UNIVERSITÄT
BIELEFELD

Fakultät für Mathematik

DiToM
Diagnostic Tool in Mathematics

Screening 6+

Handbuch für Lehrer

Co-funded by
the European Union

Inhalt

Vorwort

Dieses Handbuch soll Sie bei der Durchführung des *DiToM* 6+ Screenings und bei der Nutzung der Testergebnisse in Ihrem Unterricht unterstützen. Auf den folgenden Seiten finden Sie:

1. eine kurze Einführung in die Ziele und Leitprinzipien des Erasmus+-Projekts *DiToM* (***Di****agnostic* ***To****ol in* ***M****athematics)*;
2. Hinweise zur Durchführung des *DiToM 6+* Screenings;
3. kurze Erläuterungen zu jeder Aufgabe des *DiToM* 6+ Screenings, einschließlich Hinweisen zu möglichen Förderstrategien für Schüler*innen, deren Screening-Ergebnisse Lernlücken in wichtigen mathematischen Kompetenzen aufzeigen;
4. Anleitungen zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse.

Die Anweisungen und die in Abschnitt 4 beschriebenen Bewertungstabellen können auch separat als einzelne PDF-Dateien unter www.ditom.org heruntergeladen werden.

I. Ziele und Leitprinzipien von *DiToM*

Das Lernen von Mathematik verläuft kontinuierlich: Neues Wissen baut auf gesichertem Vorwissen auf. Fehlen grundlegende mathematische Ideen und Konzepte, fällt es den Schüler*innen zunehmend schwerer, mathematische Inhalte zu verstehen und zu begreifen, die auf diesem Fundament aufbauen. Sowohl nationale als auch internationale Studien zeigen, dass ein erheblicher Anteil der Schüler*innen bereits in der Grundschule die Mindeststandards in Mathematik nicht erreicht – und aus den oben genannten Gründen fast zwangsläufig auch in der Sekundarstufe weiterhin Schwierigkeiten hat. Alarmierend ist, dass viele junge Menschen ihre Schulpflicht beenden, ohne das grundlegende Niveau an mathematischer Kompetenz erreicht zu haben, das laut OECD für eine „vollständige Teilhabe am gesellschaftlichen Leben“ unerlässlich ist.

Um dem entgegenzuwirken, müssen Lehrkräfte zunächst in der Lage sein, mathematische Lernschwierigkeiten zu erkennen – idealerweise frühzeitig und so genau wie möglich. Nur auf dieser Grundlage können gezielte Fördermaßnahmen ergriffen werden. Genau hier setzt das EU-Projekt *„**Di**agnostic **To**ol in **M**athematics” (DiToM)* an. In einer Partnerschaft zwischen Deutschland, Frankreich, Griechenland, Kroatien, Italien, Schweden und Spanien wurden fünf miteinander verbundene Screening-Instrumente entwickelt. Diese Tools ermöglichen es Lehrkräften, sich am Ende oder zu Beginn eines Schuljahres einen präzisen Überblick darüber zu verschaffen, welche Schüler*innen Gefahr laufen, in Mathematik zurückzufallen, wenn sie keine gezielten Fördermaßnahmen erhalten.

Die Screenings folgen einem zweijährigen Zyklus:

- **Screening 0** – Beginn der Grundschule
- **Screening 2+** – Ende der 2. Klasse / Beginn der 3. Klasse
- **Screening 4+** – Ende der 4. Klasse / Beginn der 5. Klasse
- **Screening 6+** – Ende der 6. Klasse / Beginn der 7. Klasse
- **Screening 8+** – Ende der 8. Klasse / Beginn der 9. Klasse

Was sind die *DiToM*-Screenings und was bewirken sie?

Die fünf Screenings sind pen-and-paper Tests, die sich auf wichtige mathematische Kompetenzen konzentrieren, die zu Beginn einer Klassenstufe sicher beherrscht werden sollten, damit neue Inhalte mit Verständnis gelernt werden können. Jeder Test kann innerhalb einer Unterrichtsstunde (45-Minuten) mit der gesamten Klasse durchgeführt und mit Hilfe der bereitgestellten Bewertungsinstrumente (siehe Abschnitt V) mit relativ geringem Zeitaufwand ausgewertet werden. Die Ergebnisse geben den Lehrkräften einen ersten strukturierten Überblick darüber, welche Schüler*innen wahrscheinlich zusätzliche Unterstützung benötigen.

Das Wort *„wahrscheinlich“* ist entscheidend: Ein Screening ersetzt **keine** individuelle, qualitative Beurteilung des Lernstands eines Kindes. Es liefert vielmehr erste Anhaltspunkte dafür, welche Strategien oder Lösungsansätze ein Kind möglicherweise verwendet hat. Ein detaillierteres Verständnis erfordert gezielte Beobachtungen und Einzelgespräche unter Verwendung differenzierterer Aufgaben. Das Screening kann jedoch als wertvoller Ausgangspunkt dienen, um zu bestimmen, welche Kinder am meisten von solchen Folgeuntersuchungen profitieren würden.

Was sind „mathematische Schlüsselkompetenzen“?

Wie bereits erwähnt, zeichnet sich die Mathematik in der Schule durch eine *„interne Lernhierarchie“* aus (Wittmann, 2015, S. 199). Dies gilt insbesondere für die Bereiche Arithmetik und Algebra – genau die Bereiche, auf die sich die DiToM-Screenings bewusst konzentrieren. In diesen Bereichen ist es in jeder Lernphase möglich, *Schlüsselkompetenzen* zu identifizieren – Kompetenzen, ohne die weiteres Lernen nicht sinnvoll und nachhaltig stattfinden kann.

Ein Beispiel: Um erfolgreich mit natürlichen Zahlen arbeiten zu können, müssen Kinder diese im Sinne *des Teil-Ganzes-Konzepts* verstehen – ein Entwicklungsprozess, der im ersten Schuljahr abgeschlossen sein sollte. Das Teil-Ganzes-Konzept bedeutet beispielsweise, dass die Zahl sieben als ein Ganzes verstanden wird, das sich aus Teilen zusammensetzt – fünf und zwei, vier und drei, eins und sechs und so weiter. Dieses Verständnis sollte dann automatisch erfolgen: Ein Kind sollte keine bewusste Anstrengung mehr benötigen, um fünf als den fehlenden Teil von sieben zu erkennen, wenn zwei als der andere Teil gegeben ist. Mit anderen Worten: Kinder sollten Zahlen automatisch in Bezug auf ihre Zerlegungen und Beziehungen denken. Diese Kombination aus *Verständnis* und *Automatisierung* ist charakteristisch für viele Schlüsselkompetenzen: Erst wenn bestimmte Fähigkeiten automatisch ablaufen, kann geistige Kapazität freigesetzt werden, um höhere mathematische Herausforderungen anzugehen.

Ob die Schlüsselkompetenz „Zahlen als Zusammensetzungen betrachten” (oder „Zahlenzerlegung”) gut verankert ist, lässt sich beispielsweise an den Rechenstrategien eines Kindes erkennen. Ein Kind, das sieben als fünf und zwei betrachtet, löst $7 – 5$ mühelos, selbst in der ersten Schulklasse, ohne zu zählen. Kinder, denen diese Kompetenz fehlt, verlassen sich jedoch oft bis weit in die späteren Grundschul- und Sekundarschulklassen hinein auf mühsame, fehleranfällige Zählstrategien. Das Zählen bei Addition und Subtraktion wird schnell unüberschaubar, wenn es um zwei- oder dreistellige Zahlen geht. Solche Kinder haben auch Schwierigkeiten, Beziehungen zwischen Multiplikationsaufgaben zu erkennen – zum Beispiel, dass $9 \cdot 6$ sechs weniger ist als das leicht zu merkende $10 \cdot 6$. Defizite in einer Schlüsselkompetenz (das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen) behindern somit den Erwerb anderer Kompetenzen (Addition, Subtraktion, Multiplikation), die wiederum Voraussetzungen für fortgeschrittenere Fähigkeiten (Division, proportionales Denken usw.) sind.

Diese Kette setzt sich über die Grundschule hinaus fort: Schüler*innen, die Schwierigkeiten mit natürlichen Zahlen haben, werden noch größere Schwierigkeiten mit Brüchen und Dezimalzahlen haben. Algebra baut später auf Erkenntnissen auf, die durch die Arbeit mit den Grundrechenarten in der Grundschule gewonnen werden sollten. Ohne diese Erkenntnisse kann Algebra für Schüler*innen wie ein unentzifferbarer Code erscheinen.

Aus diesem Grund konzentrieren sich die DiToM-Screenings auf Schlüsselkompetenzen – diejenigen, die zu Beginn der Klassenstufen 1, 3, 5, 7 und 9 sicher etabliert sein sollten, damit das weitere mathematische Lernen erfolgreich fortgesetzt werden kann.

Was geschieht nach der Durchführung des *DiToM*-Screenings?

Mithilfe der in Abschnitt V beschriebenen Auswertungshilfen können die Lehrer*innen den Test digital mit Excel oder analog in Papierform auswerten.

Mit Blick auf einzelne Schüler:

Bei DiToM geht es nicht darum, Schüler*innen zu etikettieren. Die Screenings sind **nicht** darauf ausgelegt, Schüler*innen mit „Dyskalkulie” zu identifizieren. Klinische Diagnosen dieser Art gehen nicht auf die Kernfrage ein, die *DiToM* beantworten möchte: *Wie können Lehrer*innen Kinder, die Schwierigkeiten mit grundlegenden Rechenkompetenzen haben, am besten unterstützen?* Eine gezielte Unterstützung erfordert ein genaues Verständnis des aktuellen Lernniveaus jedes einzelnen Kindes. DiToM hilft dabei, diejenigen zu identifizieren, für die eine solche detaillierte Bewertung dringend erforderlich ist – nicht mehr, aber auch nicht weniger. Abschnitt III enthält kurze Hinweise dazu, welche Arten von Folgemaßnahmen für jede einzelne Aufgabe hilfreich sein können.

Die in Abschnitt V diskutierten „kritischen Schwellenwerte“ wurden auf der Grundlage von Datenerhebungen mit DiToM-Screenings bei 8.820 Schüler*innen in den sieben Partnerländern ermittelt. Unter Verwendung *der Latent-Class-Analyse* (siehe Yin, Bezirhan & von Davier, 2025) wurden die Schüler*innen wie folgt gruppiert:

- **Gruppe A:** Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.
- **Gruppe B:** Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.
- **Gruppe C:** Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Es ist wichtig, sich vor Augen zu halten, dass jedes Screening nur eine *Momentaufnahme* darstellt. Manche Schüler*innen hatten vielleicht einfach einen schlechten Tag oder waren abgelenkt, andere haben trotz Vorsichtsmaßnahmen möglicherweise Antworten abgeschrieben. Die Screening-Ergebnisse sollten daher mit Vorsicht interpretiert werden. Sie sollten immer mit den Beobachtungen aus dem täglichen Unterricht verglichen und als Anstoß für weitere gezielte Beobachtungen und Folgeaufgaben in den kommenden Tagen und Wochen genutzt werden.

Wenn sich herausstellt, dass ein Kind in Gruppe A fällt, ist davon auszugehen, dass sich seine mathematischen Schwierigkeiten im Laufe des Schuljahres verschlimmern werden, sofern nicht rechtzeitig wirksame Maßnahmen ergriffen werden. Abschnitt IV kann nur allgemeine Hinweise für solche Maßnahmen geben, die auf den in den einzelnen Aufgaben bewerteten Schlüsselkompetenzen basieren. Für ausführlichere Fördermaßnahmen müssen Lehrer*innen die einschlägige pädagogische Literatur heranziehen.

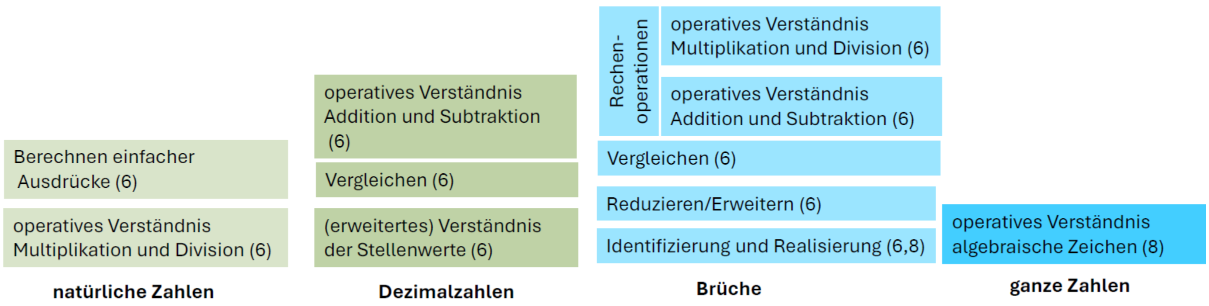
Auch Kinder der **Gruppe B** benötigen wahrscheinlich in mindestens einigen Bereichen gezielte Unterstützung, um erfolgreich lernen zu können. Es sei daran erinnert, dass alle Screening-Aufgaben Schlüsselkompetenzen bewerten. Das Screening ist bewusst so konzipiert, dass es *keine* Unterscheidung zwischen leistungsstarken Kindern trifft – im Idealfall sollten die meisten Kinder die Aufgaben recht einfach finden. Daher sollten auch Fehler, die Kinder **der Gruppe C** bei einzelnen Aufgaben machen, ernst genommen werden, da sie auf Lücken in grundlegenden Schlüsselkompetenzen hinweisen können.

Mit Blick auf die Klasse als Ganzes:

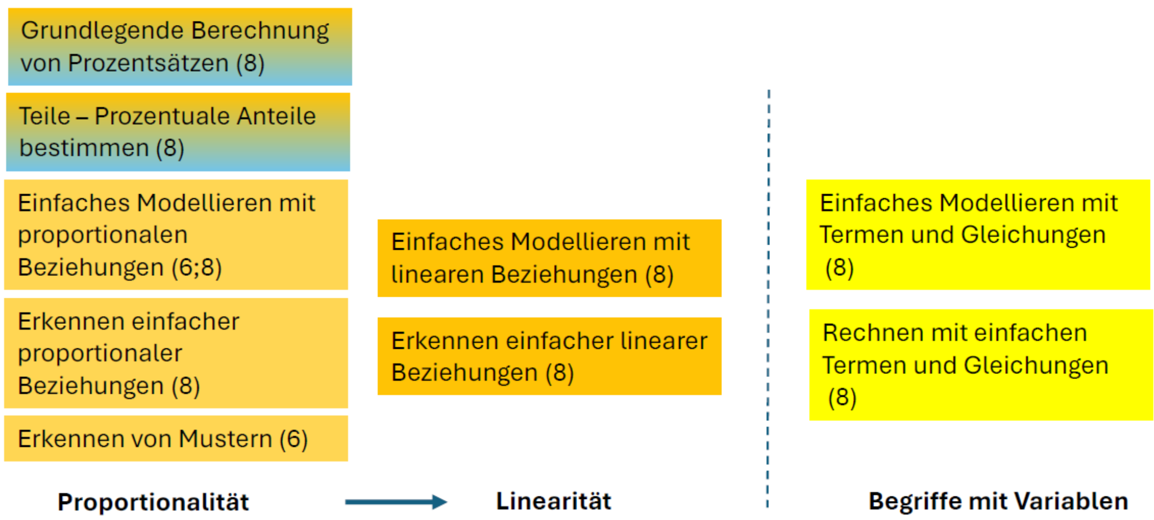
Letzteres gilt insbesondere dann, wenn die Ergebnisse zeigen, dass mehrere Kinder mit demselben Testteil oder derselben Aufgabe Schwierigkeiten hatten. Dies kann darauf hindeuten, dass sie entweder in ihrer bisherigen Schulzeit oder vor der Einschulung nur unzureichend oder nicht gezielt in dieser Kompetenz geübt wurden. In solchen Fällen ist es umso wichtiger, dass diese Lernmöglichkeiten jetzt angeboten werden, auch wenn der Lehrplan bereits zu neuen Inhalten übergegangen ist. Auch hier ist es wichtig, die hierarchische Struktur des Mathematikunterrichts zu berücksichtigen: Jede Stufe hängt vom sicheren Verständnis der grundlegenden Kompetenzen ab, bevor man zur nächsten übergehen kann.

II. Teststruktur Screening 6+

Die Teststruktur in DiToM basiert auf den Inhaltsbereichen Arithmetik und Algebra. Die hierarchische Struktur der Inhaltsbereiche werden berücksichtigt. Der Testaufbau konzentriert sich auf den Bereich der Zahlenbereichsentwicklung und -erweiterung im Sinne technischer Berechnungen. Das Diagramm zeigt die Teststruktur für die Klassenstufen 6+ und 8+.
Der Screening 6+ Test baut auf den Bausteinen von Screening 4+ auf, die sich auf natürliche Zahlen konzentrieren. Wenn Schüler*innen in der 6. Klasse erhebliche Schwierigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen haben, wird empfohlen, den Test für die Klasse 4+ anzuwenden.



Im Bereich der Algebra wird das strukturelle Verständnis einfacher mathematischer Strukturen in internen sowie externen mathematischen Anwendungen unter den Aspekten Proportionalität und Linearität geprüft. Dies gilt ebenso für Terme mit Zahlen oder Variablen in unterschiedlichen Richtungen in grundlegenden Anwendungssituationen sowie für das Termverständnis, soweit es Teil eines grundlegenden Verständnisses ist.



Für Screening 6+ ergibt sich die folgende Übersicht der Testitems:

Bereich	Key skill	Items	Anzahl
Arithmetische Basiskompetenzen **(α= .92)**	**Stellenwertverständnis**	1.1, 1.2, 1.3	13
	Operationsverständnis (Add/Sub)	1.4, 1.5	12
	Operationsverständnis (Mult/Div)	1.6, 1.7	16
	Strukturelles Verständnis	1.8, 1.9, 1.10	3
Bruchzahlverständnis **(α= .85)**	**Bruch als Teil eines Ganzen**	2.1, 2.3, 2.9	4
	Brüche vergleichen	2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.4	7
	Rechnen mit Brüchen (Add/Sub)	2.10	4
Dezimalzahlverständnis **(α= .77)**	**Dezimalzahlen als Erweiterung Stellenwertsystem**	2.2, 3.1, 3.2	4
	Rechnen mit Dezimalzahlen (Add/Sub)	3.3	4
Proportionales Verständnis **(α= .79)**	**Funktionales Denken (Muster)**	4.1, 4.2	2
	Proportionale Zusammenhänge	4.3, 4.4, 4.5	4

III. Durchführung des DiToM-Tests

- Erklären Sie den Schülern den Zweck des Tests und beruhigen Sie sie.

    - Der Test wird nicht benotet.
    - Er ermöglicht Ihnen, eine Bestandsaufnahme dessen zu machen, was die Schüler*innen wissen und was sie nicht wissen, damit Sie anschließend eine Förderung einleiten können. Daher ist es besonders wichtig, dass die Schüler*innen alleine arbeiten.
    - Betonen Sie, wie wichtig es ist, die Übungen zu absolvieren. Je mehr Fragen sie beantworten, desto leichter lassen sich ihre Kenntnisse, Fähigkeiten und Schwierigkeiten erkennen, um ihnen dabei zu helfen, diese zu überwinden.

- Aufbau des Tests

    - Der Test ist in vier Teile gegliedert, die jeweils aus mehreren Aufgaben bestehen.
    - Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander.

- Dauer: Für jedes Screening gibt es eine maximale Bearbeitungszeit.

    - Die maximale Bearbeitungszeit der Screenings beträgt 42 Minuten.
    - Es ist wichtig, den Schüler*innen vor Beginn des Screenings die Dauer des Tests mitzuteilen.

- Aufgabenformate

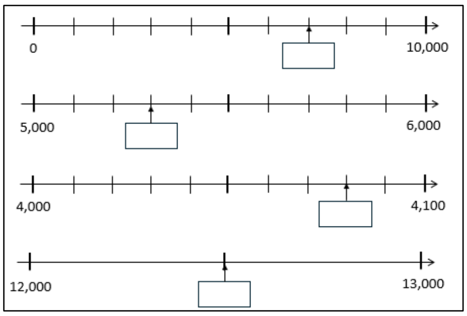
    - Offene Aufgaben: Es gibt Platz für die Antwort (entweder in Form von Sätzen oder einer Zahl).
    - Geschlossene Aufgaben (Multiple-Choice-Fragen): Es werden mehrere Antworten vorgeschlagen und die Schüler*innen müssen eine davon auswählen. Bitte weisen Sie die Schüler*innen darauf hin, dass sie, wenn sie ihre Multiple-Choice-Antwort ändern möchten, diese Änderungen klar zu kennzeichnen (z.B. indem sie neben der ersten Antwort „Nein" und neben der neuen Antwort „Ja" schreiben).

- Weitere Hinweise

    - Taschenrechner sind nicht erlaubt.
    - Die Schüler*innen können jeden freien Teil der Seite verwenden, insbesondere um ihre Berechnungen aufzuschreiben.
    - Die Schüler*innen können die vier Teile in ihrer eigenen Reihenfolge und in ihrem eigenen Tempo bearbeiten.
    - Wenn die Lehrkraft um Hilfe gebeten wird, darf sie keine Hinweise geben, die zur Beantwortung der Aufgaben führen könnten. Das Ziel ist es, die Schwierigkeiten der Schüler*innen zu erkennen.

IV. Erläuterungen und Vorschläge zur Unterstützung bei den einzelnen Aufgaben des *DiToM* 6+ Test

Aufgabe 1.1: Zahlen auf der Zahlengeraden



Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Intervalle und Abstände zwischen Zahlen auf einem Zahlenstrahl zu erkennen und Zahlen (bis zu 100 000) an der richtigen Position auf Zahlenstrahlen zu platzieren.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das richtige Einordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl ist ein Aspekt des Verständnisses numerischer Beziehungen, insbesondere von Ordnungszahlen (welche Zahlen kommen vor oder nach anderen). Es hilft den Schüler*innen dabei, die Größe und Position von Zahlen zu visualisieren, ein starkes Gefühl für numerische Größenordnungen zu entwickeln und Beziehungen zwischen Zahlen zu verstehen. Es vertieft das Verständnis für den Stellenwert, indem es zeigt, wie Ziffern zum Gesamtwert einer Zahl beitragen. Die Darstellung von Zahlen auf einem Zahlenstrahl ist für viele andere Fähigkeiten unerlässlich, wie z. B. das Runden von Zahlen und das Schätzen von Summen und Differenzen. Die Darstellung von Zahlen auf einem Zahlenstrahl wird später für Brüche, Dezimalzahlen, Maße und Skalen verwendet.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Einige Kinder zählen die Markierungen, ohne die Skala zu verstehen, was zu Fehlern führt (insbesondere wenn die Intervalle nicht 1 sind). Ein häufiger Fehler ist das Ignorieren der Rolle der Null in Zahlen (Weglassen oder Falschplatzieren von Nullen). In Aufgabe a.) schreiben sie beispielsweise möglicherweise 700 statt 7.000 oder in Aufgabe b.) 5.030 statt 5.300. Manchmal deuten die Fehler, die Kinder bei dieser Aufgabe machen, auf tiefere Missverständnisse hinsichtlich des Zahlenverständnisses oder des Stellenwerts hin. Beispielsweise können Zahlen in der falschen Reihenfolge angeordnet sein (z. B. 70.000 vor 10.000), was auf Schwierigkeiten hinsichtlich der numerischen Reihenfolge hindeutet.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Schwierigkeiten zeigen?

Wenn ein Kind keine vernünftige Entscheidung darüber treffen kann, wo eine Zahl platziert werden soll, kann dies auf ein schwaches Zahlenverständnis hindeuten. Lehrer*innen müssen feststellen, ob die Schwierigkeit beim Zählen liegt (z. B. Zahlen überspringen), beim Verständnis des Stellenwerts (z. B. 100 mit 10 verwechseln), beim Skalieren (z. B. gleichmäßige Abstände nicht verstehen) oder beim Weglassen oder Falschplatzieren von Nullen. Kinder profitieren von Übungen, bei denen sie Zahlen auf einem Zahlenstrahl platzieren müssen. Der Schwerpunkt sollte dabei auf teilweise ausgefüllten Zahlenstrahlen liegen, die die Kinder mit den fehlenden Zahlen vervollständigen müssen. Farbcodierte Bezugspunkte (z. B. 0, 10, 100) können das Verständnis fördern. Es ist auch ratsam, das Platzieren von Zahlen ohne exakte Markierungen zu üben und die Kinder zu ermutigen, anhand bekannter Bezugspunkte zu schätzen. Lehrer*innen können die Kinder auch darum bitten, ihre Platzierungen zu erklären. Wenn möglich, können Lehrer*innen interaktive Zahlenstrahle verwenden, auf denen die Kinder Zahlen per Drag and Drop verschieben können. Auch reale Kontexte (z. B. Zeitachsen, Lineale, Temperaturskalen) können zum besseren Verständnis beitragen.

Aufgabe 1.2: Addieren und Subtrahieren von 1/10/100 zusammen mit Bündeln und Entbündeln

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

a) 1 mehr als 9.899: _________	d) 1 weniger als 7.000: _______
b) 10 mehr als 4.590: _________	e) 10 weniger als 3.500: ________
c) 100 mehr als 3.900: __________	f) 100 weniger als 4.000: ________

Diese Aufgabe erfasst das Verständnis der Schüler*innen für Stellenwerte und ihre Fähigkeit, 1, 10 oder 100 korrekt zu addieren oder zu subtrahieren, einschließlich des Umgangs mit Bündeln oder Übertragen und Entbündeln oder Borgen, sowie das genaue Arbeiten mit mehrstelligen Zahlen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Hinzufügen oder Wegnehmen von 1, 10 oder 100 durch Bündeln und Entbündeln ist eine Schlüsselkompetenz, da es den Schüler*innen dabei hilft, zu verstehen, wie sich Zahlen je nach Stellenwert verändern. Es verstärkt die Vorstellung, dass Ziffern an verschiedenen Stellen unterschiedliche Werte darstellen, und zeigt, wie man überträgt oder „bündelt", wenn eine Ziffer größer als 9 ist, und wie man entbündelt, wenn eine Ziffer nicht ausreicht. Ein solides Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems bildet die Grundlage für flexibles Rechnen mit mehrstelligen Zahlen (und später Dezimalzahlen) und für die Verknüpfung dieser Zahlen untereinander und mit der Welt, in der wir leben (z. B. Schätzen, grobe Berechnungen und die richtige Einschätzung quantitativer Verhältnisse in realen Situationen). Die Beherrschung dieser Fähigkeit ist für das Kopfrechnen, das Addieren und Subtrahieren mit größeren Zahlen und spätere arithmetische Operationen unerlässlich, da sie das konzeptionelle Verständnis fördert. Sie hilft den Schüler*innen auch, Muster in Zahlen zu erkennen und Addition und Subtraktion in praktischen, realen Situationen anzuwenden. Die Fähigkeit, Aufgaben zu lösen, bei denen Dezimaleinheiten entbündelt werden müssen, zeugt von einem höheren Verständnisniveau als Aufgaben, bei denen gebündelt werden muss. Schwierigkeiten beim Entbündeln sind häufiger anzutreffen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Kinder könnten an der falschen Stelle addieren oder subtrahieren, beispielsweise 100 zu 3.900 addieren und 3.910 statt 4.000 schreiben oder 10 zu 4.590 addieren und 4.690 schreiben. Die Schüler*innen können möglicherweise nicht richtig übertragen oder bündeln, weil sie nicht erkennen, dass durch das Addieren von 1 zu 9.899 die Zehner- und Hunderterstelle erhöht wird, um 9.900 zu erreichen. Ähnlich verhält es sich beim Subtrahieren von 1, 10 oder 100: Kinder könnten antworten, dass 1 weniger als 7.000, 6.000 ist, oder (wenn sie gelernt haben, dass solche Antworten eine oder mehrere 9en enthalten sollten) 7.009 oder 6.009 (andere Antworten sind möglich). 10 weniger als 3.500 könnte unter anderem mit 3.400 oder 2.500 beantwortet werden. Kinder könnten missverstehen, was „1 mehr/weniger", „10 mehr/weniger" oder „100 mehr/weniger" bedeutet, und die Änderung auf die falsche Ziffer anwenden. Ein weiterer häufiger Fehler ist das falsche Befolgen einfacher Muster, z. B. immer nur die letzte Ziffer zu erhöhen oder zu verringern, unabhängig von der Struktur der Zahl. Abgesehen von Fehlern oder Nichtantworten sollte es als Warnsignal gewertet werden, wenn ein Kind sich auf algorithmische Addition oder Subtraktion verlässt, um Antworten zu finden, selbst wenn die Antworten richtig sind. Kinder sollten in der Lage sein, die Antworten schnell zu nennen, basierend auf ihrem Verständnis. Diese Fehler deuten oft auf Schwierigkeiten beim Verständnis des Stellenwerts, beim Übertragen/Bündeln, Entbündeln/Borgen und beim Verbinden von Addition und Subtraktion mit der richtigen Position in mehrstelligen Zahlen hin, die für genaues Rechnen und Kopfrechnen unerlässlich sind.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Wenn ein Kind Schwierigkeiten mit dem Addieren oder Subtrahieren von 1, 10 oder 100 hat, ist es wichtig, zunächst sein Verständnis des Dezimalsystems und des Stellenwerts zu beurteilen. Wie bereits erwähnt, ist das Verständnis des Stellenwerts vielschichtig, und es wird empfohlen, das aktuelle Verständnis der

Prinzipien des Dezimalsystems umfassender zu beurteilen. Die Unterstützung kann mit konkreten Aktivitäten beginnen, bei denen Hilfsmittel wie Einer, Zehner und Hunderter verwendet werden, um Dezimalbündel zu bilden und den Kindern zu helfen, zu verstehen, wie sich Zahlen beim Addieren und Subtrahieren verändern. Es ist wichtig, Aufgaben zu verwenden, bei denen das Kind mit geeigneten Materialien Dezimalbündel bildet, und sich dann auf spezifische Aufgaben zu konzentrieren, die das Bündeln und Entbündeln erfordern, wie z. B. 1 zu 9.899 addieren, 100 zu 3.900 addieren oder 3.000 halbieren. Die Verwendung von Stellenwerttafeln ist dabei ein wichtiges Hilfsmittel. Nach und nach sollten die Kinder üben, diese Aufgaben ohne Materialien zu lösen, wobei sie auf ihren früheren konkreten Erfahrungen aufbauen. Ermutigen Sie die Kinder dabei, ihre Überlegungen und Handlungen zu verbalisieren, zunächst unter Anleitung und später zunehmend selbstständig und vorausschauend, um die Verinnerlichung des Bündelungs- und Entbündelungsprinzips sowie das genaue Addieren und Subtrahieren zu unterstützen. Didaktische Tipps zur Entwicklung eines Verständnisses des Dezimalstellwertsystems finden Sie unter: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/

Aufgabe 1.3: Zahlen vergleichen

a)	6.001	5.999
b)	7.955	7.599
c)	99.899	102.101

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, mehrstellige Zahlen zu vergleichen und den Vergleich mithilfe der Symbole für größer als, kleiner als oder gleich genau darzustellen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Vergleichen von Zahlen ist eine Schlüsselkompetenz, da es für das Verständnis der Größe und Reihenfolge von Zahlen von grundlegender Bedeutung ist. Wenn Schüler*innen Zahlen vergleichen, beginnen sie, Muster in Ziffern zu erkennen und zu verstehen, wie Zahlen größer oder kleiner werden, was die Entwicklung des Verständnisses für Stellenwerte fördert. Diese Kompetenz stärkt auch das logische Denken und die Entscheidungsfindung, da die Schüler*innen Zahlen sorgfältig analysieren müssen, um zu bestimmen, welche größer, kleiner oder gleich ist. Das Vergleichen von Zahlen bildet die Grundlage für viele zukünftige mathematische Aufgaben, darunter das Verstehen von Ungleichungen, das Lösen von Rechenaufgaben und das Arbeiten mit Dezimalzahlen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Wenn Schüler*innen aufgefordert werden, das richtige Symbol (<, >, =) zwischen Zahlen wie 5.999 und 6.001, dann zwischen 7.955 und 7.599 oder zwischen 99.899 und 102.101 einzufügen, können mehrere häufige Fehler auftreten. Ein häufiger Fehler ist es, sich auf die letzte Ziffer statt auf die ganze Zahl zu konzentrieren. Beispielsweise könnte ein Schüler 5.999 > 6.001 schreiben, weil 9 größer ist als 1 in der Einerstelle. Ähnlich könnte ein Lernender im Beispiel mit 7.955 und 7.599 nur die letzten beiden Ziffern (55 vs. 99) vergleichen und fälschlicherweise zu dem Schluss kommen, dass 7.955 < 7.599 ist, wobei er die Tausenderstelle ignoriert. Ein weiterer häufiger Fehler ist die Verwechslung der Ziffernanzahl, bei der Lernende denken, dass 99.899 > 102.101 ist, weil „99…" größer als „10…" erscheint. Manche verwenden auch das Gleichheitszeichen falsch, indem sie beispielsweise 7.955 = 7.599 schreiben, weil die Zahlen sehr ähnlich aussehen. Es besteht auch die Möglichkeit von Fehlern bei der Ausrichtung der Symbole, bei denen ein Lernender weiß, dass 5.999 kleiner als 6.001 ist, aber dennoch 5.999 > 6.001 schreibt, was auf Schwierigkeiten hinsichtlich der Ausrichtung des Ungleichheitszeichens hindeutet. Warnsignale, auf die man achten sollte, sind unter anderem, wenn Schüler*innen Vergleiche langsam oder zögerlich anstellen, sich konsequent nur auf die letzte Ziffer verlassen, wiederholt „=" als sichere Schätzung verwenden oder fehlerhafte Abkürzungen wie „die größere letzte Ziffer bedeutet die größere Zahl" anwenden. All dies deutet auf Missverständnisse hinsichtlich des Stellenwerts und der korrekten Verwendung von Vergleichssymbolen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Wenn Schüler*innen Schwierigkeiten beim Vergleichen von Zahlen haben, beobachten wir oft zwei Hauptarten von Fehlern. Einige Schüler*innen wissen, welche Zahl größer oder kleiner ist, verwenden aber das falsche Symbol (<, >, =), während andere Schwierigkeiten haben, zu bestimmen, welche Zahl größer ist, und manchmal durch die Anzahl der Ziffern verwirrt werden. Die Unterstützung kann auf jede Situation zugeschnitten werden. Für Schüler*innen, die Symbole verwechseln, ist es hilfreich, die Bedeutung jedes Symbols zu vermitteln, sie vor dem Schreiben ihre Überlegungen verbalisieren zu lassen und Übungen zur korrekten Verwendung der Symbole anzubieten. Schüler*innen, die Schwierigkeiten haben zu verstehen, welche Zahl größer ist, können Lehrer*innen helfen, indem sie sie anleiten, Zahlen Ziffer für Ziffer von links nach rechts zu vergleichen, mit einfacheren ganzen Zahlen zu beginnen, bevor sie zu größeren Zahlen und Dezimalzahlen übergehen, und sie ermutigen, ihre Überlegungen zu erklären, damit sie ein echtes Verständnis entwickeln, anstatt nur Regeln zu befolgen. Die Verwendung von Stellenwerttafeln als Hilfsmittel kann das Verständnis für die Größenvergleiche unterstützen.

Aufgabe 1.4: Addition und Subtraktion

a.)	248 + 252 = ________	e.)	723 – 24 = ___________
b.)	637 + 199 = ________	f.)	453 – 199 = ________
c.)	3.600 + 900 = _____________	g.)	3.200 – 700 = _________
d.)	56.000 + 8.000 = ____________	h.)	54.000 – 5.000 = __________

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Sicheres Anwenden von Strategien bei Additions- und Subtraktionsaufgaben unter Verwendung von Kompensationsmethoden, Strategien für Nachbarzahlen und Verständnis für Stellenwerte, einschließlich Kopfrechnen mit Hundertern und Tausendern und Nullen als Platzhalter.
Von den Schüler*innen wird erwartet, dass sie mehrstellige Zahlen berechnen und effiziente Berechnungen wie 637 + 99, 723 – 24, 3.600 + 900 oder 54.000 – 5.000 ohne schriftliche Algorithmen durchführen können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Beherrschen von Strategien zum Kopfrechnen ist für das fortgeschrittene Mathematiklernen von grundlegender Bedeutung, da die Schüler*innen die numerische Flexibilität entwickeln, die für die Bewältigung komplexer mehrstufiger Probleme, algebraisches Denken und proportionales Denken in späteren Jahren unerlässlich ist. Rechenstrategien verbessern die Effizienz der Problemlösung erheblich, indem sie die kognitive Belastung reduzieren und es den Schüler*innen ermöglichen, sich auf das Verstehen des Problemkontexts, die Auswahl geeigneter Rechenoperationen und die vertiefte Auseinandersetzung mit mathematischen Überlegungen zu konzentrieren. Diese Strategien stehen in engem Zusammenhang mit dem konzeptionellen Wissen der Schüler*innen über Zahlen und deren Zusammenhänge, ihrem Zahlenverständnis und dem Stellenwert. Beispielsweise können Schüler*innen erkennen, dass 637 + 99 durch „637 + 100 – 1" gelöst werden kann oder dass 3.600 + 900 „36 Hunderter plus 9 Hunderter gleich 45 Hunderter" ergibt, also 4.500. Dieses Verständnis des Zehnersystems und der unterschiedlichen Werte von Ziffern an verschiedenen Stellen ist für die spätere Arbeit mit größeren Zahlen, Dezimalzahlen, Brüchen und algebraischen Notationen unerlässlich. Sicheres Kopfrechnen mit und ohne Nullen bereitet die Schüler*innen auf formale schriftliche Methoden vor, unterstützt das Schätzen und Überprüfen und hat einen klaren praktischen Bezug zu alltäglichen Situationen, in denen es um Geld, Zeit, Maße, Mengen und große Zahlen geht.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Rechenfehler treten auf, wenn Schüler*innen Schwierigkeiten mit Kompensationsstrategien haben. Sie erkennen möglicherweise, dass eine Zahl nahe an einem Vielfachen von 10 oder 100 liegt (z. B. 99 oder 199), vergessen jedoch, ihr Endergebnis anzupassen, und berechnen 637 + 99 als 637 + 100 = 737, ohne 1 abzuziehen. Sie können auch angepasste Zahlen falsch berechnen, z. B. 248 + 52, 248 + 50 oder 723 – 20, was Lücken in den grundlegenden Rechenkenntnissen offenbart. Fehlvorstellungen zum Stellenwert stellen erhebliche konzeptionelle Herausforderungen dar. Die Schüler*innen behandeln Ziffern möglicherweise unabhängig voneinander und ignorieren ihre Positionen, indem sie beispielsweise 3.600 + 900 durch Addition von 3 + 9 und 6 + 0 berechnen oder nicht erkennen, dass 3.600 sechsundreißig Hunderter und 900 neun Hunderter sind. Bei der Arbeit mit Tausendern erkennen sie möglicherweise nicht, dass 54.000 fünfzigtausend sind, und rechnen 54.000 – 5.000 falsch. Fehler im Zusammenhang mit der Null treten auf, wenn Schüler*innen die Rolle der Null als Platzhalter missverstehen, Nullen weglassen oder hinzufügen und Antworten wie 5.680 oder 640.000 für 56.000 + 8.000 geben. Fehler bei der Strategieauswahl deuten auf konzeptionelle Schwierigkeiten hin. Einige Schüler*innen verlassen sich auf ineffiziente Zählstrategien (z. B. einzeln zählen) oder versuchen, schriftliche Algorithmen mental zu replizieren, was die kognitive Belastung und das Fehlerrisiko erhöht. Andere wenden möglicherweise Kompensationsmaßnahmen an. Warnzeichen sind unter anderem eine starke Abhängigkeit von Zählmethoden bei Aufgaben, die für strategisches Kopfrechnen konzipiert sind, Verwirrung darüber, welche Ziffer durch das Addieren oder Subtrahieren von Zehnern, Hundertern oder Tausendern betroffen ist, inkonsistente Leistungen oder offensichtliche Angst vor dem „Kopfrechnen". Diese Muster deuten oft auf ein schwaches Zahlenverständnis und ein unsicheres Verständnis des Stellenwerts hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung sollte sich darauf konzentrieren, das Verständnis für Stellenwerte zu stärken und ein Repertoire an mentalen Strategien aufzubauen. Zahlzerlegungen sind eine wichtige Vorläuferfähigkeit, visuelle Darstellungen besonders hilfreich. Zahlenstrahle können zur Veranschaulichung dienen (z. B. indem sie 637 + 99 als einen Sprung von +100 und einen Schritt zurück von –1 darstellen). Stellenwerttafeln und Zehnermaterialien (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender) können verwendet werden, um Berechnungen wie 3.600 + 900 oder 3.200 – 700 zu verdeutlichen, wodurch „36 Hunderter plus 9 Hunderter" oder „32 Hunderter minus 7 Hunderter" sichtbar werden. Bringen Sie den Schüler*innen bei, ähnliche Zahlen zu erkennen und wann eine Kompensation sinnvoll ist. Üben Sie mit Aufgaben wie 37 + 19, 248 + 52, 637 + 99, 723 – 24 oder 453 – 99 und führen Sie sie durch den zweistufigen Prozess: Anpassen, um eine leicht zu merkende Zahl zu erhalten, dann in die entgegengesetzte Richtung kompensieren. Bauen Sie die Fähigkeiten schrittweise auf, beginnend mit einfacheren Zahlen und übergehend zu größeren Zahlen und komplexeren Mustern (z. B. 36 + 9 → 360 + 90 → 3.600 + 900). Verwenden Sie Schätzungen, um zu überprüfen, ob die Antworten plausibel sind, und umgekehrte Rechenoperationen, um die Ergebnisse zu überprüfen. Realistische Kontexte (Preise, Entfernungen, Mengen) können Berechnungen sinnvoll machen und die Nützlichkeit von mentalen Strategien hervorheben.

Aufgabe 1.5: Berechnen fehlender Werte bei Addition und Subtraktion

a) 37 + _______ = 82	c) 88 – _______ = 37
b) _______ + 90 = 789	d) _______ – 55 = 23

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe prüft die Fähigkeit der Schüler*innen, fehlende Komponenten (Ausgangsmenge, Austauschmenge) in Additions- und Subtraktionsaufgaben zu bestimmen, indem sie die Umkehrbeziehung zwischen den Rechenoperationen verstehen und anwenden. Konkret müssen sie erkennen, ob der erste Summand, zweite Summand, Minuend oder Subtrahend gesucht ist, und die entsprechende Umkehroperation (Subtraktion bzw. Addition) durchführen.

Warum ist diese Kompetenz eine Schlüsselkompetenz?
Das Verständnis der Umkehrrelationen zwischen Addition und Subtraktion ist eine zentrale arithmetische Kompetenz, die weit über das bloße Rechnen hinausgeht. Diese Fähigkeit zeigt, dass Schüler*innen Rechenoperationen nicht nur prozedural ausführen, sondern deren strukturelle Beziehungen durchdrungen haben. Das Bestimmen der fehlenden Menge erfordert flexibles Denken über Zahlenbeziehungen und ist grundlegend für das Lösen von Gleichungen in der Algebra (z. B. x + 37 = 82). Diese Kompetenz stärkt das relationale Verständnis von Zahlen – die Einsicht, dass Zahlen zueinander in Beziehung stehen und dass diese Beziehungen durch verschiedene Operationen ausgedrückt werden können. In Alltagssituationen begegnen uns solche Fragestellungen ständig: „Ich habe 37 €, brauche aber 82 €. Wie viel fehlt mir noch?“ oder „Nach einer Abgabe von 55 € bleiben mir 23 € übrig. Wie viel hatte ich vorher?“ Die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Darstellungen einer Rechenoperation zu wechseln, ist außerdem essentiell für das Überprüfen von Rechenergebnissen und entwickelt metakognitive Fähigkeiten. Schüler*innen, die diese Umkehrbeziehungen verstehen, können Fehler selbstständig erkennen und korrigieren.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Fehler im Verständnis der Rechenoperationen treten auf, wenn Schüler*innen die falsche Umkehrung wählen. Bei Aufgabe a) (37 + __ = 82) berechnen sie fälschlicherweise 37 + 82 = 119 statt 82 – 37 = 45, weil sie das Pluszeichen sehen und automatisch addieren, ohne die Aufgabenstruktur zu analysieren. Bei Aufgabe d) (__ – 55 = 23) rechnen sie 55 – 23 = 32 anstatt die (größere) Zahl zu suchen, von der 55 subtrahiert wird, so dass 23 übrig bleibt: 55 + 23 = 78.
Positionsfehler entstehen, wenn zwar die richtige Operation gewählt, aber die Zahlen in falscher Reihenfolge verwendet werden. Bei Aufgabe c) (88 – __ = 37) könnte 37 – 88 berechnet werden statt 88 – 37 = 51, was zu negativen Zahlen oder der Aussage „geht nicht” führt.
Konzeptionelle Missverständnisse zeigen sich durch Probierstrategien statt systematischer Nutzung der Umkehrrelation. Kinder setzen verschiedene Zahlen ein und prüfen, ob das Ergebnis stimmt. Bei größeren Zahlen wie in Aufgabe b) (__ + 90 = 789) wird dies sehr ineffizient. Manche verwenden auch Zählstrategien (vorwärts oder rückwärts zählen), was bei solchen Aufgaben aufwendig und fehleranfällig ist.
Rechenfehler können auftreten, selbst wenn die richtige Strategie gewählt wurde. Bei Aufgabe b) wird zwar korrekt erkannt, dass 789 – 90 gerechnet werden muss, aber beim Subtrahieren entsteht ein Fehler

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Förderung sollte mit konkreten Materialien und Visualisierungen beginnen. Nutzen Sie Plättchen oder Würfel, um die Teil-Ganzes-Beziehung handelnd zu erfahren: „Ich habe 37 rote Plättchen. Wie viele (blaue) Plättchen muss ich hinzunehmen, damit ich insgesamt 82 Plättchen habe?”. Lassen Sie Kinder ihre Überlegungen verbalisieren: „Das Ganze ist 82, ich habe bereits einen Teil davon, nämlich 37. Also nehme ich diesen Teil weg, um den Rest zu finden.“ Gestufte Übungen beginnen mit einfachen Zahlen und nur einem Aufgabentyp (z. B. nur fehlender zweiter Summand), bevor verschiedene Typen gemischt und Zahlengrößen gesteigert werden. Verknüpfen Sie Aufgaben mit Alltagssituationen: „Tom hat 37 € gespart, braucht aber 82 € für ein Geschenk. Wie viel fehlt noch?” Diese Kontextualisierung hilft beim Verstehen der Aufgabenstruktur und ermöglicht Plausibilitätsprüfungen.

Aufgabe 1.6: Grundlegende Rechenoperationen mit Zahlen – Multiplikation und Division

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe umfasst die Sicherheit und Automatisierung der Schüler*innen beim Abrufen und Anwenden grundlegender Multiplikations- und Divisionsaufgaben sowie ihre Fähigkeit, Multiplikationen und Divisionen mit Zahlen, die Vielfache von zehn, hundert und tausend sind, durchzuführen.

a.) 6 · 1 = ______	g.) 80 : 10 = ______
b.) 10 · 8 = ______	h.) 6 : 6 = ______
c.) 8 · 4 = ______	i.) 7 : 1 = ______
d.) 9 · 0 = ______	j.) 72 : 9 = ______
e.) 7 · 5.000 = __________	k.) 60.000 : 100 = __________
f.) 50 · 20 = __________	l.) 7.200 : 9 = __________

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Beherrschen grundlegender Multiplikations- und Divisionsaufgaben ist aus mehreren Gründen unerlässlich. Es bildet eine solide Grundlage für folgende Inhalte des Mathematikunterrichts: Wenn Schüler*innen Aufgaben wie 6 · 1, 10 · 8, 8 · 4 oder 72 : 9 schnell abrufen können, können sie mehrstellige Multiplikationen und Divisionen effizienter durchführen und Themen wie Bruchrechnung oder algebraische Inhalte leichter angehen. Die Beherrschung grundlegender Rechenaufgaben erhöht auch die Effizienz bei der Problemlösung, da sie die kognitive Belastung verringert. Anstatt mentale Kapazitäten für einfache Berechnungen aufzuwenden, können sich die Schüler*innen darauf konzentrieren, den Kontext der Aufgaben zu verstehen, geeignete Rechenoperationen auszuwählen und Strategien zu wählen. Darüber hinaus haben Multiplikation und Division klare Anwendungen in der realen Welt, von der Berechnung von Kosten und Maßen bis hin zum Teilen von Mengen und dem Arbeiten mit Prozentsätzen. Der Aspekt des „Umgangs mit Nullen" stärkt das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems zusätzlich. Wenn Schüler*innen 7 · 5.000 als „7 · 5 Tausend = 35 Tausend = 35.000" oder 60.000 : 100 als „Wie viele Hunderter sind in 60.000?" sehen, hilft ihnen das, flexibel mit Zehnern, Hundertern und Tausendern zu rechnen. Dieses Verständnis der Stellenwerte bildet die Grundlage für das flexible Rechnen mit mehrstelligen Zahlen (und später mit Dezimalzahlen) und für die Verknüpfung dieser Zahlen mit alltäglichen Kontexten, z. B. Schätzen, grobe Berechnungen und Einschätzen von Größenordnungen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Schüler*innen, die das Multiplizieren lernen, können typische Fehler und Warnsignale zeigen. Ein häufiges Problem ist das Verlassen auf das Zählen mit den Fingern, selbst bei einfachen Rechenaufgaben. Einige Schüler*innen überspringen möglicherweise Aufgaben oder raten Antworten, indem sie zufällige Zahlen anstelle von berechneten Ergebnissen angeben. Eine übermäßige Abhängigkeit von additiven Strategien (wiederholte Addition) zeigt, dass Multiplikationsaufgaben noch nicht automatisiert sind. Bei der Division können Schüler*innen die Rechenoperationen verwechseln und die (leichtere) Multiplikation statt Division ausführen (z. B. 80 : 10 als 80 · 10 interpretieren). Möglicherweise habe sie Probleme mit den strukturellen Beziehungen der Multiplikation und Division als Umkehroperationen und erkennen beispielsweise bei der Lösung von 72 : 9 nicht, dass 9 · 8 = 72 ist. Auch die falsche Anwendung von Identitäts- und Umkehrregeln ist häufig, beispielsweise wenn nicht erkannt wird, dass 6 : 6 = 1 oder 7 : 1 = 7 ist.

Beim Umgang mit Nullen und Vielfachen von zehn können Schüler*innen die Nullen falsch handhaben. Sie können Nullen übersehen oder hinzufügen (z. B. 350 oder 3.500.000 statt 35.000 für 7 · 5.000) oder sie erkennen nicht, dass 50 · 20 als 5 · 2 mit zwei Nullen im Ergebnis berechnet werden kann. Solche Fehler deuten auf ein unsicheres Verständnis des Stellenwerts und der Beziehung zwischen Zehnern, Hundertern und Tausendern hin. Wichtige Warnsignale sind:

- die Verwendung von Zählen oder wiederholter Addition/Subtraktion für diese Aufgaben,
- Schwierigkeiten, zu erklären, was 80 : 10, 72 : 9 oder 60.000 : 100 im Kontext tatsächlich bedeutet,
- sichtbare Ängste, Stress oder Vermeidungsverhalten bei der Bearbeitung von Multiplikations-, Divisions- oder „Null"-Aufgaben.

Diese Anzeichen deuten darauf hin, dass Multiplikation, Division und Stellenwert noch nicht sicher verstanden oder automatisiert sind.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die Defizite bei dieser Aufgabe zeigen?
Die Unterstützung sollte schrittweise erfolgen, beginnend mit dem konzeptionellen Verständnis bis hin zur Automatisierung, wobei stets auf den Beziehungen zwischen bekannten Fakten aufgebaut werden sollte.

1. **Überprüfen Sie das operative Verständnis von Multiplikation und Division:**
   Stellen Sie sicher, dass die Schüler*innen verstehen, was Multiplikation und Division bedeuten, bevor sie sich auf das Auswendiglernen konzentrieren. Können sie beispielsweise 10 · 8 als „10 Gruppen zu je 8" oder „8 Gruppen zu je 10" erklären? Können sie 80 : 10 als gleichmäßige Aufteilung von 80 Gegenständen in 10 Gruppen darstellen? Verwenden Sie konkrete Materialien (Zählsteine, Blöcke, Arrays), Zeichnungen und reale Kontexte, um die Bedeutung zu vermitteln.
2. **Überprüfen und festigen Sie wichtige Multiplikationstabellen:**
   Stellen Sie zunächst sicher, dass die „Einstiegstabellen" (2er-, 5er- und 10er-Reihe) automatisiert sind, und erweitern Sie dann auf andere Reihen. Wenn diese nicht automatisiert sind, arbeiten Sie systematisch daran, bevor Sie flüssiges Dividieren erwarten, da Divisionsaufgaben wie 80 : 10 oder 72 : 9 von der Kenntnis der entsprechenden Multiplikationen abhängen.
3. **Nutzen Sie die umgekehrte Beziehung, um Divisionsaufgaben abzuleiten:**
   Üben Sie, jede Division mit einer Multiplikation zu verbinden:
   - 72 : 9 → „9 · ? = 72" → 9 · 8 = 72
   - 6 : 6 → „6 · ? = 6" → 6 · 1 = 6
   - 7 : 1 → „1 · ? = 7" → 1 · 7 = 7

Dies reduziert den Lernaufwand und stärkt das Verständnis, dass Division aus Multiplikation abgeleitet werden kann.

4. **Entwickeln Sie ein Verständnis für Stellenwerte und den „Umgang mit Nullen"**
   Verwenden Sie Zehnermaterialien und Stellenwerttafeln, um zu zeigen, dass:
   - 7 · 5.000 „7 mal 5 Tausend" → 35 Tausend → 35.000 ist,
   - 50 · 20 kann als 5 · 2 Zehner · Zehner gesehen werden,
   - 60.000 : 100 die Frage „Wie viele Hunderter sind in 60.000?" stellt.

Betonen Sie, dass 10 Einer 1 Zehner ergeben, 10 Zehner 1 Hunderter, 10 Hunderter 1 Tausender usw. Vermeiden Sie es, „Nullen hinzufügen oder entfernen“ als Regel zu lehren, ohne dieses Verständnis zu vermitteln.

5. **Automatisierung auf der Grundlage von Verständnis**
   Sobald Bedeutung und Zusammenhänge klar sind, üben Sie regelmäßig, damit die Antworten schnell und zuverlässig werden. Verwenden Sie Muster (z. B. Aufbau von 5 · 8 auf 10 · 8), Rechenfamilien, Spiele und kurze tägliche Übungen. Ermutigen Sie die Schüler*innen, ihre Strategien laut zu erklären, damit effizientes Denken verinnerlicht wird und Fehlvorstellungen sichtbar werden.

Durch die Kombination von Grundlagenarbeit, dem Verständnis der umgekehrten Beziehung zwischen Multiplikation und Division und dem Verständnis der Stellenwerte für Vielfache von zehn können Kinder flexible und sichere Kopfrechenfähigkeiten entwickeln, die das spätere mathematische Lernen unterstützen.

Aufgabe 1.7: Multiplikation und Division

a) 3 · ___ = 126	c) 54 : ___ = 6
b) 172 = 4 · ___	d) ___ : 3 = 27

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe zielt darauf ab, dass die Schüler*innen die strukturelle Beziehung zwischen Multiplikation und Division verstehen. In den vier Unteraufgaben sollen die Schüler*innen eine fehlende Zahl in einer Aufgabe angeben, die entweder Multiplikation oder Division darstellt, z. B. „3 · ___ = 126” oder „172 = 4 · ___”. Um diese Aufgaben richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen die Rolle der bekannten und unbekannten Zahlen erkennen und flexibel zwischen den Rechenoperationen wechseln. Sie müssen die Gleichungen nicht nur als Aufforderung zum Rechnen interpretieren, sondern als Ausdruck einer Teil-Ganzes-Beziehung, in der eine Größe aus der Multiplikation oder Division zweier anderer Größen resultiert, und das Gleichheitszeichen als Äquivalenzrelation erkennen. Diese operative Flexibilität ist ein Kennzeichen für ein tieferes Verständnis der Arithmetik und unerlässlich für den Zugang zu fortgeschritteneren mathematischen Inhalten.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Erkennen und Anwenden der umgekehrten Beziehung zwischen Multiplikation und Division ist eine Schlüsselkompetenz für das spätere mathematische Lernen. Dieses Verständnis bildet die Grundlage für das Denken mit Verhältnissen, Proportionen, algebraischen Ausdrücken und funktionalen Beziehungen. Gemäß dem DiToM-Rahmenwerk werden solche Fähigkeiten als mathematische Schlüsselkompetenzen eingestuft, da ihr Fehlen den zukünftigen Lernfortschritt behindern oder sogar blockieren können. Schüler*innen, die eine Gleichung strukturell interpretieren können, beispielsweise verstehen, dass „3 · ___ = 126“ (z.B. Wie groß muss eine Gruppe sein, wenn 3 dieser Gruppen insgesamt 126 ergeben) gleichbedeutend ist mit der Bestimmung von „126 : 3“ (z.B. 126 werden in drei gleich große Gruppen zerlegt, wie groß ist eine dieser Gruppen?), zeigen mehr als nur das Abrufen von Verfahren: Sie beschäftigen sich mit mathematischem Denken. Die frühzeitige Entwicklung dieser Fähigkeit stellt sicher, dass die Schüler*innen besser für den Umgang mit symbolischen Darstellungen und mehrstufigen Problemlösungen in der Mathematik der Sekundarstufe gerüstet sind.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Schüler*innen, die den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division noch nicht verinnerlicht haben, zeigen häufig den Fehler, alle Gleichungen als Vorwärtsmultiplikation zu interpretieren, selbst wenn die umgekehrte Operation erforderlich ist. Wenn sie beispielsweise auf „172 = 4 · ___“ stoßen, berechnen die Schüler*innen fälschlicherweise „172 · 4“, anstatt zu dividieren. Andere raten aufgrund auswendig gelernter Fakten, ohne die Struktur der Gleichung zu berücksichtigen. Ein Missverständnis der Funktion des Gleichheitszeichens – als Hinweis zum Berechnen und nicht als Symbol für Gleichheit – kann ebenfalls zu verfahrenstechnisch korrekten, aber falschen Antworten führen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Es ist wichtig, verwandte Zahlenkonstanten (z. B. „6 · 4 = 24“, „24 : 4 = 6“ und „24 : 6 = 4“) explizit miteinander zu verknüpfen, um die Umkehrbarkeit der Rechenoperationen hervorzuheben. Die Förderung der Verbalisierung der Überlegungen der Schüler*innen, beispielsweise durch die Frage „Welche Zahl ergibt multipliziert mit 4 das Ergebnis 172?“, unterstützt die Verinnerlichung. Schließlich sollte die Variation der Position der gesuchten Zahl (am Anfang, in der Mitte oder am Ende der Gleichung) geübt werden, um das flexible Verständnis der Gleichungsstruktur zu vertiefen. Um Schüler*innen zu unterstützen, die mit diesem Konzept Schwierigkeiten haben, ist es hilfreich, mit visuellen Darstellungen zu arbeiten, die multiplikative Strukturen sichtbar machen (Polotskaia & Savard, 2021). Diese Modelle ermöglichen es den Schüler*innen zu sehen, wie eine Menge aus gleichen Teilen zusammengesetzt oder in diese zerlegt werden kann – entsprechend der Multiplikation bzw. Division.

Aufgabe 1.8: Reihenfolge der Rechenoperationen (Prioritätsregeln)

$14 + 2 \cdot 3 =$ ________

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe testet das Verständnis der Schüler*innen für die konventionelle Reihenfolge der Rechenoperationen, insbesondere die Priorität der Multiplikation gegenüber der Addition. Die Schüler*innen müssen den Ausdruck „$14 + 2 \cdot 3$“ richtig interpretieren und auswerten, indem sie die Regel anwenden, dass die Multiplikation vor der Addition durchgeführt wird. Dies erfordert nicht nur Verfahrenssicherheit, sondern auch ein Bewusstsein für die hierarchische Struktur der arithmetischen Operationen. Die Aufgabe geht daher über das reine Faktenwissen hinaus und bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, numerische Ausdrücke richtig zu analysieren und zu strukturieren, was einen entscheidenden Schritt auf dem Weg zur algebraischen Kompetenz darstellt.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis der Reihenfolge der Rechenoperationen ist eine grundlegende Voraussetzung für die Arbeit mit komplexeren arithmetischen Ausdrücken und später mit algebraischen Ausdrücken und Gleichungen. Im Rahmen von DiToM wird die Fähigkeit, mehrstufige Ausdrücke gemäß mathematischen Konventionen zu verarbeiten, als Schlüsselkompetenz angesehen, da sie symbolischem Denken und allgemeiner Problemlösungsfähigkeit zugrunde liegt.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein typischer Fehler bei dieser Aufgabe ist die Auswertung des Ausdrucks von links nach rechts ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Rechenoperationen, d. h. zuerst werden 14 und 2 addiert, um 16 zu erhalten, und dann wird mit 3 multipliziert, um 48 zu erhalten. Dieser Fehler offenbart eine lineare Rechenweise und ein mangelndes konzeptionelles Verständnis der Reihenfolge der Rechenoperationen. Selbst wenn die Schüler*innen zum richtigen Ergebnis kommen, kann die Verwendung von „Versuch und Irrtum“ oder Vermutungen anstelle von strukturiertem Denken ein Hinweis auf konzeptionelle Lücken sein.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Gezielte Unterstützung sollte damit beginnen, die Struktur von Ausdrücken sichtbar zu machen, beispielsweise durch die Verwendung von Farbcodierungen, Klammern oder visuellen Modellen, die Gruppierungen darstellen. Lehrer*innen können die Auswertung von Ausdrücken Schritt für Schritt modellieren und die Schüler*innen dazu ermutigen, ihre Überlegungen zu verbalisieren: „Zuerst rechne ich 2 mal 3, weil die Multiplikation Vorrang vor der Addition hat. Dann addiere ich 14.“ In ähnlicher Weise können ikonische Darstellungen von Rechenregeln helfen, die Rechenprioritäten zu unterscheiden und zu verstehen. Das Üben mit einer Vielzahl von Ausdrücken – einschließlich solcher mit und ohne Klammern – kann helfen, zu verdeutlichen, wann und warum die Reihenfolge wichtig ist. Die Schüler*innen profitieren auch davon, wenn sie falsche Strategien untersuchen und diskutieren, warum diese zu falschen Ergebnissen führen. Mit der Zeit helfen regelmäßige Übung und strukturierte Reflexion dabei, die Regeln zu verinnerlichen und das Selbstvertrauen der Schüler*innen im Umgang mit mehrstufigen Berechnungen zu stärken.

Aufgabe 1.9: Schriftlichen Text in mathematische Ausdrücke übersetzen

> Tom befolgt die folgenden Anweisungen:
>
> *Die Zahl 4 wird zu 5 addiert.*
> *Das Ergebnis wird mit 8 multipliziert.*
>
> Kreuze an, welcher Term zum richtigen Ergebnis führt.
>
> ☐ $5 + 4 \cdot 8$
> ☐ $(5 + 4) \cdot 8$
> ☐ $5 + (4 \cdot 8)$
> ☐ $5 \cdot 8 + 4$

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine kurze verbale Sequenz zu interpretieren, die zwei aufeinanderfolgende Operationen beschreibt – zuerst eine Addition, dann eine Multiplikation – und diese Sequenz in einen symbolischen Ausdruck zu übersetzen. Von den Schüler*innen wird nicht erwartet, dass sie das Ergebnis berechnen, sondern dass sie die richtige mathematische Darstellung der Anweisungen identifizieren, da verbale Anweisungen und der entsprechende numerische Ausdruck semantisch nicht kongruent sind (Vergnaud, 1983). Dies erfordert das Erkennen der in der Sprache eingebetteten Reihenfolge der Rechenoperationen und die entsprechende Bildung eines Ausdrucks (z. B. $(4 + 5) \cdot 8$). Die geprüfte Kompetenz ist die Übersetzung eines verbalsprachlichen Ausdrucks in einen mathematischen Ausdruck, einschließlich der Verwendung von Klammern, um die korrekte Rechenstruktur und die Reihenfolge der Rechenoperationen beizubehalten.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, verbale oder kontextbezogene Informationen symbolisch darzustellen, ist für die mathematische Kompetenz von zentraler Bedeutung. Im Rahmen von DiToM wird diese Fähigkeit als Schlüsselkompetenz angesehen, da sie es den Schüler*innen ermöglicht, zwischen verschiedenen Darstellungsweisen – verbal, symbolisch, ikonisch und operativ – zu wechseln und mit der Struktur numerischer Ausdrücke umzugehen (Kieran & Martìnez-Hernàndez, 2022). Diese Übersetzungskompetenz ist nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in der Algebra von entscheidender Bedeutung, wo Schüler*innen regelmäßig mit Situationen konfrontiert werden, in denen sie Ausdrücke aus Textaufgaben, Diagrammen oder Alltagsszenarien erstellen oder interpretieren müssen. Die frühzeitige Beherrschung dieser Fähigkeit unterstützt die Entwicklung von funktionalem Denken, Flexibilität bei der Problemlösung und Sicherheit im Umgang mit mathematischen Modellen.

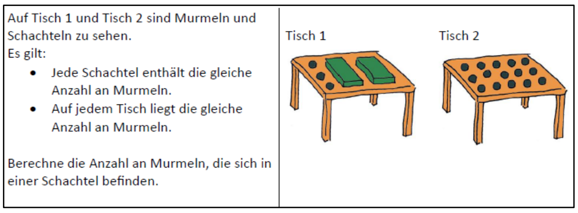
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein häufiger Fehler bei dieser Aufgabe ist die falsche Reihenfolge beim Bilden des Ausdrucks, z. B. wenn „4 wird zu 5 addiert" als „$4 + 5$" interpretiert wird (was mathematisch korrekt ist), aber dann die Multiplikation falsch angewendet wird: entweder „$4 + (5 \cdot 8)$" oder „$4 \cdot 5 + 8$". Dies spiegelt die Schwierigkeit wider, die in der Sprache eingebettete Reihenfolge der Operationen zu erkennen. Diese Muster deuten auf Lücken im Verfahrensverständnis und Schwierigkeiten bei der Koordination von Sprache und mathematischer Struktur hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Um Schüler*innen in diesem Bereich zu unterstützen, ist es wichtig, ein umfassendes Verständnis für die Reihenfolge der Berechnungen zu entwickeln, um die Struktur der Berechnung und die Reihenfolge der Rechenoperationen zu berücksichtigen. Lehrer*innen können modellieren, wie man aus einem gesprochenen Satz einen „Term bildet", und visuelle Organizer (wie Rechenbäume oder Flussdiagramme) verwenden, um den Schüler*innen zu helfen, die Rechenoperationen richtig zu ordnen. Die Betonung der Rolle von Klammern bei der Gruppierung von Rechenoperationen kann Fehlinterpretationen verhindern. Unterrichtsroutinen, die das „Hin- und Herübersetzen" zwischen Sprache und Symbolen beinhalten, können ebenfalls die Darstellungsflexibilität der Schüler*innen stärken. Wenn man die Schüler*innen dazu ermutigt, zu sagen, was der Ausdruck bedeutet (z. B. „zuerst addiere ich, dann multipliziere ich"), hilft dies mit der Zeit, ihr Verständnis der symbolischen Struktur zu festigen.

Aufgabe 1.10: Gleichsetzen von Mengen



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Kompetenz der Schüler*innen, eine visuelle Darstellung einer Teil-Ganzes-Situation mit Gleichheit zu interpretieren. Den Schüler*innen werden zwei Tische gezeigt, die jeweils eine Kombination aus Murmeln und Kästchen enthalten, in denen jeweils die gleiche unbekannte Anzahl von Murmeln versteckt ist. Die wichtigste Anforderung besteht darin, die Anzahl der Murmeln in einer Schachtel anhand der Information abzuleiten, dass beide Tische die gleiche Gesamtzahl an Murmeln enthalten. Das bedeutet, dass die Schüler*innen die Mengen auf beiden Seiten gleichsetzen und die unbekannte Größe bestimmen müssen – eine Form der informellen Gleichungslösung auf der Grundlage visueller Balance. Die Aufgabe zielt daher auf strukturelles Denken, frühes algebraisches Denken und die Fähigkeit ab, Äquivalenz in einem nicht-symbolischen Kontext zu interpretieren.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Interpretieren von Gleichheit ist eine wichtige Vorstufe zum algebraischen Denken. Im Rahmen von DiToM wird dies als Schlüsselkompetenz identifiziert, da es das Verständnis der Schüler*innen für Äquivalenz und Substitution fördert, welche zentrale Ideen sowohl in der Arithmetik als auch in der frühen Algebra darstellen. Indem sie schlussfolgern, dass zwei verschiedene Konfigurationen in der Summe tatsächlich gleich sein müssen, üben die Schüler*innen relationales Denken, anstatt sich allein auf direkte Berechnungen zu verlassen (Radford, 2014). Diese Fähigkeit unterstützt spätere Kompetenzen beim Lösen von Gleichungen und beim Arbeiten mit unbekannten Größen in symbolischer Form. Darüber hinaus bieten solche nicht-symbolischen Aufgaben eine wichtige Brücke für Schüler*innen, die noch dabei sind, Vertrauen in formale Darstellungen zu entwickeln und ermöglichen ihnen den konzeptionellen Zugang durch visuelle Strukturen.

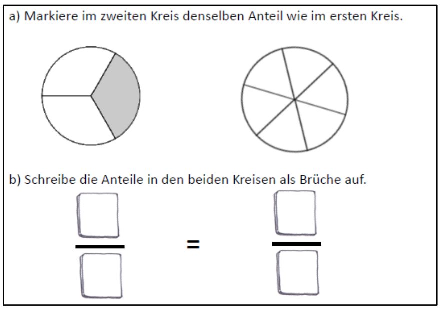
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Schüler*innen, die mit dieser Aufgabe Schwierigkeiten haben, erkennen möglicherweise nicht die Gleichwertigkeit der beiden Seiten. Ein typischer Fehler ist der Versuch, nur die sichtbaren Murmeln zu zählen, wobei die versteckte Menge in den Kisten ignoriert oder ein fester Wert angenommen wird (z. B. „jede Kiste muss 10 Murmeln enthalten“). Andere erkennen vielleicht die Notwendigkeit des Gleichgewichts, berechnen jedoch falsch oder ordnen ihre Überlegungen falsch zu, indem sie beispielsweise die Anzahl in einer Schachtel schätzen, ohne zu überprüfen, ob dies zu gleichen Summen führt. Eine weitere Gruppe von Schüler*innen behandelt das visuelle Bild möglicherweise eher beschreibend als analytisch und berichtet, was sichtbar ist, ohne zu versuchen, Rückschlüsse auf das Unbekannte zu ziehen. Diese Verhaltensweisen deuten auf Lücken im strukturellen Verständnis hin, insbesondere bei der Interpretation von Unbekannten als Mengen, die durch Rückschlüsse aus den bekannten Mengen bestimmt werden müssen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Schüler*innen profitieren von der Arbeit mit praktischen Materialien, die das Konzept der Äquivalenz konkretisieren. Lehrer*innen können Sachkontexte erzählen („Beide Kinder haben die gleiche Anzahl an Murmeln bekommen – wie viele sind in der Schachtel?“), um das Engagement zu fördern und das Problem in einem nachvollziehbaren Kontext zu verankern. Das Zeichnen und Beschriften von Diagrammen, in denen die Schüler*innen Gleichungen wie „$3 + x = 7$“ schreiben, kann dabei helfen, eine Brücke zwischen visuellem Denken und symbolischer Darstellung zu schlagen. Darüber hinaus verstärkt das wiederholte Üben der Identifizierung gleicher, aber unterschiedlich zusammengesetzter Mengen das Konzept der Äquivalenz und unterstützt den Übergang vom additiven Denken zum frühen funktionalen Denken. Wie immer sollten die Schüler*innen dazu ermutigt werden, ihre Überlegungen zu erklären und zu überprüfen, ob die von ihnen vorgeschlagenen Werte ausgewogen sind.

Aufgabe 2.1: Darstellung und Interpretation gleichwertiger Brüche



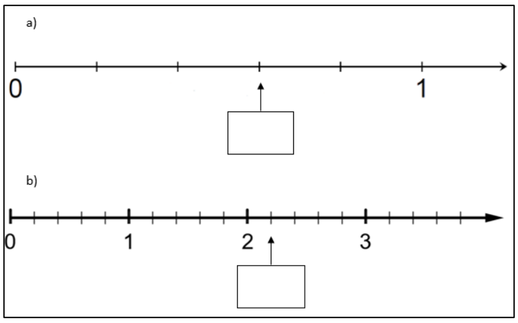
Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe konzentriert sich auf die Fähigkeit, äquivalente Brüche anhand von zwei Darstellungsaspekten zu erkennen und zu konstruieren: zunächst in einem visuellen Format (Schattieren von Teilen eines Kreises) und dann in symbolischer Notation (Schreiben einer Bruchgleichung). In Teil (a) werden die Schüler*innen gebeten, eine visuelle Darstellung zu vervollständigen, indem sie den gleichen Anteil eines Kreises schattieren, wie er in dem vorgegebenen Kreis gezeigt wird. In Teil (b) sollen sie diese Beziehung in Bruchschreibweise ausdrücken. Die geprüfte Schlüsselkompetenz ist die Koordination zwischen dem visuellen Verständnis von Teilen und Ganzen und ihrer formalen Darstellung als äquivalente Brüche.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Verständnis äquivalenter Brüche ist ein Grundpfeiler des Verständnisses rationaler Zahlen und stellt somit eine mathematische Schlüsselkompetenz dar. Es bildet die konzeptionelle Grundlage für Rechenoperationen mit Brüchen, proportionales Denken, Verhältnisbegriffe und algebraische Äquivalenz. Im Rahmen von DiToM wird die Erkenntnis, dass unterschiedlich aussehende Brüche dieselbe Menge darstellen können, als entscheidend für die Entwicklung flexiblen Zahlenverständnisses angesehen. Die Schüler*innen müssen verstehen, dass ein Bruch nicht nur eine Zahl darstellt, sondern auch eine Beziehung zwischen einem Teil und einem Ganzen – und dass diese Beziehung auch dann konstant bleibt, wenn sowohl Zähler als auch Nenner skaliert werden. Aufgaben, die visuelle und symbolische Ebenen kombinieren, fördern ein tieferes Verständnis und unterstützen den Übergang zum abstrakten Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Die Schüler*innen könnten im zweiten Kreis eine falsche Anzahl von Teilen schattieren, z. B. indem sie die Anzahl der schattierten Teile anstelle der proportionalen Größe zuordnen. Dies deutet eher auf eine Zählstrategie als auf relationales Denken hin und zeigt, dass sie den Zähler als statische Zahl und nicht als Teil eines Ganzen betrachten. In Teil (b) könnten die Schüler*innen den gegebenen Bruch ohne Umwandlung kopieren, nicht äquivalente, aber ähnlich aussehende Brüche schreiben (z. B. nur den Zähler verdoppeln) oder die Reihenfolge von Zähler und Nenner verwechseln.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Um ein solides Verständnis für äquivalente Brüche aufzubauen, sollten die Schüler*innen regelmäßig mit Manipulativen und visuellen Modellen arbeiten – wie Bruchkreisen, Balken oder Kacheln –, um gleiche Teile über verschiedene Teilungen hinweg zu sehen und zu erstellen. Der Schwerpunkt sollte darauf liegen, zu erkennen, wie viele Teile von wie vielen Teilen den gleichen Anteil ausmachen und wie sich sowohl die Anzahl der schattierten Teile als auch die Gesamtzahl der Teile parallel verändern. Lehrer*innen können die Schüler*innen dabei anleiten, den Skalierungsprozess in Worte zu fassen, z. B. „Ich habe die Anzahl der Teile insgesamt verdoppelt und die Anzahl der schattierten Teile ebenso verdoppelt." Dies unterstützt die Verinnerlichung der proportionalen Struktur, die hinter der Äquivalenz steht. Überbrückungsaktivitäten – z. B. Schattieren, dann Schreiben, dann mündliches Erklären – sind besonders effektiv, um die Verbindung zwischen visuellen Bildern und formalen Bruchgleichungen zu festigen.

Aufgabe 2.2: Symbolische Darstellung von Zahlen auf einem Zahlenstrahl



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe zielt auf die Fähigkeit der Schüler*innen ab, eine in Teilintervalle unterteilte Zahlengerade zu interpretieren und eine Bruch- oder Dezimalzahl entsprechend ihrer relativen Position zwischen 0 und 1 (oder darüber hinaus) zu platzieren. Die Schüler*innen müssen die Unterteilungen der Zahlengeraden analysieren, die Einheit bestimmen und die richtige Bruch- oder Dezimalzahl identifizieren, die einen bestimmten Punkt markiert. Dies erfordert ein Verständnis von Brüchen als Zahlen mit Größenordnungen und nicht nur als Teil-Ganzes-Beziehungen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, Brüche auf einem Zahlenstrahl zu lokalisieren, ist eine wichtige mathematische Schlüsselkompetenz, da sie eine Verlagerung des Verständnisses von Brüchen als Teile von Objekten hin zu Brüchen als Zahlen auf einer kontinuierlichen Skala widerspiegelt. Diese räumliche Interpretation von Brüchen bildet die Grundlage für das Vergleichen, Ordnen und Rechnen mit Brüchen. Im Rahmen von DiToM gelten die Schätzung und Positionierung auf dem Zahlenstrahl als starke Indikatoren für konzeptionelle Klarheit. Untersuchungen (z. B. Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) zeigen, dass Schüler*innen, die die metrische Struktur der Zahlengeraden verstehen, später eher Erfolg in Arithmetik, Algebra und Geometrie haben. Darüber hinaus bietet die Zahlengerade ein einheitliches Modell, das den Übergang zwischen natürlichen Zahlen, Brüchen, Dezimalzahlen und negativen Zahlen unterstützt.

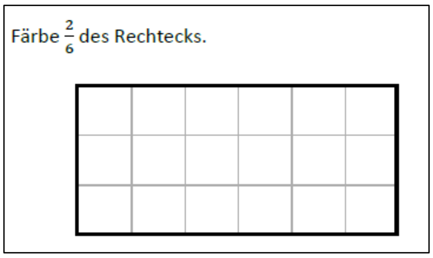
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Schüler*innen verlassen sich oft auf das Zählen von Markierungen und gehen dabei von einer Dezimalunterteilung der Einheit aus, anstatt über die Größe des Bruchteils nachzudenken. Beispielsweise interpretieren sie vier Teilungen fälschlicherweise als „Viertel", unabhängig davon, ob das Ganze in gleiche Teile unterteilt ist oder nicht. Ein weiterer häufiger Fehler ist die falsche Platzierung des Bruchteils – z. B. die falsche Platzierung von 3/4 bei 2/3 aufgrund mangelnder proportionaler Argumentation. Einige Schüler*innen raten möglicherweise aufgrund ihrer visuellen Intuition, anstatt den durch die Unterteilungen implizierten Nenner zu berechnen. In fortgeschritteneren Varianten können Schüler*innen Schwierigkeiten haben, wenn die Zahlengerade nicht bei 0 beginnt oder wenn unechte Brüche oder gemischte Zahlen beteiligt sind. Diese Fehler deuten auf eine unzureichende Integration von Größe, Notation und Struktur hin. Es gibt auch Schüler*innen, die eine falsche Dezimalzahl als Lösung angeben. Bitte beachten Sie Aufgabe 3.1, die sich mit diesem Problem befasst.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Um die Schüler*innen zu unterstützen, ist es unerlässlich, Zeit in den Aufbau eines soliden mentalen Modells der Zahlenreihe zu investieren, das Brüche und Dezimalzahlen umfasst. Lehrer*innen können interaktive Hilfsmittel wie Faltstreifen, Bruchlineale und digitale Zahlenreihen einsetzen, um das proportionale Denken zu fördern. Der Unterricht sollte sich darauf konzentrieren, wie man die Größe eines Einheitsintervalls bestimmt, wie man Bruchteile zählt und wie man diese Schritte mit dem geschriebenen Symbol in Verbindung bringt. Der Vergleich verschiedener Brüche auf derselben Linie hilft dabei, die relationale Größe und Äquivalenz zu verfestigen. Brückenaktivitäten – wie das Zeichnen von Brüchen auf einer Linie, das anschließende Schreiben in symbolischer Form und umgekehrt oder das Herstellen von Beziehungen zu den Schüler*innen bereits bekannten ikonischen Darstellungen (z. B. Kreisanteile) – stärken die repräsentativen Verbindungen.

Aufgabe 2.3: Schattieren eines bestimmten Bruchteils eines Rechtecks



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, eine visuelle Darstellung eines gegebenen Bruchs zu konstruieren, indem sie einen bestimmten Teil einer rechteckigen Fläche schattieren. Von den Schüler*innen wird erwartet, dass sie die richtige Anzahl gleicher Teile identifizieren und die Anzahl der Teile, die dem Zähler entspricht, schattieren, wobei sie erkennen müssen, dass die Gesamtzahl der Teile dem Nenner entspricht. Dies erfordert die Interpretation von Brüchen als Operatoren auf Flächen, d. h. die Verwendung eines Bruchs, um zu definieren, wie viel von einer gesamten Fläche betrachtet wird. Die Aufgabe erfordert eine genaue Unterteilung, räumliches Vorstellungsvermögen und proportionales Denken.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das visuelle Konstruieren eines Bruchs ist ein wichtiger Schritt bei der Entwicklung des relationalen und proportionalen Denkens sowie bei der Überbrückung zwischen informellen und formalen Bruchwissen. Innerhalb des DiToM-Rahmenwerks wird diese Fähigkeit als grundlegend angesehen, da sie das spätere Verständnis von Äquivalenz, Addition und Subtraktion von Brüchen unterstützt. Die Darstellung von Brüchen in einem visuellen Modell wie einem Rechteck verstärkt auch das Verständnis, dass es bei Brüchen nicht nur um diskrete Teile (wie Murmeln oder Zählsteine) geht, sondern auch um Mengen und Flächen. Schüler*innen, die flexibel zwischen Bruchschreibweise und visuellen Modellen wechseln können, entwickeln in der Regel tiefere, besser vernetzte Zahlenkonzepte und sind besser auf abstrakte Aufgaben in der Algebra und darüber hinaus vorbereitet.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Häufige Fehler sind das Schattieren einer falschen Anzahl von Teilen, oft aufgrund von Fehlzählungen oder falscher Identifizierung der Gesamtzahl der Unterteilungen. Die Schüler*innen schattieren möglicherweise willkürlich, ohne einen Bezug zum gegebenen Bruch herzustellen, was auf ein mangelndes Verständnis des Teil-Ganzes-Konzepts hindeuten kann. In einigen Fällen ignorieren die Schüler*innen den Nenner und zählen einfach Einheiten (z. B. schattieren sie zwei Teile, unabhängig davon, wie viele es insgesamt sind).

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Eine gezielte Unterstützung sollte praktische Aktivitäten mit Bruchstreifen, Papierfalten oder gitterbasierten Flächenmodellen auch bei der Aktivierung von Vorwissen umfassen. Die Schüler*innen sollten dazu angeregt werden, Formen zunächst in gleiche Teile zu unterteilen, bevor sie die Rechenoperation anwenden (z. B. „3 von 4 gleichen Teilen schraffieren"). Es ist hilfreich, Beispiele und Nicht-Beispiele zu betrachten, z. B. Rechtecke, bei denen die Teile nicht gleich sind, um zu verdeutlichen, was als gültige Bruchdarstellung gilt. Die Verknüpfung von Schattierungsaufgaben mit symbolischer Schrift und verbaler Erklärung („Ich habe es in 6 gleiche Teile geteilt und 4 davon schattiert, das sind also vier Sechstel") unterstützt die Integration von Darstellungen. Im Laufe der Zeit sollten die Schüler*innen mit unterschiedlichen Formen und Ausrichtungen üben, um ihr Verständnis über bestimmte Formate hinaus zu verallgemeinern.

Aufgabe 2.4: Erweitern und Kürzen von Brüchen

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

Setze den fehlenden Wert ein.

a.) $\frac{1}{3} = \frac{\boxed{}}{9}$ b.) $\frac{8}{12} = \frac{4}{\boxed{}}$

Diese Aufgabe prüft die Kompetenz der Schüler*innen, äquivalente Brüche zu erkennen und zu erzeugen, indem sie Brüche erweitern oder kürzen. In Teilaufgabe a) müssen sie einen Bruch erweitern, in Teilaufgabe b) einen Bruch kürzen. Dies erfordert das Verständnis, dass Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert oder durch denselben Faktor dividiert werden müssen, um einen gleichwertigen Bruch zu erhalten.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis von Bruchgleichheit und die Fähigkeit, Brüche zu erweitern und zu kürzen, bilden eine wichtige Grundlage für das weitere Arbeiten mit Brüchen. Diese Kompetenz ist unerlässlich für das Addieren und Subtrahieren von Brüchen mit unterschiedlichen Nennern, da Brüche zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden müssen. Sie ermöglicht das Vergleichen von Brüchen und das Erkennen, dass verschiedene symbolische Darstellungen (wie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$) denselben mathematischen Wert repräsentieren können, eine fundamentale Einsicht der Zahlbereichserweiterung. Das Erweitern und Kürzen stärkt zudem das Verständnis multiplikativer Strukturen und bereitet auf proportionales Denken vor, das später bei Verhältnissen, Maßstäben und der Prozentrechnung zentral ist.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Bei Aufgabe a) zeigen sich häufig Fehler im Verständnis der multiplikativen Beziehung. Manche Schüler*innen verwenden additive Strategien und denken „von 3 auf 9 sind es 6 mehr, also muss ich auch beim Zähler 6 addieren" und schreiben $\frac{7}{9}$ statt $\frac{3}{9}$. Andere erkennen zwar, dass der Nenner von 3 auf 9 verändert wurde, verstehen aber nicht, dass dies eine Multiplikation mit 3 ist. Bei Aufgabe b) können ähnliche konzeptionelle Schwierigkeiten auftreten. Kinder erkennen möglicherweise nicht, dass 8 auf 4 durch Division mit 2 verändert wurde, und suchen daher keine systematische Beziehung zwischen den Nennern. Auch hier treten häufig additive Fehler auf: „Von 8 auf 4 sind es 4 weniger, also muss auch der Nenner 4 weniger werden" führt zu $\frac{8}{8}$ statt $\frac{4}{6}$. Andere multiplizieren falsch und denken „8 mal etwas ist 4" funktioniert nicht, also nehme ich 12 mal 2 und erhalte 24.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Förderung sollte mit anschaulichen Darstellungen beginnen, die Bruchgleichheit erfahrbar machen. Nutzen Sie Visualisierungen wie Kreismodelle oder Rechteckmodelle, um zu zeigen, dass $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{9}$ dieselbe Fläche darstellen. Falten Sie beispielsweise einen Papierstreifen oder einen Papierkreis. Digitale Tools oder Bruchstreifen können diese Visualisierung unterstützen.

Aufgabe 2.5: Vergleichen einer unechten Bruchzahl mit natürlichen Zahlen

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Kreuze **alle** natürlichen Zahlen an, die größer sind als $\frac{10}{3}$.

□ 2 □ 3 □ 4 □ 5

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, einen nicht ganzzahligen Bruch größer als 1 ($\frac{10}{3}$) mit mehreren natürlichen Zahlen zu vergleichen. Die Schüler müssen alle Zahlen (2, 3, 4, 5) identifizieren, die größer als $\frac{10}{3}$ sind. Da $\frac{10}{3}$ ungefähr 3,33 entspricht, ist die richtige Lösung, sowohl 4 als auch 5 auszuwählen. Wichtig ist, dass die Aufgabe nur dann als richtig gewertet wird, wenn beide Werte ausgewählt und keine der falschen Optionen angekreuzt wurden.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Vergleichen von Brüchen mit ganzen Zahlen ist eine mathematische Schlüsselkompetenz, da es rationale und ganze Zahlensysteme miteinander verbindet und die Entwicklung eines kohärenten Zahlenstrahlmodells unterstützt. Innerhalb des DiToM-Rahmenwerks fördert dieser Vergleich das Verständnis für die Größe von Brüchen, das Schätzen und den Übergang zwischen Bruch- und Dezimal- oder gemischten Darstellungen. Die Fähigkeit, zu bestimmen, ob ein Bruch größer oder kleiner als eine ganze Zahl ist, ist für die Entwicklung von Flexibilität bei der Interpretation numerischer Informationen unerlässlich.

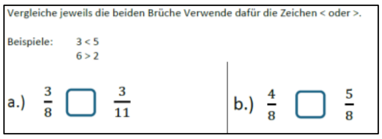
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Die Schüler*innen könnten $\frac{10}{3}$ falsch umrechnen, z. B. indem sie es auf 2 oder 5 schätzen, was zu ungenauen Entscheidungen beim Ankreuzen führt. Ein häufiges Missverständnis besteht darin, sich nur auf den Zähler und den Nenner isoliert zu konzentrieren. Einige Schüler*innen kreuzen möglicherweise nur eine richtige Option an (z. B. 4), weil sie die Aufgabenstellung missverstehen oder nicht erkennen, dass es mehr als einen richtigen Wert gibt.

Welche Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Schüler*innen sollten regelmäßig das Vergleichen von unechten Brüchen mit natürlichen Zahlen und gemischten Zahlen üben. Visuelle Hilfsmittel wie Zahlenstrahlen oder Bruchstreifen können dabei helfen, zu verdeutlichen, wo ein bestimmter Bruch im Verhältnis zu Referenzzahlen liegt. Lehrer*innen können die Schüler*innen anleiten, unechte Brüche in gemischter Zahlform auszudrücken (z. B. $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$), um das Schätzen und Vergleichen zu unterstützen. Übungen, die verbales Denken erfordern („Ist $\frac{10}{3}$ mehr oder weniger als 4?") und Erklärungsaufgaben (z. B. begründen lassen, warum 3 nicht richtig ist) tragen zur Förderung der konzeptionellen Klarheit bei. Bei Aufgaben mit mehreren richtigen Antworten ist es auch hilfreich, die Aufgabenkompetenz zu betonen – also wie man Strukturen wie „Kreuze alle zutreffenden Antworten an" präzise und vollständig interpretiert.

Aufgabe 2.6: Vergleichen von Brüchen


Vergleiche jeweils die beiden Brüche Verwende dafür die Zeichen < oder >.

Beispiele: $3 < 5$ $6 > 2$

a.) $\frac{3}{8}$ $\square$ $\frac{3}{11}$ b.) $\frac{4}{8}$ $\square$ $\frac{5}{8}$

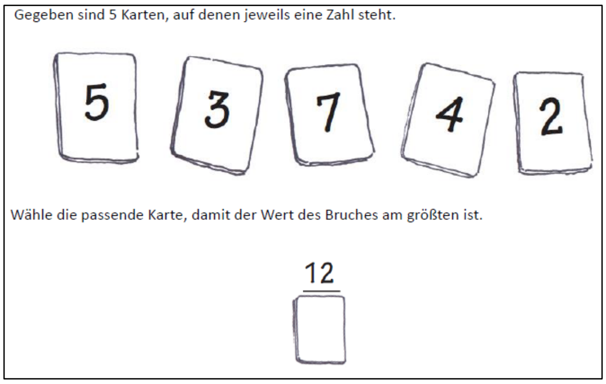
Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe prüft die Fähigkeit der Schüler*innen, Brüche ihrer Größe nach zu ordnen und die Vergleichssymbole < (kleiner als) und > (größer als) korrekt anzuwenden. In Teilaufgabe a) müssen Brüche mit gleichem Zähler, aber unterschiedlichen Nennern verglichen werden, in Teilaufgabe b) Brüche mit gleichem Nenner, aber unterschiedlichen Zählern. Dies erfordert ein konzeptionelles Verständnis davon, wie sich Änderungen des Zählers oder Nenners auf die Größe eines Bruchs auswirken.

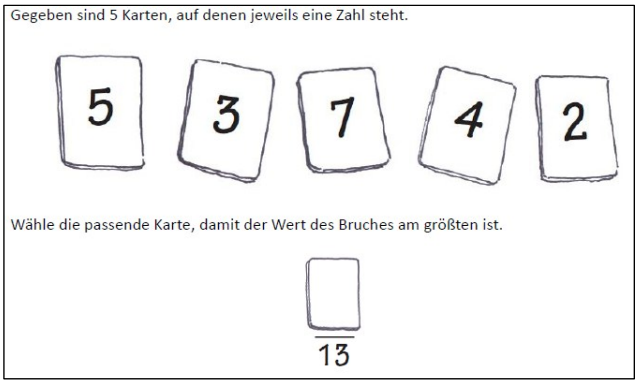
Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Fähigkeit, Brüche zu vergleichen und zu ordnen, ist fundamental für die Entwicklung eines adäquaten Bruchzahlverständnisses. Sie zeigt, dass Schüler*innen Brüche nicht nur als isolierte Symbole wahrnehmen, sondern als Größen verstehen, die zueinander in Beziehung stehen und auf einem mentalen Zahlenstrahl verortet werden können. Diese Kompetenz ist Voraussetzung für das Addieren, Subtrahieren und Ordnen von Brüchen in komplexeren Kontexten. Sie entwickelt ein intuitives Gefühl für Bruchgrößen, das bei Schätzungen und Plausibilitätsprüfungen hilft – beispielsweise beim Erkennen, dass $\frac{3}{8}$ näher bei $\frac{1}{2}$ liegt als $\frac{3}{11}$, oder dass $\frac{5}{8}$ mehr als die Hälfte darstellt, während $\frac{4}{8}$ genau die Hälfte ist. Das Verständnis der beiden grundlegenden Vergleichsstrategien (gleicher Zähler: kleinerer Nenner = größerer Bruch; gleicher Nenner: größerer Zähler = größerer Bruch) bildet eine wichtige Grundlage für das spätere Arbeiten mit Dezimalzahlen und Prozenten, wo ähnliche Vergleichsoperationen notwendig sind. Darüber hinaus fördert diese Aufgabe das logische Denken und die Fähigkeit, strukturelle Beziehungen zu erkennen – wenn bei gleichem Zähler der Nenner größer wird, werden die einzelnen Teile des Ganzen kleiner, also ist der Gesamtbruch kleiner. In praktischen Alltagssituationen, wie beim Vergleichen von Mengenangaben in Rezepten, beim Einschätzen von Anteilen oder beim Bewerten von Angeboten, ist das schnelle und sichere Vergleichen von Brüchen unverzichtbar.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Bei Aufgabe a) zeigen sich häufig Fehler im Verständnis der inversen Beziehung zwischen Nenner und Bruchwert. Viele Schüler*innen denken „11 ist größer als 8, also ist $\frac{3}{11}$ größer als $\frac{3}{8}$". Sie übersehen, dass ein größerer Nenner bei gleichem Zähler einen kleineren Anteil vom Ganzen bedeutet. Manche Kinder vergleichen Zähler und Nenner getrennt und kommen zu dem Schluss, dass die Brüche nicht vergleichbar seien, weil „einmal die obere Zahl gleich ist, aber die untere verschieden".
Bei Aufgabe b) ist die Aufgabe intuitiv zugänglicher, da bei gleichem Nenner die Brüche wie natürliche Zahlen verglichen werden können: mehr Teile derselben Größe ergeben einen größeren Wert. Dennoch treten Fehler auf, wenn Kinder die Symbole < und > verwechseln oder vertauschen. Sie wissen möglicherweise, dass $\frac{4}{8}$ kleiner ist als 5/8, schreiben aber $\frac{4}{8} > \frac{5}{8}$.
Besonders problematisch ist es, wenn Kinder keine Vorstellung von der ungefähren Größe der Brüche haben und nicht erkennen können, ob ihr Ergebnis plausibel ist.

Welche Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Förderung sollte mit visuellen Darstellungen beginnen, die Bruchgrößen konkret erfahrbar machen. Nutzen Sie Kreismodelle, Rechteckmodelle, Bruchstreifen oder den Zahlenstrahl, um die beiden Brüche darzustellen und direkt zu vergleichen. Für $\frac{3}{8}$ und $\frac{3}{11}$ zeichnen Sie zwei gleich große Kreise, teilen Sie den einen in 8 Teile und färben Sie 3 ein, den anderen in 11 Teile und färben Sie ebenfalls 3 ein. Die visuelle Gegenüberstellung macht unmittelbar deutlich, dass $\frac{3}{8}$ mehr Fläche einnimmt als $\frac{3}{11}$, weil ein Achtel größer ist als ein Elftel. Diese konkrete Anschauung hilft, die abstrakte Regel „bei gleichem Zähler ist der Bruch mit kleinerem Nenner größer" mit Bedeutung zu füllen.

Aufgabe 2.7 und 2.8: Maximierung des Wertes eines Bruches durch Auswahl eines geeigneten Zählers oder Nenners





Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, über die Struktur von Brüchen zu argumentieren und ihr Verständnis anzuwenden, um den Wert eines Bruchs zu maximieren, indem sie die am besten geeignete Zahl aus einer Reihe von Optionen auswählen. Den Schüler*innen wird eine Reihe von Karten mit jeweils unterschiedlichen Zahlen vorgelegt, und sie werden gebeten, eine davon so in eine vorgegebene Bruchstruktur einzufügen, dass der Wert des resultierenden Bruchs so groß wie möglich ist. In der Regel fehlt in dem Bruch entweder der Zähler oder der Nenner, und die Schüler*innen müssen die Zahl auswählen, die den Wert des Bruchs am größten macht. Damit wird das flexible Denken der Schüler*innen mit Verhältnissen und relativen Größenordnungen geprüft.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Das Verständnis, wie Zähler und Nenner die Größe eines Bruchs beeinflussen, ist ein zentraler Gedanke beim Lernen von Brüchen. Im Rahmen von DiToM spiegelt diese Fähigkeit ein tieferes konzeptionelles Verständnis der Größe von Brüchen wider, wie sich die Erhöhung des Zählers oder die Verringerung des Nenners auf den Gesamtwert auswirkt. Sie unterstützt auch die Entwicklung des relationalen Denkens, bei dem die Schüler*innen über oberflächliche Merkmale hinausdenken und stattdessen strukturell über Zahlenbeziehungen nachdenken. Diese Erkenntnisse sind für die spätere Arbeit mit Verhältnissen, Proportionen, Skalierungen und algebraischem Denken unerlässlich.

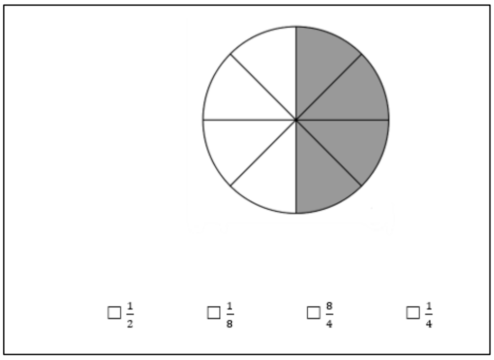
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Ein häufiger Fehler ist die Auswahl der größten verfügbaren Zahl, unabhängig davon, ob sie im Zähler oder Nenner steht, unter der falschen Annahme, dass „größer besser ist“. Dies deutet auf eine prozedurale oder oberflächliche Strategie ohne strukturelles Verständnis hin. Andere wählen möglicherweise einfach zufällig oder verwechseln die Rollen von Zähler und Nenner, indem sie beispielsweise die Zahl selbst maximieren, anstatt den Wert des resultierenden Bruchs. Diese Fehler deuten auf ein fehlerhaftes Verständnis von Brüchen und Schwierigkeiten mit dem Vergleichen von Brüchen, die keine Einheiten sind, hin. Die Schüler*innen können auch das Ziel missverstehen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Eine wirksame Unterstützung umfasst praktische Aktivitäten mit Bruchstreifen oder Zahlenstrahlen, bei denen die Schüler*innen mit Zählern und Nennern experimentieren, um zu beobachten, wie sich die Größe des Bruchs verändert. Lehrer*innen können Vergleiche wie „$\frac{3}{4}$ vs. $\frac{3}{5}$” oder „$\frac{4}{7}$ vs. $\frac{5}{7}$” modellieren, um zu untersuchen, wie sich der Zähler oder Nenner auf die Größe auswirkt. Diskussionsbasierte Aufgaben – „Was ist größer und warum?” – fördern ein tieferes Verständnis. Die Visualisierung von Brüchen auf einem gemeinsamen Zahlenstrahl oder die Verwendung von Software, die die Größe von Brüchen dynamisch anzeigt, kann den Schüler*innen ebenfalls helfen, diese Zusammenhänge zu verstehen.

Aufgabe 2.9: Auswahl des richtigen Bruchteils eines schraffierten Kreises



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe zielt darauf ab, die Fähigkeit der Schüler*innen zu testen, einen Bruch anhand einer visuellen Teil-Ganzes-Darstellung zu identifizieren und die richtige symbolische Darstellung dieses Bruchs aus mehreren Optionen auszuwählen. In der Abbildung ist ein Kreis in acht gleiche Teile geteilt, von denen vier schraffiert sind. Der richtige Bruch ist somit $\frac{4}{8}$, was sich zu $\frac{1}{2}$ vereinfachen lässt. Die Schüler*innen müssen jedoch nicht nur diese Beziehung erkennen, sondern sie auch von plausiblen, aber falschen Ablenkungen wie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ oder sogar $\frac{8}{4}$ unterscheiden. Die Kernkompetenz, die hier getestet wird, ist die Koordination zwischen visuellem, numerischem und strukturellem Verständnis von Brüchen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Fähigkeit, Brüche anhand visueller Modelle zu interpretieren und diese korrekt in symbolische Darstellungen zu übertragen, ist eine grundlegende Fähigkeit für das Verständnis rationaler Zahlen. Im Rahmen von DiToM greift diese Aufgabe das Konzept von Brüchen als Verhältnissen von Teilen zum Ganzen auf, das für fortgeschrittenere Konzepte wie Äquivalenz, Bruchrechnen und Proportionalität von zentraler Bedeutung ist. Wichtig ist, dass die Aufgabe eine konzeptionelle Falle enthält: Der Ablenkungsfaktor $\frac{8}{4}$ ist numerisch größer als das Ganze, obwohl er mit den richtigen Zahlen übereinstimmt (nur umgekehrt). Um diese Diskrepanz zu erkennen, reicht visuelles Zählen nicht aus; es erfordert ein Verständnis der Bruchstruktur, der Skala und der Bedeutung.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Der Ablenkungsfaktor $\frac{8}{4}$ ist besonders attraktiv, da er die beiden Zahlen aus dem Bild enthält – insgesamt 8 Teile und 4 schattierte Teile –, aber ihre Reihenfolge umkehrt. Die Auswahl von $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ könnte auf eine Fehlinterpretation des Verhältnisses hindeuten, entweder durch Zählen nur der schattierten Teile oder durch Nichtberücksichtigung der Gesamtzahl.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Schüler*innen profitieren von praktischen Aktivitäten mit Bruchkreisen oder gefalteten Papierformen, bei denen sie Teile eines Ganzen physisch teilen und schattieren können. Lehrer*innen sollten die Rolle von Zähler und Nenner durch konsequente Verbalisierung betonen („4 Teile von 8 gleichen Teilen sind schattiert – das sind 4 Achtel ... und ich schreibe es so: $\frac{4}{8}$"). Das Üben des Abgleichens visueller Modelle mit mehreren Bruchausdrücken, einschließlich solcher, die größer als 1 sind, kann den Schüler*innen helfen, zwischen richtigen, falschen und gleichwertigen Brüchen zu unterscheiden. Wenn man die Schüler*innen dazu ermutigt, zu erklären, warum ein Bruch wie $\frac{8}{4}$ nicht weniger als ein Ganzes darstellen kann, fördert dies das kritische Denken und unterstützt das Strukturbewusstsein.

Aufgabe 2.10: Rechnen mit Brüchen

a.) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=$ ________	c.) $\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=$ ________
b.) $\frac{1}{10}+\frac{4}{5}=$ ________	d.) $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}=$ ________

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe sollen die Schüler*innen die Ergebnisse von vier Bruchgleichungen berechnen: Sie addieren und subtrahieren einfache Brüche wie „$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$“, „$\frac{1}{10}+\frac{4}{5}$“, „$\frac{4}{6}-\frac{3}{6}$“ und „$\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$“. Die Aufgaben erfordern, dass sie sowohl mit Brüchen mit gleichem Nenner als auch mit Brüchen mit unterschiedlichen Nennern arbeiten und das richtige Ergebnis als Bruch schreiben.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz ist die Fähigkeit der Schüler*innen, grundlegende Rechenoperationen mit Brüchen durchzuführen. Um erfolgreich zu sein, müssen die Schüler*innen erkennen, wann die Nenner bereits gleich sind und nur die Zähler kombiniert werden müssen, wie in $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$ oder $\frac{4}{6}-\frac{3}{6}$, und wann Brüche zunächst als gleichwertige Brüche mit einem gemeinsamen Nenner durch eine einfache Erweiterung umgeschrieben werden müssen, wie in $\frac{1}{10}+\frac{4}{5}$ oder $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$. Sie müssen verstehen, dass das Ergebnis einer Rechenoperation mit Brüchen wiederum ein Bruch ist, der eine Menge auf der Zahlengeraden darstellt. Auf diese Weise vereint die Aufgabe mehrere zuvor erlernte Bruchrechenfertigkeiten: Brüche als Teile eines Ganzen zu betrachten, Äquivalenz zu verstehen, Größen zu vergleichen und Zähler und Nenner miteinander in Beziehung zu setzen.

Dies ist eine Schlüsselkompetenz, da flexibles und genaues Rechnen mit Brüchen für die spätere Arbeit mit rationalen Zahlen, proportionalem Denken und Algebra von zentraler Bedeutung ist.

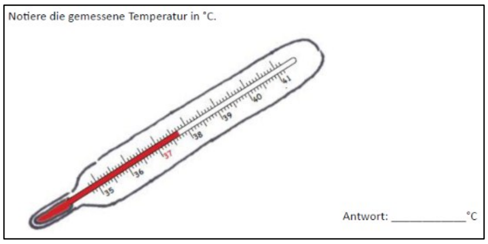
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Typische Fehler bei dieser Aufgabe zeigen, wo das Bruchverständnis eines Lernenden noch lückenhaft ist. Einige Schüler*innen addieren oder subtrahieren sowohl Zähler als auch Nenner und erhalten Antworten wie „$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{6}$“ oder „$\frac{7}{8}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}$“, was zeigt, dass sie die Vorstellung, dass der Nenner die Größe der Teile beschreibt und daher gleich bleibt, wenn Teile gleicher Größe kombiniert werden, noch nicht erworben haben. Andere behalten einen der ursprünglichen Nenner bei und passen nur den Zähler an, indem sie beispielsweise $\frac{1}{10}+\frac{4}{5}$ als $\frac{1+4}{10}$ oder $\frac{1+4}{5}$ behandeln, was darauf hindeutet, dass sie die Notwendigkeit eines gemeinsamen Nenners noch nicht nachvollzogen haben.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Unterstützung für Kinder, die Schwierigkeiten mit dieser Aufgabe haben, sollte zunächst darauf abzielen, ihr konzeptionelles Verständnis von Brüchen als Zahlen und als Teil-Ganzes-Beziehungen zu stärken. Bevor man sich auf schriftliche Algorithmen konzentriert, ist es hilfreich, visuelle Darstellungen wie Bruchbalken, Kreise oder Zahlenstrahlen noch einmal zu wiederholen. Beispielsweise können Lehrer*innen die Schüler*innen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{3}$ auf einem Zahlenstrahl darstellen lassen und dann zeigen, dass die Kombination dieser Sprünge zu $\frac{7}{3}$ führt, oder sie können Flächen einfärben, um zu veranschaulichen, dass die Subtraktion $\frac{1}{4}$ von $\frac{7}{8}$ zu $\frac{5}{8}$ führt, indem man zunächst eine gemeinsame Unterteilung findet und dann den leichteren Fall mit gleichem Nenner bearbeitet.

Aufgabe 3.1: Ablesen von Dezimalzahlen auf einem Thermometer



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe prüft die Kompetenz der Schüler*innen, Dezimalzahlen auf einer Skala in einem realen Kontext (einem Thermometer) zu interpretieren und abzulesen. Den Schüler*innen wird ein analoges Thermometer mit Celsius-Markierungen und einer roten Flüssigkeitssäule gezeigt, die bis zu einem bestimmten Wert steigt, nämlich 37,7 °C. Um die Aufgabe richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen die Temperatur anhand der gegebenen visuellen Darstellung bestimmen und in Dezimalschreibweise ausdrücken. Die hier geprüfte Schlüsselkompetenz ist die Fähigkeit, Dezimalzahlen auf einer Skala in einer vertrauten Umgebung genau abzulesen.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Im Rahmen von DiToM ist das Ablesen von Werten auf linearen Skalen eine grundlegende mathematische Schlüsselkompetenz, da sie das Verständnis für Stellenwerte, die Schätzung von Größenordnungen und metrisches Denken miteinander verbindet. Ablesen von Skalen fördert in authentischen Kontexten die mathematische Kompetenz, da die Schüler*innen Messinstrumente in den Bereichen Gesundheit, Wissenschaft oder Alltag verstehen müssen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen haben möglicherweise Schwierigkeiten, feine Unterteilungen auf der Skala zu interpretieren, insbesondere wenn die Schritte Zehntel (0,1 Schritte) statt ganze Zahlen sind. Häufige Fehler sind das Runden auf die nächste ganze Zahl (z. B. 38 statt 37,7), das Weglassen der Dezimalstelle (Schreiben von 377) oder das falsche Zählen der Markierungen.

Welche Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Die Schüler*innen profitieren davon, wenn sie wiederholt mit skalierten Messinstrumenten wie Thermometern, Linealen und Messzylindern in Kontakt kommen. Lehrer*innen sollten vorführen, wie man Intervalle analysiert, die Schrittweite bestimmt und mit Dezimal-Zehnteln vorwärts zählt. Die Schüler*innen sollten auch das Lesen und Schreiben von Dezimalzahlen in kontextreichen Situationen üben, unterstützt durch Zahlenstrahlmodelle, die symbolisches und visuelles Denken verbinden.

Aufgabe 3.2: Dezimalzahlen vergleichen

Kreuze die größte der angegebenen Zahlen an.

- ☐ 3,33
- ☐ 3,303
- ☐ 3,03
- ☐ 3,3

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, Dezimalzahlen zu vergleichen und zu ordnen, insbesondere solche, die einen ähnlichen Wert haben und sich in der Anzahl der Dezimalstellen unterscheiden. Die Schüler*innen müssen bestimmen, welche der vier angegebenen Dezimalzahlen (3,33, 3,303, 3,03, 3,3) die größte ist. Um diese Aufgabe zu lösen, müssen sie verstehen, dass der Stellenwert die Größe bestimmt und nicht die Anzahl der Stellen oder die scheinbare „Länge" der Dezimalzahl. Die Aufgabe testet insbesondere die Genauigkeit bei der Interpretation auf einem Zahlenstrahl bis zur Hunderter- und Tausenderstelle und die Fähigkeit zu erkennen, dass 3,33 größer ist als 3,303, obwohl letztere mehr Stellen hat.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Vergleichen von Dezimalzahlen ist eine mathematische Schlüsselkompetenz, da es das Verständnis des Stellenwerts im Zehnersystem über ganze Zahlen hinaus widerspiegelt. Im Rahmen von DiToM ist dies entscheidend für die Entwicklung von Kompetenzen im Schätzen, Messen und Rechnen in der realen Welt (z. B. Preise, Dateninterpretation). Der Vergleich von Dezimalzahlen unterstützt auch spätere Arbeiten in den Bereichen Prozentrechnung, Algebra und Naturwissenschaften. Diese Kompetenz ist sowohl für das Kopfrechnen als auch für die Interpretation von tabellarischen oder grafischen Daten von grundlegender Bedeutung.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiges Missverständnis ist, dass längere Dezimalzahlen (in Übertragung auf natürliche Zahlen bei Ignorierung des Kommas) größer sind – z. B. wählen Schüler*innen möglicherweise fälschlicherweise 3,303, weil diese Zahl drei Dezimalstellen hat bzw. mit der Zahl 3303 identifiziert wird. Andere vergleichen möglicherweise nur die Stellen nach dem Komma wie natürliche Zahlen und vernachlässigen die Stellenwertstruktur (z. B. indem 3,3 = 3,03, da 3 = 3 bei den Dezimalstellen ist. Einige Schüler*innen sind möglicherweise unsicher, wie sie die Werte vergleichen sollen, insbesondere wenn sie unterschiedliche Längen haben. Diese Antworten deuten auf ein unzureichendes Verständnis des Dezimalstellenwerts hin, insbesondere bei der Unterscheidung zwischen Zehnteln, Hundertstel und Tausendstel.

Welche Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Die Schüler*innen sollten dazu ermutigt werden, Stellenwerttabellen zu verwenden, um Dezimalzahlen Ziffer für Ziffer auszurichten und zu vergleichen. Lehrer*innen können Strategien wie das Hinzufügen von führenden Nullen vorgeben, um die Anzahl der Dezimalstellen anzugleichen (z. B. beim Vergleich von 3,300, 3,330, 3,303). Visuelle Hilfsmittel wie Zahlenstrahlen mit Dezimalmarkierungen, Zehnerblockmodelle für Dezimalzahlen oder Gitterdarstellungen können helfen, das Verständnis für Größenordnungen zu festigen. Es ist wichtig, den Wert gegenüber dem Aussehen zu betonen („Mehr Ziffern bedeuten nicht mehr Wert"). Übungen mit Argumentationsaufgaben („Was ist größer und warum?") und Schätzspiele mit beispielsweise Geld können helfen, den Vergleich von Dezimalzahlen in sinnvollen Kontexten zu verankern.

Aufgabe 3.3: Fehlende Summanden in Dezimalgleichungen finden

Berechne den fehlenden Wert.	
a) $1{,}12 + 1{,}44 =$ ________	c) $1{,}8 +$ ________ $= 5{,}3$
b) ________ $+ 0{,}51 = 2$	d) $4{,}3 + 0{,}52 =$ ________

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Kompetenz der Schüler*innen, einen unbekannten Summanden in einer Dezimaladditionsgleichung zu berechnen, indem sie ihr Verständnis für Stellenwerte, die Struktur von Gleichungen und umgekehrte Rechenoperationen anwenden. In beiden Teilen wird den Schüler*innen eine Summe vorgelegt, in der eine Komponente fehlt:

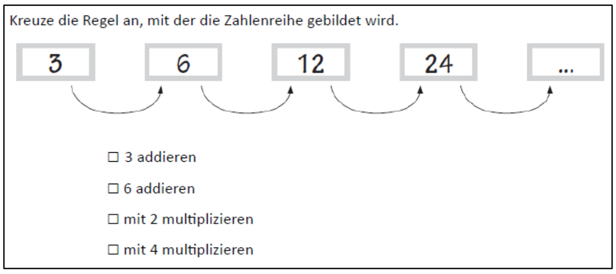
Dies erfordert entweder subtraktives Denken oder ein konzeptionelles Verständnis der additiven Beziehung. Die Schlüsselkompetenz hierbei ist die Fähigkeit, grundlegende algebraische Strukturen und Dezimalarithmetik flexibel anzuwenden.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Das Lösen von Unbekannten in numerischen Gleichungen ist eine grundlegende Schlüsselkompetenz, um eine Brücke zwischen Arithmetik und Algebra zu schlagen. Im Rahmen von DiToM werden solche Aufgaben als frühes algebraisches Denken angesehen, die Schüler*innen müssen die Gleichung als Ganzes betrachten und die strukturelle Rolle der Unbekannten verstehen. Darüber hinaus stärkt der Umgang mit Dezimalwerten die Vertrautheit der Schüler*innen mit der Zehnerbasisstruktur und unterstützt den späteren Erfolg in Themen wie proportionalem Denken.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Schüler*innen versuchen möglicherweise zu raten, anstatt die Subtraktion anzuwenden, insbesondere wenn sie sich nicht sicher sind, wie sie mit Dezimalstellen umgehen sollen. Ein typischer Fehler ist die falsche Ausrichtung der Dezimalstellen (z. B. 1,8 als 18 behandeln). In Teil b.) verwechseln die Schüler*innen möglicherweise die Position der Unbekannten und subtrahieren 0,51 von 1 statt von 2. Andere lösen die Gleichung möglicherweise durch Addition statt durch Subtraktion oder schreiben ein logisch falsches Ergebnis auf, das numerisch „passt", aber die Dezimalstruktur nicht berücksichtigt. Diese Fehler deuten auf Verfahrenslücken, Unsicherheit im Umgang mit Dezimalzahlen oder mangelnde Fähigkeiten zur Interpretation von Gleichungen hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Eine wirksame Unterstützung umfasst das Üben der Lösung offener Rechenaufgaben unter Verwendung von Dezimalzahlengeraden, Stabmodellen oder Gleichungsausgleichsmodellen, um Beziehungen zu visualisieren und intelligente Berechnungsstrategien anzuwenden. Die Schüler*innen sollten dazu ermutigt werden, Gleichungen unter Verwendung der Subtraktion umzuschreiben, um die Unbekannte zu isolieren, und ihr Ergebnis zunächst zu schätzen, um ein Gefühl für die Plausibilität zu entwickeln. Wenn die Fehler in den strukturellen Beziehungen der Addition und Subtraktion als Umkehroperationen liegen, lohnt es sich auch zunächst noch einmal auf das Rechnen mit natürliche Zahlen zurückzugehen.

Aufgabe 4.1 und 4.2: Zahlenmuster und Erkennen von Regeln



Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz
Diese Aufgabe bewertet die Fähigkeit der Schüler*innen, die zugrunde liegende Regel in einer Zahlenfolge zu erkennen und zu beschreiben. Das konkrete Beispiel – 256, 128, 64, 32, ... – erfordert das Erkennen einer Reihe, in der jede Zahl das Ergebnis der Division der vorherigen Zahl durch zwei ist. Die Aufgabe bietet mehrere Antwortmöglichkeiten, aus denen die Schüler*innen diejenige auswählen müssen, die das Muster korrekt erklärt. Die Schlüsselkompetenz, die hier geprüft wird, ist also die Fähigkeit der Schüler*innen, multiplikative Strukturen zu erkennen. Dies erfordert mehr als nur prozedurales Wissen – es erfordert Mustererkennung, strukturelles Denken und frühes algebraisches Denken.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Die Kompetenz, Regelmäßigkeiten in Zahlenmustern zu erkennen, ist eine wichtige mathematische Fähigkeit, da sie die Grundlage für fortgeschrittenere Konzepte wie Funktionen, Algebra und proportionales Denken bildet. Schüler*innen, die Regeln in Reihen erkennen können, sind später besser in der Lage, Verallgemeinerungen und symbolische Darstellungen zu verstehen. Laut Forschungen im Bereich der Mathematikdidaktik (z. B. Kieran, 2018, Radford 2013) unterstützt das Erkennen von Mustern die Entwicklung eines relationalen Verständnisses von Zahlen und Operationen. Im Rahmen des DiToM-Modells wird das Erkennen numerischer Strukturen als wesentlich für die Bewältigung der zunehmenden Abstraktion der Mathematik in der Sekundarstufe angesehen. Darüber hinaus bildet das Verständnis von Reihen – wie z. B. Halbierungen – eine wichtige Grundlage für die Interpretation exponentieller Beziehungen, einem Konzept, das in späteren Klassenstufen behandelt wird.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Ein häufiges Missverständnis bei dieser Aufgabe ist die Interpretation der Folge als Subtraktion statt als Division. Die Schüler*innen könnten annehmen, dass die Zahlen um einen festen Betrag abnehmen, und „32 subtrahieren" auswählen, weil die Differenz zwischen 64 und 32 diesem Muster entspricht, obwohl es nicht konsistent auf frühere Schritte zutrifft. Solche Fehler offenbaren eine lineare Verzerrung, die häufig auftritt, wenn Schüler*innen mit proportionalen Veränderungen nicht vertraut sind. Andere Schüler*innen raten möglicherweise, ohne das Muster über mehrere Terme hinweg zu überprüfen. Wenn Schüler*innen die Division noch nicht als Umkehrung der Multiplikation verstehen, erkennen sie möglicherweise „durch 2 teilen" nicht als wiederkehrende Struktur.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Schüler*innen, die Schwierigkeiten haben, numerische Muster zu erkennen, profitieren von strukturierten Aufgaben, die additive und multiplikative Beziehungen explizit gegenüberstellen. Der Einsatz visueller Hilfsmittel wie Zahlenketten oder Baumdiagramme kann den Schülern helfen, zu erkennen, wie sich die Werte von Schritt zu Schritt ändern. Aktivitäten, bei denen die Schüler*innen aus vorgegebenen Regeln ihre eigenen Reihenfolgen erstellen müssen, können das Musterbewusstsein stärken und das Verständnis für Operationen vertiefen. Lehrer*innen sollten das laute Denken fördern – zum Beispiel mit der Frage „Wie hat sich die Zahl von 256 auf 128 verändert?" –, um die Metakognition zu fördern und Strategien sichtbar zu machen. Im Laufe der Zeit kann die Verbindung dieser Muster mit realen Kontexten (z. B. Papier falten, Bakterien verdoppeln) das Konzept der geometrischen Progression verstärken und abstrakte Muster greifbarer machen.

Aufgabe 4.3: Proportionales Denken mit Mengen und Preisen

Mit dieser Aufgabe getestete Schlüsselkompetenz

2 kg Kartoffeln kosten 5 €. Berechne den Preis für 6 kg Kartoffeln.

Diese Aufgabe bewertet die Kompetenz der Schüler*innen, multiplikatives Denken anzuwenden, um ein proportionales Problem mit Preisen und Mengen zu lösen. Der Kontext – die Ermittlung des Preises für 6 Kilogramm Kartoffeln, wenn 2 Kilogramm 5 Euro kosten – erfordert von den Schüler*innen, ein konstantes Verhältnis zwischen Menge und Preis zu erkennen und beizubehalten. Um dies richtig zu lösen, müssen die Schüler*innen entweder das Mengen-Preis-Paar um den Faktor 3 multiplizieren oder den Stückpreis (Preis pro Kilogramm) berechnen und dann multiplizieren. Die getestete Fähigkeit ist das Verständnis und die Anwendung multiplikativer Strukturen in funktionalen Beziehungen, was eine wichtige Grundlage für Verhältnis-, Proportions- und Prozentaufgaben in späteren Mathematikaufgaben darstellt.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Proportionales Denken gehört zu den wichtigsten mathematischen Schlüsselkompetenzen in der Sekundarstufe. Gemäß dem DiToM-Rahmenkonzept ist die Fähigkeit, konstante Beziehungen zu erkennen und damit zu arbeiten – wie beispielsweise „2 kg → 5 €" hochgerechnet auf „6 kg → ? €" – nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in der Algebra, im funktionalen Verständnis, in der Geometrie und bei der Lösung alltäglicher Probleme von entscheidender Bedeutung. Schüler*innen, die diese multiplikativen Beziehungen beherrschen, können über verschiedene Kontexte hinweg verallgemeinern und flexibel effiziente Strategien wählen (z. B. Verdoppeln, Halbieren, Einheitspreisberechnung). Darüber hinaus spiegelt der Übergang vom additiven zum multiplikativen Vergleich einen Entwicklungssprung im mathematischen Verständnis wider, der das zukünftige Lernen in linearen Funktionen und proportionalen Modellen untermauert.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Häufige Fehler sind additives Denken. Dies spiegelt ein Unverständnis der multiplikativen Natur der Beziehung wider. Einige Schüler*innen multiplizieren möglicherweise 5 direkt mit 6 (was 30 € ergibt) und interpretieren die Bedeutung der beteiligten Zahlen falsch. Andere haben möglicherweise Schwierigkeiten, Einheiten zu koordinieren – sie vermischen Kilogramm und Euro – oder raten einfach anhand von Schätzungen. Diese Fehler deuten auf Lücken im strukturellen Verständnis hin.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Schüler*innen profitieren von kontextreichen Aufgaben mit Geld, Rezepten oder Maßen, bei denen proportionale Strukturen natürlich vorkommen. Lehrer*innen sollten Strategien wie das Denken in Einheitspreisen („Wenn 2 kg 5 € kosten, dann kostet 1 kg 2,50 € …") oder das skalieren anhand von Faktoren („6 kg sind dreimal so viel wie 2 kg, also beträgt der Preis auch das Dreifache von 5 €") explizit modellieren. Es ist auch hilfreich, additive und multiplikative Strategien in Klassendiskussionen gegenüberzustellen, um ihre unterschiedlichen Auswirkungen hervorzuheben. Die Schüler*innen dazu anzuregen, ihre Überlegungen zu erklären und zu begründen, fördert die metakognitive Entwicklung und hilft, das Verständnis für proportionale Strukturen zu vertiefen.

Aufgabe 4.4: Sticker und Preis

Jedes Sticker-Pack kostet denselben Preis. Vervollständige die Tabelle.

Sticker-Packs	Preis
1	2 €
4	
7	

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz

In dieser Aufgabe bearbeiten die Schüler*innen eine einfache proportionalitätsbezogene Situation: Ein Sticker-Pack kostet immer gleich viel, nämlich 2 €. In einer Tabelle sind die Spalten „Sticker-Packs“ und „Preis“ vorgegeben. Die Schüler*innen sollen die Tabelle vervollständigen, indem sie den zugehörigen Preis für 1, 4 und 7 Sticker-Packs bestimmen. Entscheidend ist dabei, dass sie erkennen, dass der Preis in einem festen Verhältnis zur Anzahl der Sticker-Packs steht und dass dieses Verhältnis durch den Multiplikationsfaktor 2 €/Pack beschrieben werden kann. Die Schüler*innen wenden also das Prinzip „Anzahl der Packs · 2 €“ an und berechnen zum Beispiel, dass 4 Sticker-Packs 8 € und 7 Sticker-Packs 14 € kosten. Die Aufgabe prüft damit, ob die Schüler*innen die zugrundeliegende multiplikative Beziehung zwischen Menge und Preis erfassen und in einer Tabelle systematisch nutzen können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?

Die Fähigkeit, proportionale Zusammenhänge zu erkennen und mit ihnen umzugehen, ist eine zentrale Grundlage für weiterführende mathematische Inhalte. In vielen realen Kontexten, wie Preise im Supermarkt, Längen- oder Gewichtsangaben, Rezepte, Geschwindigkeit oder Skalierungen, treten Beziehungen auf, bei denen „mehr von A“ immer „entsprechend mehr von B“ bedeutet. In dieser Aufgabe begegnen die Kinder einer besonders einfachen Form dieses Prinzips: Der Preis wächst im gleichen Verhältnis wie die Anzahl der Packs, der Proportionalitätsfaktor ist konstant. Wenn Kinder solche Situationen als multiplikativ begreifen und nicht als bloß additiv (also nicht „es kommen immer 2 € dazu“, sondern „jede Packung kostet 2 €“), legen sie eine wichtige Basis für das Verständnis von Verhältnis, Prozenten, Bruchzahlen, Skalierungen und linearen Funktionen.

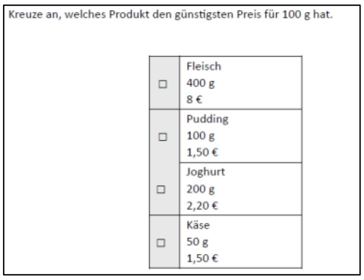
Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?

Typischerweise zeigen sich in dieser Aufgabe Fehler, die darauf hinweisen, dass Kinder den Zusammenhang noch als additiv statt als multiplikativ verstehen. Manche Kinder rechnen vom bekannten Beispiel „1 Packung = 2 €” aus immer nur in Schritten von 1 oder 2 weiter und verlieren dabei die Struktur aus den Augen, indem sie beispielsweise 4 Sticker-Packungen fälschlicherweise mit einem Preis von 6 € verbinden, weil sie „2, 4, 6” als fortlaufende Verdopplungs- oder Zählreihe missverstehen. Andere übernehmen zwar, dass 1 Pack 2 € kostet, übertragen dies aber nicht korrekt auf 7 Packs.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?

Unterstützung sollte zunächst darauf abzielen, den realen Kontext zu nutzen, um die multiplikative Struktur bewusst zu machen. Hilfreich ist es, mit konkreten Materialien oder Bildern zu arbeiten: etwa echte oder gezeichnete Sticker mit Preisschild, die die Kinder anordnen können. Dabei können sie zum Beispiel erst einen Sticker mit 2 € legen, dann zwei Sticker mit 4 €, drei Sticker mit 6 € und so weiter, und anschließend beschreiben, was sich verändert und was gleich bleibt. Die Lehrkraft sollte immer wieder die sprachliche Verbindung hervorheben: „Ein Sticker kostet 2 €. Vier Sticker kosten viermal 2 €, also 8 €.“ Durch diese Formulierungen lernen die Kinder, „so und so oft etwas nehmen“ als Multiplikation zu begreifen. Tabellen können gezielt eingesetzt werden, um Muster sichtbar zu machen, etwa indem zunächst die Zeilen für 1, 2, 3 und 4 Sticker gemeinsam gefüllt werden und die Kinder beobachten, dass sich der Preis jeweils verdoppelt, verdreifacht oder vervierfacht. Auch das Nutzen von Strategien wie „Verdoppeln und Verdoppeln nochmal“ (von 1 Sticker zu 2 Stickern und dann zu 4 Stickern) kann helfen, Rechenaufwand zu reduzieren und das Muster zu stabilisieren. Gleichzeitig sollte der Unterschied zwischen additiven und multiplikativen Situationen thematisiert werden, zum Beispiel durch den Vergleich „immer plus 2“ gegenüber „jeder Sticker kostet 2 €“.

Aufgabe 4.5: Günstigster Preis pro 100 Gramm


Kreuze an, welches Produkt den günstigsten Preis für 100 g hat.

☐	Fleisch 400 g 8 €
☐	Pudding 100 g 1,50 €
☐	Joghurt 200 g 2,20 €
☐	Käse 50 g 1,50 €

Mit dieser Aufgabe geprüfte Schlüsselkompetenz
In dieser Aufgabe sollen die Kinder entscheiden, welches von vier angebotenen Produkten den günstigsten Preis pro 100 Gramm hat. In einer Tabelle sind die Produkte Fleisch (400 g für 8 €), Pudding (100 g für 1,50 €), Joghurt (200 g für 2,20 €) und Käse (50 g für 1,50 €) mit ihren jeweiligen Mengen- und Preisangaben aufgeführt. Die Kinder sollen ankreuzen, welches Produkt bezogen auf 100 Gramm am billigsten ist. Um dies korrekt zu lösen, müssen sie die gegebenen Preis-Mengen-Kombinationen vergleichen, auf eine gemeinsame Bezugsgröße (100 g) umrechnen und dabei jeweils den „Preis pro 100 g" bestimmen. Die Aufgabe testet damit, ob die Kinder eine proportionale Beziehung zwischen Menge und Preis erkennen, den Begriff „Preis pro 100 g" als konstante Rate verstehen und ihn auf unterschiedliche Situationen anwenden können. Gleichzeitig wird überprüft, ob sie Tabelleninformationen sicher lesen und einfache Multiplikations- und Divisionen mit Dezimalzahlen zur Vergleichsrechnung einsetzen können.

Warum ist diese Fähigkeit eine Schlüsselkompetenz?
Der sichere Umgang mit proportionalen Zusammenhängen und Einheitenpreisen („Preis pro 100 g", „Preis pro Stück", „Preis pro Liter") ist für das mathematische Lernen und für den Alltag von großer Bedeutung. In vielen realen Situationen geht es darum, Angebote zu vergleichen, Packungsgrößen richtig einzuordnen und faire oder günstige Preise zu erkennen. Wer versteht, dass eine Verdopplung der Menge bei konstantem Stückpreis auch den Gesamtpreis verdoppelt und dass man verschiedene Angebote am besten über einen gemeinsamen Referenzwert wie 100 g vergleicht, verfügt über eine wichtige Grundlage für spätere Inhalte wie Dreisatz, Prozentrechnung, Funktionen und statistische Darstellungen. Darüber hinaus gibt es dem mathematischen Konzept des Proportionalitätsfaktors eine inhaltliche Bedeutung. Darüber hinaus fördert sie den flexiblen Einsatz von Multiplikation und Division mit Dezimalzahlen, was für viele weitere Themen in der Sekundarstufe relevant ist. Insgesamt unterstützt diese Kompetenz sowohl die mathematische Allgemeinbildung als auch die Fähigkeit, im Alltag reflektierte Entscheidungen zu treffen.

Welche Fehler und andere Warnsignale sind bei dieser Aufgabe zu erwarten?
Einige Kinder wählen zum Beispiel das Produkt mit dem kleinsten Gesamtpreis, ohne die unterschiedliche Menge zu berücksichtigen, und entscheiden sich etwa für den Pudding, weil 1,50 € als „am billigsten" erscheint, obwohl er bezogen auf 100 g nicht den niedrigsten Preis hat. Andere orientieren sich vor allem an der Grammzahl und meinen, das Produkt mit der größten Menge sei automatisch „günstiger", oder sie wählen das Produkt mit der kleinsten Grammzahl, weil sie die Vorstellung haben, weniger sei immer billiger. Ein häufiges Muster ist, dass Kinder zwar versuchen, den Preis auf 100 g umzurechnen, dabei aber fehlerhaft vorgehen.

Welche Art von Unterstützung könnte Kindern gegeben werden, die bei dieser Aufgabe Defizite zeigen?
Unterstützung sollte bei der konkreten Alltagssituation ansetzen und Kindern helfen, die Preis-Mengen-Beziehung bewusst als Verhältnis zu sehen. Sinnvoll ist es, mit realistischen Beispielen aus dem Supermarkt zu arbeiten, Verpackungen oder Produktbilder mit Preisangaben zu nutzen und gemeinsam zu überlegen, wie man „gerecht vergleichen" kann. Eine hilfreiche Strategie besteht darin, zunächst einfache Fälle zu betrachten, bei denen die Umrechnung auf 100 g leicht fällt, etwa Produkte mit 100 g, 200 g oder 400 g. Kinder können dann entdecken, dass man bei 200 g den Preis halbiert, bei 400 g viertelt oder bei 50 g vervierfacht, um den entsprechenden Preis für 100 g zu erhalten. Diese Überlegungen lassen sich gut mit Skizzen, Balkendiagrammen - oder Verhältnis- bzw. Stufentabellen verknüpfen, in denen die Kinder schrittweise von der gegebenen Menge zu 100 g gehen und dabei sehen, wie sich der Preis verändert. Sprachlich sollte deutlich gemacht werden, dass „Preis pro 100 g" eine feste Rate ist und dass Produkte mit demselben Preis pro 100 g gleich teuer sind, unabhängig von der Packungsgröße.

V. Hinweise zur Auswertung und Dokumentation der Ergebnisse

Um Ihnen bei der Auswertung der Testergebnisse zu helfen, stehen Ihnen verschiedene Tools zum Download zur Verfügung unter:
ditom.org/en/tests-en:

1. Wenn Sie die Tests lieber manuell auswerten möchten, bieten wir Ihnen folgende Hilfsmittel an:

Die folgende Skala liefert erste Anhaltspunkte dafür, in welchen Bereichen die Schüler*innen am wahrscheinlichsten Punkte erzielen:

$n \leq 38$ Punkte → Gruppe A: Schüler*innen, die in mehreren Schlüsselkompetenzen weitreichende Schwierigkeiten aufweisen.

$39 \leq n \leq 50$ Punkte → Gruppe B: Schüler*innen, die Anzeichen von Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen zeigen.

$n \geq 51$ Punkte → Gruppe C: Schüler*innen, die keine größeren Anzeichen von Schwierigkeiten zeigen.

Punktebereich	Das können Schüler*innen in dieser Klasse bereits
$n \leq 38$	natürliche Zahlen auf dem Zahlenstrahl eintragen, natürliche Zahlen vergleichen, grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit natürlichen Zahlen, grundlegende Multiplikations- und Divisionsaufgaben mit natürlichen Zahlen
$39 \leq n \leq 50$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: erweiterte Grundrechenaufgaben mit natürlichen Zahlen, Grundlegende Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Dezimalzahlen, Brüche als Teil eines Ganzen verstehen, grundlegende Aufgaben zum proportionalen und funktionalen Denken,
$n \geq 51$	Ergänzend zu dem zuvor genannten: zeigen ein adäquates Bruchzahl- und Dezimalzahlverständnis, Kompetenz zum Modellieren von Textaufgaben, proportionales Verständnis

2. Eine weitere Möglichkeit ist die Auswertung der Ergebnisse in Excel auf Ihrem Computer. Zu diesem Zweck können Sie Folgendes herunterladen:
   a) Eine **vorprogrammierte Excel-Datei** mit zwei Arbeitsblättern, zwischen denen Sie über die Registerkarten unten links wechseln können. Geben Sie im Arbeitsblatt mit dem Titel „qualitativ" einfach in die entsprechende Spalte für jedes Kind die Zahlen ein, die das Kind in seinem Testheft als Antworten in jeder Teilaufgabe eingetragen hat. Weitere Aufgabenspezifische Erklärungen sind der Exceltabelle zu entnehmen. Wenn ein Kind eine Aufgabe nicht bearbeitet hat, geben Sie bitte 999 ein. In der Exceltabelle ist in der ersten Zeile ein Beispiel angegeben. Wenn Sie mit der Eingabe der Daten fertig sind, wechseln Sie zum Arbeitsblatt „Auswertung". Das Programm erstellt Ihnen eine Auswertung Ihrer eingetragenen Daten.

Die „kritischen Punkteschwellen" für *DiToM* 6+ und wie man sie interpretiert

Wie in Abschnitt I erläutert, dient *DiToM* nicht dazu, Kinder zu kategorisieren. Bitte lesen Sie dazu die Erläuterungen zu den Zielen und Leitprinzipien *von DiToM*.

Dort finden Sie auch eine detailliertere Erläuterung der „kritischen Punkteschwellen", die auf der Grundlage von Pilotversuchen mit *DiToM* (für Version 6+, mit 2346 Schüler*innen aus den sieben Partnerländern des Projekts) unter Verwendung der statistischen Methode der Latent Class Analysis (Yin et al. 2025) ermittelt wurden. Diese Methode ermöglicht es, Kinder anhand ihrer Gesamtpunktzahl in *DiToM* 6+ modellbasiert einer der folgenden drei Gruppen zuzuordnen:

Punktzahlbereich	**Gruppe**
0 bis 38	A – Anzeichen für weitreichende Schwierigkeiten in mehreren Schlüsselbereichen
39 bis 50	B – Anzeichen für Schwierigkeiten in einigen Schlüsselbereichen
51 bis 73	C – Keine Anzeichen für größere Schwierigkeiten in Schlüsselbereichen

Eine abschließende Anmerkung mit Verweis auf Abschnitt I: Beachten Sie, dass ein Screening nur eine Momentaufnahme liefert. Die Ergebnisse sollten daher mit Ihren eigenen Beobachtungen und Erfahrungen im Unterricht verglichen und gegebenenfalls als Ausgangspunkt für Folgeinterviews mit einzelnen Kindern verwendet werden – um Ihr Verständnis zu vertiefen, zu verfeinern oder zu erweitern und gegebenenfalls Ihre Schlussfolgerungen zumindest teilweise anzupassen.

Literatur:

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R. & Lesh, R. (1992). Rationale Zahlen, Verhältnisse und Proportionen. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbuch zur Forschung über Mathematikunterricht und -lernen* (S. 296–333). New York: Macmillan.

Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Entwicklung und Evaluation eines Screening-Instruments zur Früherkennung von Risikoschülern im Mathematikunterricht der unteren Sekundarstufe. In *Proceedings of EDULEARN25 Conference*. Palma, Spanien. Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7

Ehlert, A., & Fritz, A. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(2), 237–263.

Gaidoschik, M. (2025). *Das dezimale Stellenwertsystem: Verstehen, verinnerlichen und flexibel anwenden*. Hannover: Klett Kallmeyer.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Einige multiplikative Strukturen in der Grundschulbildung: eine Betrachtung aus relationaler Perspektive. Educational Studies in Mathematics, 106(3), 447–469.

Prediger, S. (2008). Zahlaspekte verstehen und flexibel nutzen. In E. Cohors-Fresenborg et al. (Hrsg.), *Mathematiklernen ermöglichen* (S. 85–100). Münster: Waxmann. ph-gmuend.de+3Edoc LMU München+3Wikipedia+3

Radford, L. (2014). Die progressive Entwicklung des frühen verkörperten algebraischen Denkens. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Entwicklung der numerischen Schätzung bei kleinen Kindern. *Child Development*, 76(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Konzeptionelles Wissen über Bruchrechnen. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.

Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visuelle Darstellungen als Analyseobjekte: das Zahlenband als Beispiel. ZDM, 46, 45–58.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). Von der Addition zur Multiplikation … und zurück: Die Entwicklung der additiven und multiplikativen Denkfähigkeiten von Schülern. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Konzepte und Operationen mit ganzen Zahlen. In F. K. Lester Jr. (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 557–628). Charlotte, NC: Information Age.

Wittmann, E. Ch. und Müller, G. N. (2004). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Seelze: Friedrich Verlag.

Yin, L., Bezirhan, U. & von Davier, M. (2025). Improving Context Scale Interpretation Using Latent Class Analysis for Cut Scores. In: International Electronic Journal of Elementary Education, Volume 17, Issue 2.