungskompetenzen, insbesondere der Verwendung von Klammern zur Verdeutlichung der Reihenfolge von Grundrechenarten. Das ist nicht nur für die korrekte Auswertung von Ausdrücken entscheidend, sondern auch für den Aufbau von Selbstvertrauen im Umgang mit Formeln und das spätere Lösen von Gleichungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Die Falschantworten werden sorgfältig ausgewählt, um bestimmte strukturelle Missverständnisse aufzudecken. Beispielsweise steht 8 · x + 4 für den Fehler, die Multiplikation zu früh durchzuführen und dann fälschlicherweise 4 hinzuzufügen, wodurch die beabsichtigte Gruppierung verletzt wird. Die Wahl x + 4 · 8 zeigt lineares Lesen und falsche Prioritäten, wobei die Schüler*innen die Multiplikation vor der Addition ohne Klammern anwenden.

8 · 4 + x ignoriert die Struktur vollständig und deutet auf eine oberflächliche Konzentration auf die beteiligten Zahlen statt auf die Beziehung hin. Diese Antwortmöglichkeiten sind nicht zufällig – sie zeigen an, ob ein Schüler*innen versteht, wie Klammern die Reihenfolge der Grundrechenarten beeinflussen, und ob er mehrstufige verbale Anweisungen strukturell statt sequenziell analysieren kann.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung sollte darauf abzielen, das Bewusstsein der Schüler*innen für Klammern und ihr Verständnis für die Reihenfolge der Grundrechenarten zu stärken. Ein hilfreicher Ansatz besteht darin, die Schüler*innen jeden Schritt verbalisieren zu lassen und dann die Ausdrücke mithilfe von Karten oder Farbcodierungen physisch zu gruppieren. Sie sollten dazu ermutigt werden, Ausdrücke wie x + 4 · 8 und (x + 4) · 8 mit numerischen Ersetzungen (z. B. x = 2) zu vergleichen, um zu testen, ob die Struktur mit der beabsichtigten Bedeutung übereinstimmt. Die Erklärung, warum Klammern in diesem Zusammenhang notwendig sind, fördert das symbolische Denken und hilft den Schüler*innen, über die verfahrensorientierte Übersetzung hinaus zu einem echten Verständnis zu gelangen. Die Schüler*innen können auch damit beginnen, selbst gewählte Zahlen zu testen und ihre Berechnung zu verallgemeinern.

Aufgabe 6.8: Verbale Ausdrücke in algebraische Ausdrücke übersetzen

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Alltagssprache in algebraische Notation zu übersetzen. Jeder Teil (a–c) präsentiert eine andere verbale Struktur, die einem einfachen symbolischen Ausdruck entspricht. In Teil a (*die Summe von 3 und x*) besteht das Ziel darin, die additive Struktur (3 + x) zu erkennen. Teil b (*3 weniger als x*) prüft, ob die Schüler*innen eine subtraktive Beziehung mit der richtigen Reihenfolge der Operanden (x − 3) korrekt wiedergeben. Teil c (*das Doppelte von a*) erfordert Multiplikation als Skalierung (2a).

> Übersetze jeden Satz in einen mathematischen Term:
>
> a) Die Summe aus 3 und x
>
> b) 3 weniger als x
>
> c) Das doppelte von a

Diese Aufgabe kombiniert grundlegende algebraische Konventionen mit sprachlicher Präzision und fordert die Lernenden auf, zwischen natürlicher Sprache und symbolischem Ausdruck zu navigieren.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, fließend zwischen verbalen Beschreibungen und algebraischen Darstellungen zu wechseln, ist grundlegend für die mathematische Kompetenz. Sie unterstützt das Verständnis funktionaler Beziehungen, legt den Grundstein für das Interpretieren und Schreiben von Gleichungen und Formeln und ist für die Modellierung von Problemen unerlässlich. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept ist diese Fähigkeit zentral für den Aufbau eines symbolischen Verständnisses und für die Entwicklung eines sinnvollen Verständnisses von Operationen, das über das reine Auswendiglernen hinausgeht. Schüler*innen, die diesen Übersetzungsprozess beherrschen, sind besser Textaufgaben zu interpretieren und Gleichungen in komplexeren Situationen zu konstruieren.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Diese Aufgabe deckt charakteristische Fehlvorstellungen auf verschiedenen Ebenen auf. In Teil b (*3 kleiner als x*) kehren viele Schüler*innen die Reihenfolge fälschlicherweise um und schreiben 3 – x, wobei sie dies als „3 minus x" interpretieren, anstatt als das beabsichtigte x – 3. Das deutet auf eine Schwierigkeit hin, die relationale Richtung in verbalen Strukturen zu erkennen. Bei c) ist ein häufiger Fehler die Verwechslung zwischen Quadrat und Verdopplung.
Zusammen genommen zeigen diese Fehler, ob die Schüler*innen verbale Strukturen analysieren, die algebraische Syntax beachten und die üblichen mathematischen Konventionen verstehen können.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Um diese Fähigkeit zu stärken, sollte der Unterricht die Struktur der Sprache in Bezug auf die formale Schreibweise betonen. Die explizite Vermittlung von Ausdrücken wie „kleiner als", „größer als", „das Produkt von" und „das Quadrat von" ist unerlässlich, idealerweise mit Kontrastbeispielen. Visuelle Organizer, die Ausdrücke mit algebraischen Formen verbinden, können das Auswendiglernen und das Verständnis der Struktur erleichtern. Schließlich fördert das Ermutigen der Schüler*innen, ihre Ausdrücke zu verbalisieren („x minus 3 bedeutet, dass ich mit x beginne und 3 subtrahiere"), die reflexive Genauigkeit und verbindet die Sprache stärker mit der mathematischen Bedeutung.

V. Hinweise zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse

Um Ihnen bei der Auswertung der Testergebnisse zu helfen, stehen Ihnen verschiedene Tools zum Download zur Verfügung unter:
ditom.org/en/tests-en:

1. Wenn Sie die Tests lieber manuell auswerten möchten, bieten wir Ihnen folgende Hilfsmittel an:

Die folgende Skala liefert erste Anhaltspunkte dafür, in welchen Bereichen die Schüler*innen am wahrscheinlichsten Punkte erzielen:

$n \leq 49$ Punkte → Gruppe A: Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.

$50 \leq n \leq 67$ Punkte → Gruppe B: Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.

$n \geq 68$ Punkte → Gruppe C: Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Punktebereich	**Das können Schüler*innen in dieser Klasse bereits**
$n \leq 49$	natürliche Zahlen auf dem Zahlenstrahl eintragen, natürliche Zahlen vergleichen, grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit natürlichen Zahlen, grundlegende Multiplikations- und Divisionsaufgaben mit natürlichen Zahlen
$50 \leq n \leq 67$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: erweiterte Grundrechenaufgaben mit natürlichen Zahlen, Grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Dezimalzahlen, Brüche als Teil eines Ganzen verstehen, grundlegende Aufgaben zum Lösen von Gleichungen können bearbeitet werden
$n \geq 68$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: zeigen ein adäquates Bruchzahl- und Dezimalzahlverständnis, Kompetenz zum Modellieren von Textaufgaben, Verständnis von ganzen Zahlen, erweiterte Aufgaben zum Lösen von Gleichungen können bearbeitet werden

2. Eine weitere Möglichkeit ist die Auswertung der Ergebnisse in Excel auf Ihrem Computer. Zu diesem Zweck können Sie Folgendes herunterladen:
   a) Eine **vorprogrammierte Excel-Datei** mit zwei Arbeitsblättern, zwischen denen Sie über die Registerkarten unten links wechseln können. Geben Sie im Arbeitsblatt mit dem Titel „qualitativ" einfach in die entsprechende Spalte für jedes Kind die Zahlen ein, die das Kind in seinem Testheft als Antworten in jeder Teilaufgabe eingetragen hat. Wenn ein Lernender eine Aufgabe leer gelassen hat, geben Sie bitte 999 ein. In der Exceltabelle ist in der ersten Zeile ein Beispiel angegeben. Wenn Sie mit der Eingabe der Daten fertig sind, wechseln Sie zum Arbeitsblatt „Auswertung". Das Programm erstellt Ihnen eine Auswertung Ihrer eingetragenen Daten.

Die „kritischen Punkteschwellen” für *DiToM* 8+ und wie man sie interpretiert

Wie in Abschnitt I erläutert, dient *DiToM* nicht dazu, Kinder zu kategorisieren. Bitte lesen Sie dazu die Erläuterungen zu den Zielen und Leitprinzipien *von DiToM*.

Dort finden Sie auch eine detailliertere Erläuterung der „kritischen Punkteschwellen”, die auf der Grundlage von Pilotversuchen mit *DiToM* (für Version 8+, mit 2346 Schüler*innen aus den sieben Partnerländern des Projekts) unter Verwendung der statistischen Methode der Latent Class Analysis (Yin et al. 2025) ermittelt wurden. Diese Methode ermöglicht es, Kinder anhand ihrer Gesamtpunktzahl in *DiToM* 8+ modellbasiert einer der folgenden drei Gruppen zuzuordnen:

Punktzahlbereich	**Gruppe**
0 bis 49	A – Anzeichen für weitreichende Schwierigkeiten in mehreren Schlüsselbereichen
50 bis 67	B – Anzeichen für Schwierigkeiten in einigen Schlüsselbereichen
Ab 68	C – Keine Anzeichen für größere Schwierigkeiten in Schlüsselbereichen

Eine abschließende Anmerkung mit Verweis auf Abschnitt I: Beachten Sie, dass ein Screening nur eine Momentaufnahme liefert. Die Ergebnisse sollten daher mit Ihren eigenen Beobachtungen und Erfahrungen im Unterricht verglichen und gegebenenfalls als Ausgangspunkt für Folgeinterviews mit einzelnen Kindern verwendet werden – um Ihr Verständnis zu vertiefen, zu verfeinern oder zu erweitern und gegebenenfalls Ihre Schlussfolgerungen zumindest teilweise anzupassen.

Referenzen:

Brings, L., & Kleine, M. (2025). *Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Entwicklung und Bewertung eines Screening-Instruments zur Früherkennung von Risikoschülern im Mathematikunterricht der unteren Sekundarstufe*. In Proceedings of EDULEARN25 Conference. Palma, Spanien.

Greer, B. (1992). Multiplikation und Division als Modelle von Situationen. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbuch zur Forschung über Mathematikunterricht und -lernen* (S. 276–295). New York: Macmillan.

Lamon, S. J. (2007). Rationale Zahlen und proportionales Denken. In F. K. Lester Jr. (Hrsg.), *Zweites Handbuch zur Forschung über Mathematikunterricht und -lernen* (S. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Arithmetik: Grundschule* (8. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). Eine integrierte Theorie der Entwicklung von ganzen Zahlen und Brüchen. *Kognitive Psychologie, 62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Vlassis, J. (2004). Das Minuszeichen verstehen oder Flexibilität in Bezug auf „Negativität" entwickeln. *Lernen und Unterrichten, 14*(5), 469–484. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012