



Co-funded by
the European Union



Priručnik

Probirni test 8+

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Sadržaj

I. Uvod	2
II. Što znači “ključne matematičke vještine”	3
III. Struktura probirnih testova 6+ i 8+	4
IV. Implementacija DiToM testa.....	5
V. Prikaz zadataka	6
Zadatak 1.1: Opseg pravokutnika	6
Zadatak 1.2: Prevođenje verbalnih izraza u algebarske izraze (A–C)	8
Zadatak 1.3: Zapisivanje algebarskog izraza iz tekstualnog zadatka	9
Zadatak 1.4: Zapisivanje algebarskog izraza iz tekstualnog zadatka	10
Zadatak 1.5: Zapisivanje algebarskog izraza iz tekstualnog zadatka	11
Zadatak 1.6: Izračunavanje vrijednosti algebarskog izraza.....	12
Zadatak 1.7: Određivanje rješenja linearne jednadžbe.....	13
Zadatak 2.1: Rješavanje zadatka s proporcionalnim veličinama u situacijama iz svakodnevnog života	14
Zadatak 2.2: Rješavanje zadatka u kojemu se primjenjuje obrnuta proporcionalnost	15
Zadatak 2.3: Prepoznavanje proporcionalnih veličina u tabličnim prikazima	16
Zadatak 2.4: Analiza grafičkog prikaza proporcionalnih veličina	17
Zadatak 2.5: Primjena dijeljenja prilikom rješavanja problema iz svakodnevnog života	18
Zadatak 2.6: Analiza fiksnih i varijabilnih troškova u kontekstu proizvodnje	19
Zadatak 3.1: Zapisivanje razlomka u postotnom zapisu	20
Zadatak 3.2: Korištenje postotnog računa.....	21
Zadatak 3.3: Analiza kružnih dijagrama i postotni zapis	22
Zadatak 3.4: Izvođenje računskih operacija s cijelim brojevima	23
Zadatak 3.5: Prikaz racionalnih brojeva na brojevnom pravcu	24
VI. Znanstvena evaluacija	26
VII. List za procjenu.....	28
Literatura:	29

I. Uvod

Učenje matematike je kumulativno: novi sadržaj nadograđuje se na prethodno znanje. Ako nedostaju temeljne ideje i koncepti, učenicima postaje sve teže izgraditi smisleno razumijevanje tema koje se na njih nadovezuju. Rezultati međunarodnih i nacionalnih istraživanja pokazuju da značajan udio učenika ne zadovoljava minimalne standarde iz matematike. Za svakodnevno podučavanje to znači sljedeće: potrebne su rane, praktične procedure kako bi se učenički status učinio vidljivim i organizirala pravovremena podrška. U tu je svrhu osmišljen EU projekt "Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)". U partnerstvu timova iz Italije, Francuske, Švedske, Hrvatske, Grčke, Španjolske i Njemačke, razvijeno je pet međusobno povezanih probirnih testova, kako bi se nastavnicima omogućio kompaktan pregled znanja njihovog razrednog odjela u točkama odgojno-obrazovnih prijelaza. Probirni testovi slijede dvogodišnji ritam:

1. Prijelaz: predškola → početak osnovne škole
2. Završetak drugog razreda / početak trećeg razreda
3. Završetak četvrtog razreda/ početak petog razreda (prijelaz: razredna nastava → predmetna nastava)
4. Završetak šestog razreda / početak sedmog razreda
5. Prijelaz: : osnovna škola → srednja škola

Što je probirni test?

Probirni test je kratko grupno vrednovanje koje se može istovremeno provoditi s cijelim razrednim odjelom u okviru jednog nastavnog sata. On pruža inicijalni strukturirani pregled koje su temeljni pojmovi već usvojeni, a gdje pojedini učenici trebaju dodatnu podršku. Važno je napomenuti da probirni test ne zamjenjuje individualno, procesno orijentirano, kvalitativno vrednovanje učenikova trenutnog stupnja razvoja matematičkog mišljenja. On služi kao polazna točka: rezultati se mogu pratiti ciljanim promatranjima, intervjuima i mjerama podrške.

Zašto je ovo korisno?

- Daje brz pregled: koje su temeljne vještine usvojene a gdje je korisno provesti dodatna ispitivanja.
- Omogućuje vođenu podršku: identificira učenike koji mogu imati problema s minimalnim standardima osnova matematike kako bi se organizirala rana podrška.
- Donošenje dijagnostičkih odluka: rezultati probirnog testa pružaju jasnu početnu orijentaciju koja ukazuje na to koji učenici mogu imati koristi od daljnjih dijagnostičkih koraka (npr. dublje analize zadataka ili naknadni intervjui).
- Podrška u odgojno-obrazovnim prijelazima: pozornost je usmjerena na ključne vještine u kritičnim školskim prijelazima.

Zadaci su orijentirani na primjenu u učionici, administracija zadataka je jasno opisana, a bodovanje je brzo. Nastavnici dobivaju sažeti pregled razine razrednog odjela, kao i pokazatelje kojim je učenicima potrebno posvetiti dodatnu pažnju u određenim područjima sadržaja. Na temelju toga mogu planirati kratke vremenske intervale za ponavljanje, diferencijaciju u nastavi ili zadatke za povezivanje sadržaja.

Ovaj priručnik je kompaktan vodič o svrsi i uporabi probirnih testova, objašnjava dizajn testova, vrste zadataka i ciljeve procjene, daje jasne upute za provođenje u učionici, opisuje bodovanje i interpretaciju rezultata te nudi praktične ideje za naknadne postupke i ciljanu podršku.

Cilj je praktičan, pouzdan i jednostavan alat za probirno testiranje koji učiteljima pruža brzu orijentaciju, skreće ranu pažnju na moguće poteškoće i konkretno podržava učinkovitu pomoć kako bi što veći broj učenika usvajao matematičke sadržaje sigurno, s razumijevanjem i samopouzdanjem.

II. Što znači “ključne matematičke vještine”

Razvoj dijagnostičkih testova zahtijeva teorijsku osnovu. Za kratke testove probira za cijeli razredni odjel, to znači fokusirati se na one vještine bez kojih se kasniji sadržaj ne može naučiti na smislen način. Slijedeći klasični stav Gagnéa i Briggsa, svaki novi zahtjev u učenju nadovezuje se na minimalnu količinu potrebnih preduvjeta koje nazivamo ključnim matematičkim vještinama. Ako ti preduvjeti nisu ostvareni, uspješno usvajanje novog sadržaja je malo vjerojatno pa je potrebno prikladnim zadacima uspostaviti most sa znanjem koje je već uspostavljeno. U matematici, učenje je prema tome hijerarhijsko i kumulativno.

Konceptualno razumijevanje: kompetencije, koncepti, vještine i ključne vještine.

U okviru projekta razlikujemo kompetencije i vještine, koje su međusobno ovisne u učioničkoj praksi. Kompetencije se odnose na promišljenu spremnost za prikladno djelovanje u matematičkim situacijama. Koncepti pritom obuhvaćaju sadržajno razumijevanje matematičkih odnosa. Razumljiva aktivacija kompetencija očituje se kroz vještinu, kao uvježbani postupak od strane učenika. Ključne vještine su one vještine čiji izostanak znatno ometa ili sprječava daljnje učenje. One predstavljaju nužni preduvjet za usvajanje sljedećeg sadržaja. Fokus probirnih testova je na aritmetici i algebri, zbog njihove hijerarhijske strukture i značaja za druga područja matematike (npr. geometriju), što je kompatibilno i na nacionalnoj razini i među zemljama. Navedeno je prikazano kroz dva primjera kako bi se pojasnilo razumijevanje ključnih vještina.

Razredna nastava: izvođenje zbrajanja na strukturirani način

Zadatak $25 + 7$ zahtijeva više od brojanja korak po korak. Snažan osjećaj za operacije pokazuje se kada učenici prepoznaju odnose dio–dio–cjelina (npr. 25 i 7 kao dijelove cjeline), fleksibilno razlažu brojeve (npr. $7 = 5 + 2$) i nadograđuju na sljedeću deseticu (npr. $25 + 5 = 30$; zatim $+2 = 32$). Ovdje koncepti (mjesna vrijednost, jednakost), kompetencije (fleksibilno računanje, opravdana procedura) i rezultirajuća vještina (strukturirano zbrajanje) djeluju zajedno. Ako ova ključna vještina izostaje, sljedeća "razina", veći raspon brojeva ili učinkovitije strategije, ostaje teško dostupna.

Predmetna nastava: proširivanje skupova brojeva

Čvrst osjećaj za operacije s prirodnim brojevima (dekompozicija, inverzne operacije, mjesna vrijednost i veza s brojevnim pravcem) pretpostavka je za prijenos postupaka na brojeve zapisane u decimalnom obliku i razlomke (npr. zbrajanje/oduzimanje, zaokruživanje, procjena) kako bi se prevladale epistemološke prepreke u učenju matematičkih pojmova (Brousseau, 1997). Praznine u ovim ključnim vještinama često vode do izvođenja postupaka bez razumijevanja, što otežava pristup algebarskim izrazima, jednačbama i funkcionalnim odnosima. Ovo ilustrira prediktivnu ulogu ključnih vještina iz aritmetike za područje algebre.

Razumijevanje ključnih vještina uključeno je u probirne testove tako da:

- se prikazu neophodni preduvjeti za sljedeći korak u učenju, i
- bude blisko sadržaju te stoga uočljivo kroz kratke zadatke, i
- se omogućiti nastavnicima prvu strukturiranu orijentaciju o tome koji bi učenici mogli zahtijevati daljnje dijagnostičke korake i kamo se podrška može usmjeriti. Cilj nije označavanje učenika, već rano otkrivanje nedostajućih ključnih preduvjeta, kako bi se daljnje učenje moglo nastaviti na stabilnoj osnovi

Po našem shvaćanju, svako područje matematike sadrži ključne vještine koje mogu postati kritične u različitim trenucima tijekom obrazovnog napretka, uključujući kraj pojedine teme kada je potrebna sposobnost omogućavanja daljnjeg učenja. Razvijanje ključnih vještina stoga se nastavlja kroz sve razrede; rano prepoznavanje nedostajućih preduvjeta ostaje ključno kako bi učenici mogli nastaviti usvajati nove sadržaje s razumijevanjem.

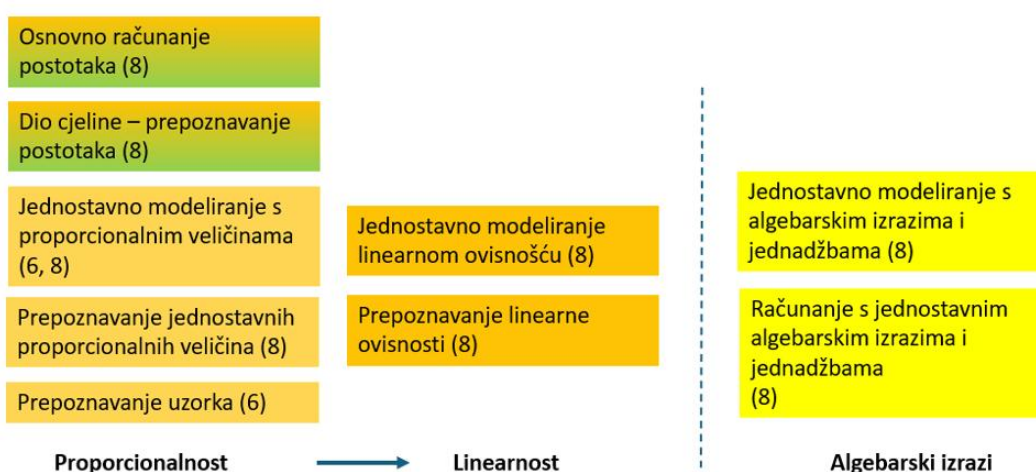
III. Struktura probirnih testova 6+ i 8+

Struktura testa u DiToM-u temelji se na sadržajnim područjima aritmetike i algebre. Uzeta je u obzir hijerarhijska struktura sadržajnog područja. Izrada testa bila je usmjerena na područje usvajanja i proširenja skupova brojeva u smislu računanja, u onoj mjeri u kojoj se računske procedure provode nealgoritamski i algoritamski na temelju osnovnog razumijevanja. Dijagram prikazuje strukturu testa u ovom sadržajnom području za 6. i više razrede (6+) te za 8. i više razrede (8+).

Probirni test 6+ temelji se na osnovama iz testa 4+, koje se fokusiraju na prirodne brojeve te je ovo područje sada više diferencirano. Ako učenici imaju značajne poteškoće u području prirodnih brojeva u 6+, preporučuje se koristiti test za 4+.



U području algebre ili predalgebre, strukturirano razumijevanje jednostavnih matematičkih struktura u primjenama u matematici i izvan nje vrednuje se uz koncepte proporcionalnosti i linearnosti. Isto tako, vrednuje se u području algebraskih izraza, u različitim smjerovima osnovne primjene u raznim situacijama, kao i za razumijevanje izraza, u onoj mjeri u kojoj je to dio osnovnog razumijevanja.



IV. Implementacija DiToM testa

- Objasnite svrhu testa učenicima i umirite ih

- Test se ne ocjenjuje.
- Test im omogućava da uoče što znaju, a što ne znaju, kako bismo im zatim mogli predložiti odgovarajuće zadatke za vježbanje. Stoga je posebno važno da test rješavaju sami.
- Naglasite značaj dovršavanja zadataka. Na što više pitanja odgovore, bit će lakše utvrditi njihovo znanje, vještine i eventualne poteškoće, te im pomoći da ih prevladaju.
- Također im možete reći da je ovo prvi puta da se test koristi i da bi ljudi koji su ga osmislili željeli znati je li prikladan.

- Struktura testa

- Test je podijeljen u tri dijela, od kojih se svaki sastoji od nekoliko zadataka.
- Svi zadaci se neovisni jedan o drugome.

- Trajanje: Maksimalno trajanje određeno je za svaki dio testa.

- Test 6+, maksimalno 45 minuta: 15 za predalgebru, 10 za proporcionalnost, 20 za aritmetiku.
- Test 8+, maksimalno 40 minuta: 15 za predalgebru, 10 za proporcionalnost, 15 za aritmetiku.
- Bitno je učenicima prije testa naznačiti trajanje svakog dijela, te da će nastavnik prekinuti učenike koji nisu završili zbog poštenog odnosa prema ostalim učenicima.

- Oblik zadataka

- Zadaci otvorenog tipa: postoji prostor za odgovor (u obliku rečenice ili brojkom).
- Zadaci zatvorenog tipa (zadaci višestrukog izbora): ponuđeno je nekoliko odgovora i učenik mora odabrati samo jedan, osim ako zadatakom nije drukčije naznačeno. Recite učenicima da, ako odluče promijeniti svoj odgovor u zadatku višestrukog izbora, trebaju napisati "Ne" pored prvog odgovora i "Da" pored novog.

- Kako rješavati

- Kalkulatori nisu dozvoljeni.
- Učenici mogu koristiti bilo koji dio papira koji je ostao prazan za skicu ili računanje.
- Učenici, redom u svakom od tri dijela testa, mogu raditi svojim tempom. Učenici koji su završili pojedini dio testa trebaju pričekati nastavnikove upute prije nego nastave sa sljedećim dijelom.

- Traženje nastavnikove pomoći tijekom testa

- Ako je zatražena pomoć nastavnika, on ne daje nikakve naznake koje usmjeravaju k odgovoru na pitanja. Cilj testa je identificirati poteškoće kod pojedinih učenika.

V. Prikaz zadataka

Zadatak 1.1: Opseg pravokutnika

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak provjerava sposobnost učenika da zapišu simbolički izraz za opseg pravokutnika kada su mu duljine stranica zadane algebarskim izrazima. Duljine stranica pravokutnika su a i 4, a zadatak zahtijeva od učenika da opseg O pravokutnika izraze kao opći izraz, umjesto da izračunavaju numeričku vrijednost. Za točno rješavanje zadatka učenici moraju znati da pravokutnik ima dva para stranica jednakih duljina, a da bi odredili konačno rješenje moraju zbrojiti duljine svih stranica pravokutnika.

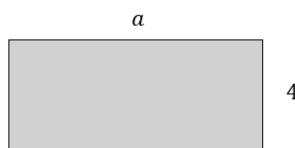
$$O = 2 \cdot (a + 4)$$

$$O = (a + 4) \cdot 2$$

ili ekvivalentno: $O = 2a + 8$, $O = 2a + 2 \cdot 4$

ili $a+4+a+4, \dots$

Opseg mnogokuta je zbroj duljina svih njegovih stranica. Zapiši izraz za opseg O prikazanog pravokutnika.



$O =$ _____

Zašto je ova vještina ključna?

Ovaj zadatak potiče razvoj algebarskog mišljenja potičući učenike da odnose među zadanim veličinama zapišu pomoću varijabli. U okviru DiToM-a, formiranje takvih izraza ključno je za razvoj simboličke tečnosti i funkcionalnih odnosa. Povezuje geometrijsko zaključivanje (opseg) s algebarskim izrazima te jača uporabu varijabli kao općih brojeva. Ova vještina također priprema učenike za kasniji rad s funkcijama i rješavanjem jednadžbi.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Vrlo česta pogreška učenika je izračunavanje numeričke vrijednosti za stranicu duljine a . Primjerice, učenici izmjere duljinu stranice sa slike, umjesto da prepoznaju da je a varijabla te da zadatak traži opći izraz, a ne konkretan brojčani rezultat. To upućuje na neusklađenost između algebarskog zapisa i konkretnog izračuna. Još jedna česta pogreška je da učenici numerički izračunaju opseg tako što uvrste procijenjene ili pretpostavljene vrijednosti (npr. „ a je oko 6 cm, pa...“), što pokazuje da su pogrešno shvatili narav zadatka. Navedeno otkriva pogrešno tumačenje zadatka - tretiranje zadatka kao računskog problema, a ne kao simboličke generalizacije. Dodatno, neki učenici navedu izraz za površinu pravokutnika umjesto za opseg, primjerice zapišu $P = a \cdot 4$ ili $P = 4a$, ne razlikujući pojmove površine i opsega pravokutnika. To ukazuje ili na konceptualnu zbrku između te dvije veličine ili na poteškoće u izdvajanju relevantnih informacija iz teksta.

Dakle, ove pogreške ukazuju na slabosti u:

- Razumijevanju uloge varijabli
- Razlikovanju različitih geometrijskih pojmova
- Preciznom tumačenju matematičkih uputa

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Učenicima pomažu vježbe koje jasno razlikuju zadatke u kojima je potrebno odrediti algebarske izraze od onih u kojima je potrebno odrediti brojčani rezultat. Nastavnici mogu koristiti izrezane pravokutnike ili digitalne manipulativne alate na kojima učenici označavaju duljine stranice slovima i „šetaju oko oblika“ kako bi izračunali opseg. Vizualne potpore poput algebarskih pločica ili okvira za određivanje opsega pomažu u pojašnjenju zašto

su nasuprotne stranice pravokutnika jednake duljine i zašto njihove duljine treba zbrojiti dva puta. Poticanje usmenih formulacija (npr. "dva puta zbroj od a i 4") pomaže premostiti prijelaz između konkretnog razumijevanja i algebarskog zapisa. Nadalje, zadaci tipa „Napiši izraz za opseg pravokutnika u ovisnosti o varijabli a “; „Upotrijebi izraz za određivanje opsega pravokutnika ako je $a = 5$ “ mogu uvježbati učenike za precizno čitanje uputa.

Zadatak 1.2: Prevođenje verbalnih izraza u algebarske izraze (A–C)

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak ocjenjuje sposobnost učenika da svakodnevni jezik prevedu u algebarski izraz. Svaki podzadatak (a-c) predstavlja različitu verbalnu strukturu koja odgovara jednostavnom simboličkom izrazu. U dijelu a) "Zbroj brojeva 3 i x " cilj je prepoznati aditivni izraz $3 + x$. Dio b) "Za 3 manje od x " provjerava hoće li učenici oduzimanje navesti u točnom redoslijedu $x - 3$. Dio c) "Dvostruka vrijednost broja a " zahtijeva zapis množenja ($2a$). Ovaj zadatak kombinira osnovne algebarske konvencije i jezičnu preciznost, tražeći od učenika da prelaze između prirodnog jezika i simboličkog izraza.

Uz svaku rečenicu zapiši odgovarajući izraz:

- a) Zbroj brojeva 3 i x .
- b) Za 3 manje od x .
- c) Dvostruka vrijednost broja a .

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost prelaska između verbalnih opisa i algebarskih izraza predstavlja temelj matematičke pismenosti. Ona potiče razumijevanje funkcionalnih odnosa, postavlja osnovu za tumačenje i pisanje jednadžbi i matematičkih izraza te je nužna za modeliranje problema. Prema okviru DiToM-a, ova sposobnost je centralna za izgradnju simboličkog razumijevanja i za razvoj razumijevanja računskih operacija, bez učenja napamet. Učenici koji savladaju ovaj proces prevođenja (iz prirodnog jezika u simbolički) bolje su pripremljeni za interpretaciju problema izraženih riječima i sastavljanje jednadžbi u složenijim kontekstima.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Ovaj zadatak otkriva karakteristične pogreške na različitim razinama. U dijelu b) („3 manje od x “) mnogi učenici pogrešno navedu redoslijed i zapišu $3 - x$, tumačeći to kao „3 minus x “ umjesto $x - 3$. To ukazuje na teškoću u prepoznavanju smjera relacije u verbalnim strukturama. Česta je i pogreška u razlikovanju pojmova „kvadrat“ i „dvostruko“.

Dakle, ove pogreške ukazuju može li učenik ispravno raščlaniti verbalnu strukturu, poštovati algebarsku sintaksu i razumjeti standardne matematičke konvencije.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Da bi se razvila navedena vještina, na nastavi bi trebalo naglasiti strukturu jezika u odnosu na simbolički zapis. Izričito poučavanje izraza kao što su „manje od“, „više od“, „umnožak (produkt)“, i „kvadrat (od)“ je ključno, idealno uz kontrastne primjere. Mentalne mape koje uparuju jezične izraze s algebarskim izrazima mogu pomoći pri pamćenju i razumijevanju strukture. Konačno, poticanje učenika da naglas verbaliziraju izraze („ x minus 3 znači da počinjem s x i oduzimam 3“) potiče refleksivnu točnost i povezuje jezik s matematičkim značenjem.

Zadatak 1.3: Zapisivanje algebarskog izraza iz tekstualnog zadatka

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak procjenjuje sposobnost učenika da tekstualni zadatak s dva koraka prevedu u simbolički izraz. Problem opisuje posjedovanje knjiga: Jenny posjeduje x knjiga, Laura posjeduje 10 više od Jenny, a Kevin dvostruko više od Laure. Da bi ispravno riješili zadatak, učenici moraju prepoznati da Laura ima $n + 10$ knjiga. Da bi odredili ukupan broj Kevinovih knjiga moraju prepoznati kako dobiveni izraz trebaju pomnožiti s 2, što rezultira izrazom $2 \cdot (n + 10)$. Navedeno zahtijeva pažnju na slijed odnosa i na strukturnu ulogu grupiranja u algebarskim izrazima (što se postiže zagradama).

Laura ima 10 knjiga više od Jenny.

Kevin ima dvostruko više knjiga od Laure.

Čemu je jednak broj Kevinovih knjiga ako je broj Jennynih knjiga n ?

☐ $10 + n$

☐ $10 + n + 2$

☐ $2 \cdot (n + 10)$

☐ $2 \cdot n + 10$

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost zapisivanja simboličkih izraza iz relacijskih opisa temeljna je na algebri. Ona pokazuje učenikovu sposobnost za prepoznavanje funkcionalne ovisnosti i njeno zapisivanje poznavajući ulogu zagrada. Unutar okvira DiToM-a, takav zadatak predstavlja ključnu matematičku vještinu jer zahtijeva koordinaciju više veličina i operacija, te potiče prijelaz s aritmetičkog zaključivanja na algebarsku generalizaciju. Radom s apstraktnim elementima, učenici počinju razmišljati u terminima odnosa između varijabli, što je ključni korak prema modeliranju, rješavanju jednadžbi i zaključivanju o funkcijama.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Jedna česta pogreška je ta da učenici prerano pojednostavljaju strukturu navodeći izraz $2n + 10$ umjesto $2 \cdot (n + 10)$, što ukazuje da nisu uzimali u obzir prioritet množenja nad zbrajanjem. Neki učenici stanu nakon prve relacije i jednostavno napišu $n + 10$, navodeći broj Laurinih knjiga umjesto Kevinovih. Česta zablude vezano za $10 + n + 2$ svodi se na interpretaciju "dvostruko više" kao zasebnog povećanja umjesto množenja ili zanemarivanja prioriteta množenja s obzirom na zbrajanje, što može dovesti do pogrešnog izračuna. U nekim slučajevima učenici mogu zamijeniti znakove ili redoslijed informacija, što ukazuje da im je teško izdvojiti ili upamtiti više relacijskih iskaza iz teksta. Te poteškoće ukazuju na praznine u strukturnom razumijevanju, osobito pri kombiniranju aditivnog i multiplikativnog zaključivanja u simboličkom izrazu.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Učenicima pomažu eksplicitno usmeno navođenje odnosa, te pitanja poput „Koja je veza između broja Laurinih i Jennynih knjiga?“ i „Što trebamo napraviti s Laurinim brojem knjiga kako bismo odredili broj Kevinovih knjiga?“ Korištenje vizualnih pomagala poput dijagrama odnosa pomaže učiniti te veze opipljivijima. Dodatno, vježbanje verbalno-simboličkog prevođenja s jednostavnijim odnosima gradi samopouzdanje prije uvođenja više odnosa. Upute bi također trebale eksplicitno obuhvatiti korištenje zagrada. Uspoređivanjem izraza poput $2n + 10$ i $2 \cdot (n + 10)$ i računanjem njihovih vrijednosti za proizvoljne brojeve može se pojasniti utjecaj korištenja zagrada. Poticanje učenika da naglas artikuliraju svoje razmišljanje pomaže ojačati i operativnu logiku i algebarsko značenje.

Zadatak 1.4: Zapisivanje algebarskog izraza iz tekstualnog zadatka

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak zahtijeva od učenika prevođenje pisane situacije u strukturirani algebarski izraz. Kontekst je prikazan u pisanom obliku: 13 prijatelja kupuje kino ulaznicu za x eura i troši dodatnih 3.20 € na kokice. Ukupni trošak za grupu mora biti prikazan izrazom koji kombinira obje komponente – varijablu i konstantu. Rješenje je umnožak pojedinačnog troška s brojem ljudi. Ispravan izraz je dakle $13 \cdot (x + 3.20)$. Za odabir pravog rješenja, učenici moraju razumjeti strukturu teksta i razumjeti kako ponavljano zbrajanje zapisati kao množenje i to koristeći zagrade.

Grupa od 13 prijatelja ide u kino.
Svatko plaća ulaznicu x € i kokice 3.20€.
Kojim se izrazom može odrediti ukupni iznos koji je grupa platila?

- ☐ $13 + (x + 3.20)$
- ☐ $x \cdot (13 + 3.20)$
- ☐ $13 \cdot x + 3.20$
- ☐ $13 \cdot (x + 3.20)$

Zašto je ova vještina ključna?

Zapisivanje kontekstualnih situacija kao algebarskih izraza je temeljna kompetencija u matematičkom modeliranju. Ovaj zadatak opisuje temeljni prijelaz s aritmetičkog zaključivanja na algebarsko strukturiranje: umjesto računanja ili procjene, od učenika se očekuje da generaliziraju i zapišu dani odnos. Prema okviru DiToM-a, ova sposobnost igra središnju ulogu u razvoju funkcionalnog mišljenja, svijesti o strukturama i razumijevanja primjene varijabli. Također potiče duboko razumijevanje računskih operacija, grupiranja i svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju – vještine ključne za manipulaciju izrazima i jednadžbama.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Mnogi učenici često zanemaruju potrebu za zagradama i biraju izraze poput $13x + 3.20$. Neki učenici krivo zapisuju množenje te odaberu $x + 13 \cdot 3.20$, ili pogrešno predstavljaju samo dio situacije. Navedeni ponuđeni odgovori namjerno su osmišljeni da otkriju specifične zablude: na primjer, netočnu primjenu svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju ili pogrešno tumačenje kako se ponavljanje troškova modelira u algebri. U nekim slučajevima, učenici odaberu numerički najjednostavniju opciju bez analize značenja iza nje, što sugerira površno čitanje ili oslanjanje na heuristiku umjesto na relacijsko zaključivanje.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Za produbljivanje razumijevanja učenika može biti korisno vizualizirati scenarij pomoću tablica ili dijagrama, prikazujući jedan redak po osobi i zbrajajući troškove po stupcima. Modeliranje sličnih zadataka, poput "svaka osoba plaća x € i y €, koliki je ukupni trošak za n ljudi?", razvija razumijevanje struktura grupiranja. Naglašavanje korištenja zagrada kroz izgovorene fraze („ukupan iznos po osobi, zatim puta 13“) pomaže učenicima u prijelazu iz verbalnih struktura u algebarski izraz. Dodatno, rasprave koje uspoređuju dane opcije i procjenjuju što svaki izraz predstavlja mogu pomoći učenicima u izgradnji metakognitivnih strategija za tumačenje simboličkih izraza. Također, potrebno je potaknuti učenika (koji ne zna kako započeti) da započne testiranjem s bilo kojim (proizvoljno odabranim) brojem.

Zadatak 1.5: Zapisivanje algebarskog izraza iz tekstualnog zadatka

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak traži od učenika simbolički zapis izračuna, tj. da simbolički izraze zbroj brojeva 4 i x , a zatim umnožak navedenog zbroja i broja 8. Ispravno rješenje je $(x + 4) \cdot 8$, što zahtijeva od učenika primjenu redoslijeda izvršavanja računskih operacija grupiranjem $x + 4$ prije množenja.

Zašto je ova vještina ključna?

Razumijevanje i predstavljanje hijerarhijske strukture računskih operacija temeljna je vještina u algebri. Ona omogućuje učenicima da prijeđu od tumačenja aritmetike korak po korak do organiziranja tih koraka u strukturiranom simboličkom obliku.

Prema okviru DiToM-a, navedeno je dio razvoja kompetencija simboličkog modeliranja, posebno korištenje zagrada za pojašnjenje prioriteta računskih operacija. To nije ključno samo za ispravno izračunavanje vrijednosti algebarskih izraza, već i za manipulaciju algebarskim izrazima i kasnije rješavanje jednadžbi.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Ponuđeni odgovori su pažljivo odabrani kako bi otkrili specifične pogreške. Na primjer, $8 \cdot x + 4$ predstavlja pogrešku preuranjenog množenja, a zatim pogrešnog zbrajanja 4, čime se nije provelo grupiranje. Odabir $x + 4 \cdot 8$ ukazuje na linearno čitanje, gdje učenici primjenjuju množenje prije zbrajanja. Odgovor $8 \cdot 4 + x$ potpuno ignorira strukturu, sugerirajući površni fokus na brojeve koji su uključeni, ali ne i na odnos. Ponuđeni odgovori nisu nasumični — oni signaliziraju razumije li učenik kako zgrade utječu na redoslijed izvršavanja računskih operacija i može li strukturno razumjeti verbalne instrukcije s više koraka, a ne sekvencijalno.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Podrška bi trebala imati za cilj jačanje svijesti učenika o zagradama i razumijevanje njihove upotrebe o redoslijedu izvršavanja računskih operacija. Koristan pristup je omogućiti učenicima da verbaliziraju svaki korak, a zatim fizički grupiraju izraze koristeći kartice ili upotrijebe boje. Treba ih poticati da uspoređuju vrijednosti izraza poput $x + 4 \cdot 8$ i $(x + 4) \cdot 8$ za numeričke supstitucije (npr. $x = 2$) kako bi se provjerilo odgovara li struktura navedenom značenju. Objašnjenje zašto su zgrade potrebne u ovom kontekstu potiče simboličko razmišljanje i pomaže učenicima da prijeđu izvan proceduralnog prijevoda prema istinskom razumijevanju. Također, učenici mogu započeti isprobavanjem sa proizvoljno odabranim brojevima i generalizirati svoje izračune.

Izračun je definiran u koracima:

- Odaberi broj x
- Dodaj 4 broju x
- Rezultat pomnoži s 8

Kojim se od sljedećih izraza može zapisati izračun?

- ☐ $8 \cdot x + 4$
- ☐ $x + 4 \cdot 8$
- ☐ $(x + 4) \cdot 8$
- ☐ $(8 \cdot 4) + x$

Zadatak 1.6: Izračunavanje vrijednosti algebarskog izraza

Glavna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak provjerava sposobnost učenika da odrede vrijednost algebarskog izraza zamjenom varijable sa zadanom vrijednošću, i primjene ispravan redoslijed izvršavanja računskih operacija. Konkretno, učenicima se zadaje izraz $1 + 3x$ i moraju izračunati njegovu vrijednost za $x = 8$. Prepoznajući da $3x$ znači 3 puta x , ispravan postupak je prvo odrediti umnožak:

$$1 + 3 \cdot 8 = 1 + 24 = 25$$

Kolika je vrijednost izraza $1 + 3x$ ako je $x = 8$.

☐ 25

☐ 32

☐ 39

☐ 48

Učenici moraju ispravno provesti supstituciju i zatim izvršiti računске operacije u ispravnom redoslijedu, poštujući prioritet operacija.

Zašto je ova vještina ključna?

Supstitucija je jedan od najtemeljnijih procesa u algebri i čini poveznicu između simboličkih izraza i numeričkog računanja. Unutar okvira DiToM-a, izračunavanje vrijednosti izraza uvrštavajući zadanu vrijednost pomaže u razvijanju vještine rada s računskim operacijama, osjećaju za simbole i samopouzdanju u radu s varijablama. Te su vještine temeljne za rad s funkcijama, izradu tablica i grafova te algebarsko rješavanje problema iz svakodnevnog života. Također potiče fleksibilno razumijevanje matematičke strukture, osobito odnosa između simbola, operacija i njihovog značenja.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Uobičajene pogreške uključuju nerazumijevanje strukture izraza ili pogrešnu primjenu redoslijeda računskih operacija. Neki učenici mogu izračunati $1 + (3 + 8) = 12$, pogrešno tumačeći $3x$ kao $3 + x$ umjesto 3 puta x . Drugi mogu pogrešno procijeniti $3x$ kao 38 (spajanjem 3 i 8), što odražava simboličku pogrešnu interpretaciju, a ne pogrešku u izračunu. Učenici koji odaberu 32 možda su prvo zbrojili 1 i 8, a zatim pomnožili zbroj s 3: $(1 + 8) \cdot 3 = 27$ ili su pogrešno pročitali kao $(1 + 3) \cdot 8 = 32$, uvodeći neželjene zagrade. Odabir 39 ili 48 može sugerirati pogrešno udvostručenje, proizvoljnu procjenu ili potpuno zanemarivanje redoslijeda računskih operacija. Ovi odgovori otkrivaju razumiju li učenici kako varijable djeluju unutar izraza i kako funkcionira redoslijed računskih operacija bez eksplicitnog zadavanja zagrada.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Nastava bi trebala poticati čitanje algebarskih izraza strukturno, a ne proceduralno. Nastavnici mogu olakšati učenje poticanjem učenika da verbaliziraju izraze ("jedan plus tri puta x ") i povežu ih s numeričkom vrijednošću. Korištenje tablica koje jasno razdvajaju svaku operaciju pomaže u razjašnjavanju strukture. Aktivnosti poput izračunavanja vrijednosti izraza $1 + 3x$ i $(1 + 3)x$ pomažu istaknuti kako zagrade mijenjaju značenje, dok dinamički alati omogućuju učenicima interaktivno testiranje različitih vrijednosti. Uvođenje redoslijeda operacija kroz strukturiranu praksu, osobito u kontekstima bez zagrada, osigurava dugoročnu točnost i fluentnost.

Zadatak 1.7: Određivanje rješenja linearne jednadžbe

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak procjenjuje razumiju li učenici koncept linearne jednadžbe i mogu li utvrditi je li određen broj rješenje zadane linearne jednadžbe. Učenicima se zadaje jednadžba $7x + 3 = 80$ i traži se od njih da identificiraju vrijednost x koja čini ovu tvrdnju istinitom. Ispravan odgovor je $x = 11$, jer se zamjenom ove vrijednosti umjesto x dobiva jednakost:

$$7 \cdot 11 + 3 = 80$$

Jednakost $7x + 3 = 80$ je zadovoljena za:

- ☐ $x = 7$
- ☐ $x = 8$
- ☐ $x = 10$
- ☐ $x = 11$

Da bi točno odgovorili, učenici ne samo da moraju izvršiti izračun, već i razumjeti da je rješenje jednadžbe broj koji zadovoljava zadanu jednadžbu.

Zašto je ova vještina ključna?

Razumijevanje jednadžbi kao jednakosti i znanje kako provjeriti njihovo rješenje temeljno je za algebru. U okviru DiToM-a, ova kompetencija pripada području simboličke interpretacije i rezoniranja o jednakosti. Priprema učenike za sustavno rješavanje jednadžbi i provjeru zadovoljava li zadana vrijednost jednadžbu. Ovo razumijevanje potiče algebarsko razmišljanje na višoj razini i jača osjećaj brojeva kroz inverzno zaključivanje.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Neki učenici mogu ispravno izvršiti supstituciju, ali napraviti pogreške u izračunu vrijednosti izraza $7x + 3$. Drugi mogu krivo shvatiti što zadatak traži, tumačeći ga kao zadatak izračuna, a ne kao uvjetnu tvrdnju. Česta zabluda je odabir $x = 10$, jednostavno zato što "izgleda blizu", što sugerira na procjenu, a ne razmišljanje. Neki bi mogli odabrati $x = 8$ ili $x = 7$ na temelju nagađanja ili nepotpune supstitucije, s obzirom da se kao rezultat dobije broj „blizu“ 80. Još jedna pogreška je zamjena x sa 7 kao znamenke broja u decimalnom sustavu. Navedene pogreške otkrivaju praznine u razumijevanju značenja jednakosti, kao i manjkavost u postupku supstitucije i aritmetičkoj točnosti.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Učenici bi trebali biti vođeni kroz aktivnosti koje naglašavaju što znači da zadana vrijednost zadovoljava jednadžbu. Strukturirane tablice u kojima učenici provjeravaju više vrijednosti za jednu jednadžbu pomažu u izgradnji intuicije. Nastavnici također mogu poticati verbalnu refleksiju („Je li vrijednost izraz na lijevoj strani jednaka vrijednosti izraza na desnoj strani?") i promovirati strategije procjene uz točne izračune. Korištenje metafore vage potiče konceptualno shvaćanje jednakosti. Na kraju, davanje učenicima prilika da sami odrede jednadžbe i vrijednosti za provjeru pomaže u dubljem razumijevanju odnosa varijabli.

Zadatak 2.1: Rješavanje zadatka s proporcionalnim veličinama u situacijama iz svakodnevnog života

Glavna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak zahtijeva od učenika primjenu multiplikativnog zaključivanja za rješavanje problema proporcionalnosti iz svakodnevnog života. S obzirom na to

Cijena 2 kilograma krumpira iznosi 2.40 €. Odredi cijenu za 5 kilograma krumpira.

da je cijena 2 kg krumpira 2.40 €, učenici moraju odrediti cijenu za 5 kg. To podrazumijeva računanje cijene krumpira po kilogramu (1.20 € po kg) i množenje te vrijednosti kako bi se odredila cijena za novu količinu. Ispravan pristup uključuje ili zaključivanje po jediničnoj cijeni (dijeljenje 2.40 € s 2 i množenje s 5) ili tumačenje $5=2+2+1$ i izračunavanje $2.40+2.40+1.20$. Zadatak ne testira samo proceduralnu sposobnost, već i konceptualno razumijevanje povezano uz proporcionalne veličine.

Zašto je ova vještina ključna?

Proporcionalno zaključivanje temelj je matematičkog razmišljanja. Omogućuje učenicima tumačenje i modeliranje stvarnih odnosa koji uključuju jedinične cijene i multiplikativne usporedbe. Unutar okvira DiToM-a, ova vrsta zadatka potiče ključne razvojne korake prema funkcionalnom razmišljanju i priprema učenike za napredne teme poput linearnih funkcija i izračuna postotaka. Osim toga, potiče osjećaj brojeva i fleksibilnost u primjeni različitih strategija u situacijama s proporcionalnim veličinama.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Učenici mogu pogrešno koristiti aditivno zaključivanje, poput izračuna "2 kg → 2.40 €, dakle 5 kg → 2.40 € + 5 €" ili druge nedosljedne greške, što ukazuje da ne razumiju proporcionalne veličine. Drugi bi mogli pokušati pomnožiti s 2 (npr. 2 kg → 2.40 €, 4 kg → 4.80 €), a zatim nekako odrediti cijenu za 5 kg, što može ukazivati na djelomičnu upotrebu strategije. Neki učenici jednostavno pogode cijenu koja „izgleda razumno“, što ukazuje na površinsku poznatost konteksta, ali slabo kvantitativno zaključivanje. Pogreške također mogu nastati zbog netočnog izračuna ili dijeljenja na pogrešan način (npr. dijeljenjem 5 s 2.40 umjesto obrnuto). Ovi obrasci ukazuju na praznine u razumijevanju jedinične cijene ili tumačenju stvarnih količina.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Podrška bi trebala biti usmjerena na izgradnju snažnog intuitivnog i proceduralnog razumijevanja proporcionalnosti. Korištenje brojevnog pravca ili tablica s omjerima omogućuje učenicima vizualizaciju odnosa i postupno povećavanje vrijednosti. Nastavnici mogu postavljati pitanja poput „Koliko košta 1 kg?“ ili „Što se događa ako kupite dvostruko više?“. Poticanje više strategija — jedinična cijena, postavljanje proporcija — pomaže učenicima razviti fleksibilnost i naviku provjere pogrešaka. Povezivanje takvih problema sa stvarnim iskustvima kupovine također može ojačati učenikov angažman i razumijevanje.

Zadatak 2.2: Rješavanje zadatka u kojemu se primjenjuje obrnuta proporcionalnost

Glavna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak opisuje situaciju iz svakodnevnog života u kojem učenici moraju razumjeti odnos između vremena i količine u procesu punjenja. Konkretno, četiri jednake cijevi napune bazen za 6 sati. Sada se postavlja pitanje: koliko je cijevi potrebno da bi se isti bazen napunio za samo 2 sata?

Četiri jednake cijevi napune bazen za 6 sati. Koliko takvih cijevi treba da bi se isti bazen napunio za 2 sata?

Da bi riješili zadatak, učenici moraju uočiti da je za brže punjenje bazena potrebno uključiti veći broj cijevi. Iako to nije izričito navedeno, riječ je o slučaju obrnute proporcionalnosti, pri čemu vrijedi: koliko se puta jedna veličina poveća, toliko puta se druga veličina smanji.

Prikladna i lako razumljiva strategija uključuje organiziranje poznatih vrijednosti i nepoznatih elemenata u tablicu ili dijagram omjera.

Broj cijevi	Vrijeme (u satima)
4	6
?	2

Sada učenici mogu uočiti kako se vrijeme smanjilo 3 puta (sa 6 na 2 sata), a samim time se broj cijevi mora povećati 3 puta. Time se dolazi do rješenja: $4 \cdot 3 = 12$ cijevi.

Ova strategija naglašava relacijsko razmišljanje i potiče proporcionalno zaključivanje, bez primjene formula ili apstraktnih metoda.

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost razumijevanja odnosa u kojima se jedna veličina povećava, a druga smanjuje, ključan je aspekt fleksibilnog multiplikativnog razmišljanja. Za razliku od proporcionalnih veličina, obrnuto proporcionalne veličine zahtijevaju drukčiju vrstu strukturne osviještenosti. Prema okviru DiToM-a, ovladavanje takvim odnosima pomaže učenicima proširiti kvantitativno zaključivanje te ih priprema za naprednije sadržaje poput zadataka vezanih uz obavljanje poslova, omjera i funkcionalno mišljenje. Zadaci poput ovog također razvijaju učenikove vještine u modeliranju i razumijevanju problema iz svakodnevnog života koristeći matematičke alate.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Neki učenici mogu pogrešno protumačiti zadatak i koristiti svojstva proporcionalnih veličina, pretpostavljajući da smanjenje vremena znači i smanjenje broja cijevi, što može dovesti do pogrešnih odgovora poput jedne ili dvije cijevi. Neki učenici mogu nedosljedno primjenjivati aritmetičke strategije ili koristiti proporcionalnost, tako što će broj cijevi podijeliti umjesto pomnožiti brojem 3. Česta je i zablude tretirati situaciju aditivno umjesto multiplikativno (npr. „2 je za 4 manje od 6, pa treba oduzeti cijevi“). Takvi obrasci ukazuju na nedovoljno poznavanje pojma obrnute proporcionalnosti.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Nastavu je moguće započeti s vizualnim modelima ili konkretnim primjerima koji pokazuju kako više ljudi ili uređaja, kada rade zajedno, dovršavaju zadatak brže. Korištenje brojevnog pravca ili strukturiranih tablica, poput gore navedene, pomaže jasno prikazati multiplikativne odnose. Također je korisno postavljati usmjeravajuća pitanja, poput: „Što se događa ako posao treba završiti za upola kraće vrijeme?“ ili „Kako se vrijeme mijenja kada udvostručite broj cijevi?“. Zadavanje zadataka za usporedbu, jedan zadatak u kojem su zadane proporcionalne veličine i jedan zadatak u kojem su zadane obrnuto proporcionalne veličine, može pomoći u naglašavanju razlika navedenih pojmova. Poticanje učenika da na glas pojašne svoje zaključke ili uspoređuju različite načine rješavanja dodatno jača razumijevanje.

Zadatak 2.3: Prepoznavanje proporcionalnih veličina u tabličnim prikazima

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak provjerava sposobnost učenika da analiziraju podatke zadane tablično kako bi utvrdili je li riječ o proporcionalnim veličinama. U svakoj od triju tablica od učenika se očekuje da odrede koeficijent proporcionalnosti. Učenici trebaju označiti križićem one tablice u kojima su zadane proporcionalne veličine.

Za uspješno rješavanje ovog zadatka mogu se koristiti sljedeće metode:

- Provjeri jesu li količnici zadanih veličina (npr., $y : x$) konstantni za sve stupce
- Provjeri da li se „unakrsnim“ množenjem dobiju jednaki produkti.
- Provjeri postoji li pravilo poput „pomnoži s 3“ ili „udvostruči“.

Ova vrsta analize zahtijeva pažnju prema numeričkoj strukturi i osnovnim multiplikativnim obrascima, a ne samo prema površinskim značajkama podataka.

Zašto je ova vještina ključna?

Razumijevanje proporcionalnih veličina temeljni je dio funkcionalnog i algebarskog razmišljanja. U sklopu okvira DiToM-a, ovaj zadatak potiče razvoj relacijskog zaključivanja, posebice prepoznavanje strukture u podacima. Sposobnost utvrđivanja jesu li zadane proporcionalne veličine gradi ključne temelje za analizu linearnih funkcija, i grafičkih prikaza. Također potiče fleksibilnost u radu s različitim prikazima — tablično, grafički, verbalnim opisima i jednadžbama.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Neki učenici mogu tretirati veličine kao proporcionalne samo na temelju njihova povećanja (npr. „oba broja rastu“) bez provjere stalnosti omjera. Drugi mogu promatrati razlike brojeva umjesto omjera, miješajući aditivno i multiplikativno razmišljanje. Na primjer, ako se obje vrijednosti povećaju za 2, učenici mogu pogrešno zaključiti da su veličine proporcionalne. Pogreške mogu nastati i zbog nemarnog računanja (npr. netočno dijeljenja ili preskakanja vrijednosti). Ovi obrasci ukazuju na nedovoljno razvijene vještine u multiplikativnoj usporedbi, tumačenju omjera i simboličkoj generalizaciji. U nekim slučajevima učenici mogu označiti tablicu u kojoj nisu zadane proporcionalne veličine zbog prisutnosti jednostavnih brojeva ili označiti sve tablice kako bi izbjegli analizu. Takve tendencije naglašavaju potrebu za snažnijim strategijama strukturiranja i većim povjerenjem u provjeru.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Učinkovita podrška uključuje upoznavanje učenika s alatima za sustavno provjeravanje jesu li zadane proporcionalne veličine, poput izračunavanja omjera stupac po stupac, korištenje jedinične cijene ili brojevnog pravca. Nastavnici mogu verbalno objasniti svoja zapažanja („Budući da je $6 : 2 = 3$ i $9 : 3 = 3$, omjer je konstantan“). Zadaci za raspravu u paru — gdje se učenici zalažu za svoj zaključak o tome jesu li zadane proporcionalne veličine — mogu produbiti njihovo zaključivanje. Povezivanje tablica sa situacijama iz svakodnevnog života (npr. recepti, cijene, brzine) pomaže učvrstiti razumijevanje i potiče prenošenje znanja na nove kontekste.

U tablicama je prikazana ovisnost dviju veličina, broja kupljenih kolača i njihove cijene. Križićem označi u kojim su tablicama prikazane proporcionalne veličine?

a) Tablica 1

Broj kupljenih kolača	1	2	5
Cijena (€)	5	10	50

☐

b) Tablica 2

Broj kupljenih kolača	1	2	5
Cijena (€)	11	12	15

☐

c) Tablica 3

Broj kupljenih kolača	1	2	5
Cijena (€)	3	6	15

☐

Zadatak 2.4: Analiza grafičkog prikaza proporcionalnih veličina

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak provjerava sposobnost učenika mogu li tumačiti i primijeniti grafički prikaz linearne ovisnosti. U a) dijelu zadatka potrebno je je izravno očitati vrijednost s grafa: utvrditi koliko kubičnih metara vode iznosi 200 €. U b) dijelu zadatka učenik mora odrediti cijenu za 300 m³ vode — vrijednost koja se ne može očitati s grafa — te je stoga mora izračunati na temelju stope povećanja prikazane na grafu. Ključna vještina sastoji se u povezivanju grafičkog prikaza s proporcionalnim razmišljanjem te razlikovanju očitavanja s grafa i ekstrapolacije na temelju prikazanog modela.

Zašto je ova vještina ključna?

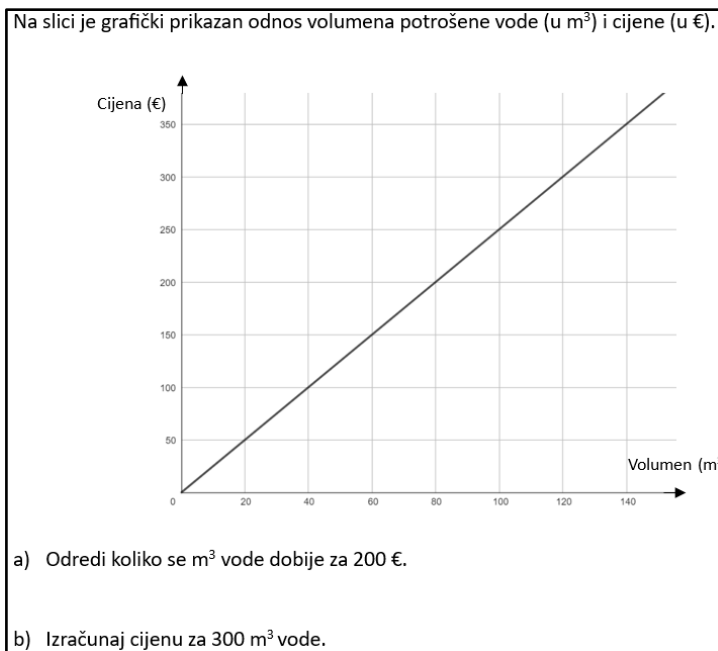
Analiza grafičkog prikaza i iščitavanje podataka s grafova temeljna je matematička kompetencija. Ovaj zadatak povezuje tumačenje podataka zadanih grafički i funkcionalno razmišljanje. Prema okviru DiToM-a, ovakva aktivnost razvija sljedeće sposobnost: razumijevanja nagiba kao omjera, korištenja grafa kao alata za donošenje odluka, prevođenja između grafičkih, numeričkih i verbalnih prikaza. Nadalje, ova vještina razvija kompetencije matematičkog modeliranja, osobito prepoznavanja situacija u kojima treba odrediti podatke koristeći svojstva proporcionalnosti, a ne procjenom.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

U a) dijelu zadatka učenici mogu pogrešno očitati vrijednosti s grafa ili netočno interpolirati između točaka. Ako ne razumiju da graf prikazuje kontinuirani odnos, mogu se osloniti samo na označene vrijednosti određene istaknutom mrežom i zanemariti međutočke. U b) dijelu zadatka neki učenici mogu pokušati vizualno ekstrapolirati kako bi odredili rješenje, iako je posljednje prikazana vrijednost za 140 m³ vode, što bi dovelo do nepreciznih ili spekulirajućih odgovora. Neki možda neće prepoznati graf linearne ovisnosti pa će zadatak riješiti nagađanjem ili nepovezanim strategijama. Tipična pogreška je i pogrešno tumačenje nagiba — primjerice, pretpostavka da se nagib nelinearno povećava ili mijenja izvan prikazanog dijela grafa. Ove poteškoće mogu upućivati na nedostatke u razumijevanju proporcionalnog rasta, linearne ekstrapolacije ili konvenciji čitanja s grafova (poput ispravnog očitavanja vrijednosti).

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Usmjerena podrška trebala bi započeti postupno strukturiranim vježbama, koje se odnose na analizu grafova, a koje učenike vode kroz pravilno očitavanje vrijednosti, korištenje ravnala i praćenja linija radi preciznosti. Vezano za b) dio zadatka i ekstrapolaciju, na nastavi bi se trebalo naglasiti kako je iz grafa potrebno odrediti jediničnu cijenu (npr. 1 € za m³ ili 50 € za 20 m³), a zatim taj odnos proširiti numerički ili pomoću tablice. Nastavnici mogu poticati učenike da riječima izraze „što graf pokazuje” (npr. „za svakih 20 kubičnih metara cijena poraste za 50 €”), čime se jačaju veze između verbalnih, numeričkih i vizualnih prikaza. Usporedba grafa s odgovarajućom jednadžbom ili tablicom omjera dodatno osnažuje fleksibilan pristup pripadajućoj strukturi.



Zadatak 2.5: Primjena dijeljenja prilikom rješavanja problema iz svakodnevnog života

Glavna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak provjerava sposobnost rješavanja problemske situacije u kojoj se primjenjuje dijeljenje u vremenskom kontekstu, gdje se ukupna količina (810 litara vode) smanjuje stalnom brzinom (30 litara na dan).

U tanku se nalazi 810 litara vode.
Svaki dan se iz tanka uzima 30 litara vode.
Izračunaj nakon koliko će dana tank biti prazan.

Pitanje glasi: koliko je jednakih dnevnih uzimanja potrebno da bi se spremnik potpuno ispraznio? To uključuje tumačenje dijeljenja kao „koliko puta 30 stane u 810”, odnosno:

$$810 : 30 = 27 \text{ dana}$$

Takvo tumačenje zahtijeva razumijevanje ponavljalog oduzimanja (ili zbrajanja) kroz vrijeme te sposobnost prevođenja stvarnog procesa u simboličku operaciju.

Zašto je ova vještina ključna?

Unutar okvira DiToM-a ovaj zadatak potiče ključne kompetencije u multiplikativnom zaključivanju, funkcionalnom mišljenju i osnovnom algebarskom strukturiranju. Učenici moraju prepoznati zadanu pravilnost („30 litara na dan”) i proširiti je kroz ponavljajući proces. Time se dodatno učvršćuje razumijevanje omjera, vremenskog modeliranja i tumačenja dijeljenja u kontekstima usmjerenima na proces. Takvo zaključivanje čini temelj kasnijeg gradiva povezanog uz linearne funkcije, obrascima rasta i jednadžbama.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

U praksi mnogi učenici pristupaju zadatku koristeći sljedeće strategije:

- Uzastopno oduzimanje: uzastopno oduzimanje broja 30 od 810, a zatim brojanje koraka.
- Uzastopno zbrajanje: Uzastopno dodavanje broja 30 dok se ne dobije rezultat 810, a zatim brojanje koraka.
- Pogreške u procjeni: odabir brojeva koje zvuče vjerodostojno, npr. 30 ili 25.
- Aritmetičke pogreške: pogreške prilikom dijeljenja .

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Podrška bi se trebala usredotočiti na pomoć učenicima u izgradnji modela jednakog dijeljenja kroz vrijeme. Vizualna pomagala, poput traka podijeljenih na sukladne dijelove, brojevnih pravaca ili kalendara, mogu olakšati razumijevanje. Nastavnici mogu poticati učenike da situaciju prikažu pomoću dijeljenja i objasne što svaki broj predstavlja. Povezivanje ovog problema sa stvarnim životnim rutinama (npr. dnevna potrošnja vode, obroci, budžet kroz dane) može povećati poznatost konteksta. Naglašavanje strateškog grupiranja, poput podjele po 10 dana ($10 \cdot 30 = 300$), potiče učinkovito razmišljanje i kontrolu procjene.

Zadatak 2.6: Analiza fiksnih i varijabilnih troškova u kontekstu proizvodnje

Glavna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak procjenjuje sposobnost učenika za primjenu osnovnog algebarskog modeliranja i aritmetičkih operacija u situacijama iz svakodnevnog života koje uključuju

fiksne i varijabilne troškove. Učenicima se navodi informacija da će Sven morati platiti 50 € za igraonicu i dodatnih 10 € za svakog pozvanog prijatelja. Zadatak je odrediti ukupne troškove rođendanske proslave.

Sven je pozvao 15 prijatelja na svoj rođendan.

Mora platiti 50 € za igraonicu i dodatnih 10 € za svakog pozvanog prijatelja.

Koliko će Sven morati platiti za svoju rođendansku proslavu?

Očekivana strategija je:

1. Izračunati varijabilni trošak:
 $15 \text{ prijatelja} \cdot 10 \text{ €} = 150 \text{ €}$
2. Zbrojiti fiksni i varijabilni trošak kako bi se odredio ukupni trošak:
 $150 \text{ €} + 50 \text{ €} = 200 \text{ €}$

Zašto je ova vještina ključna?

Ovaj zadatak gradi važne temelje za funkcionalno razmišljanje i predalgebru, posebice za koncept linearne funkcije. Unutar okvira DiToM-a, zadatak potiče razvoj vještina matematičkog modeliranja, operacijske fluentnosti i tumačenja simboličkih izraza u primijenjenim situacijama. Razumijevanje razlike između fiksnih i promjenjivih komponenti ključno je u mnogim stvarnim kontekstima, poput planiranja budžeta, određivanja cijena i upravljanja resursima. Osim toga, zadatak razvija sposobnost učenika za strukturiranje problema s više koraka, što je ključna značajka srednje razine matematičkog rješavanja problema.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Česta pogreška je da učenici izračunaju samo promjenjivi trošak, a izostave fiksni trošak. To pokazuje djelomično razumijevanje strukture zadatka, gdje se razmatra samo jedna komponenta (često ona koja se najlakše izračunava). Neki učenici mogu obrnutim redoslijedom izvršavati korake (npr. oduzeti 50 € od 150 €) ili krivo shvatiti ulogu svakog broja. Neki mogu pogrešno pomnožiti sve vrijednosti ili izvoditi nepotrebne računske operacije, što sugerira na slabije razumijevanje problema. Ove pogreške ukazuju na nedostatke u čitanju tekstualnih zadataka s više koraka, povezivanju stvarnih količina s matematičkim operacijama i integriranju različitih numeričkih komponenti u jedno koherentno rješenje.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Nastavnici mogu pomoći učenicima vizualnim strukturiranjem zadatka — na primjer, korištenjem tablice s dva retka (fiksni i promjenjivi trošak) ili dijagramom ukupnog troška prikazanog kao traka podijeljena na dva dijela. Izričito podučavanje i vježbanje zadataka tipa „ukupno = fiksno + promjenjivo” u različitim kontekstima može pomoći u učenju s linearnim modelima. Dodatno, poticanje učenika da ponovno pročitaju pitanje i provjere uključuje li njihov odgovor „sve” troškove potiče metakognitivnu provjeru. Korištenje tekstualnih zadataka koji prvo izdvajaju fiksne i promjenjive troškove prije njihovog kombiniranja može postupno voditi razumijevanje. Na kraju, verbaliziranje situacije (npr. „On mora platiti 50 € bez obzira na sve i 10 € više za svakog gosta”) jasno povezuje jezik i matematičku strukturu.

Zadatak 3.1: Zapisivanje razlomka u postotnom zapisu

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak procjenjuje sposobnost učenika da zadani razlomak (tri petine) zapišu u postotnom zapisu. Da bi ga riješili, učenici moraju razumjeti odnos između razlomaka i postotaka te prepoznati da vrijedi:

$$3/5 = 0.6 = 60\%$$

$$3/5 = 60/100 = 60\%$$

Navedeno uključuje ili zapisivanje razlomka u decimalnom zapisu (dijeljenjem brojnika s nazivnikom), a zatim množenje s 100, ili primjenu poznatih ekvivalencija razlomaka i postotaka. Zadatak time aktivira i računske vještine i konceptualno razumijevanje proporcionalnih prikaza.

Razlomak $\frac{3}{5}$ zapiši u postotnom zapisu.
☐ 0.6%
☐ 6%
☐ 35%
☐ 60%

Zašto je ova vještina ključna?

Veza između zapisa broja u obliku razlomaka, postotka i decimalnog zapisa temeljna je u mnogim stvarnim kontekstima (npr. tumačenje statistike, popusti ili usporedba podataka). Unutar okvira DiToM-a, ova kompetencija potiče razumijevanje racionalnih brojeva, fleksibilnost u radu s brojevima i simboličko prevođenje. Priprema učenike za zadatke koji uključuju postotni račun, usporedbu i proporcionalno zaključivanje u algebri i statističkoj pismenosti. Ovladavanje ovim područjem također jača samopouzdanje u snalaženje između različitih prikaza dijelova i cjeline, što je ključno u svim područjima matematike.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Mnogi učenici pogrešno tretiraju razlomak kao decimalni zapis ili miješaju uloge brojnika i nazivnika. Na primjer:

- Odabir 0.6 % ukazuje da učenici pogrešno tumače 0.6 kao da je već postotak.
- Odabir 6% vjerojatno proizlazi iz pogrešnog pomicanja decimalne točke (samo jednom).
- Odabir 35% može proizaći zbog pogrešnog shvaćanja tri petine.

Ove pogreške ukazuju na pomutnju između relativnih vrijednosti, pomicanja decimalne točke i značenja postotka („dio od sto”). One otkrivaju potrebu za boljim razumijevanjem kako se razlomci zapisuju u postotnom zapisu.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Nastavnici mogu pomoći učenicima korištenjem vizualnih modela (npr. mreža od 100 kvadratića, kružni dijagrami) koji pokazuju kako razlomci poput $3/5$ odgovaraju 60 obojenih kvadratića od 100. Strukturirane aktivnosti kojima se učestali razlomci (poput $1/2$, $1/4$, $3/4$, $3/5$) zapisuju u postotnom zapisu mogu povećati prepoznatljivost i učvrstiti razumijevanje. Poticanje učenika da najprije razlomak zapišu u decimalnom zapisu, a zatim pomnože sa 100, pruža pouzdanu rutinu. Brojevni pravci i stupci postotaka dodatno mogu ojačati ideju ekvivalentnih prikaza. Verbalna objašnjenja („tri od pet jednako je koliko od sto?”) pomažu učvrstiti proporcionalno razmišljanje.

Zadatak 3.2: Korištenje postotnog računa

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak provjerava mogu li učenici ispravno tumačiti i primijeniti postotni račun na zadanu osnovnu vrijednost. Osnovna vrijednost je 30, a zadatak traži da se ta vrijednost poveća za 50 %. Za točan odgovor učenici moraju odrediti koliko iznosi 50% od 30, a zatim tu vrijednost pribrojiti početnom iznosu, tj. osnovnoj vrijednosti.

Koji se broj dobije ako se broj 30 uveća za 50%?

- ☐ 80
- ☐ 45
- ☐ 35
- ☐ 15

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost korištenja i tumačenja postotnog računa temeljna je kompetencija, kako u svakodnevnom životu, tako i u naprednim matematičkim kontekstima. Ona je ključna za razumijevanje promjena cijena, rasta populacije, kamata i statističkih usporedbi. Prema okviru DiToM-a, zaključivanje vezano uz postotke podupire razvoj funkcionalnog razmišljanja, proporcionalnog zaključivanja i integraciju multiplikativnih struktura u različitim kontekstima. Ovaj zadatak posebno jača fleksibilnost učenika u prijelazu između aditivnih i multiplikativnih tumačenja postotaka te doprinosi njihovoj sposobnosti generalizacije i primjene strukturiranog zaključivanja u sve apstraktnijim problemima.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Česta pogrešna predodžba koju je moguće uočiti u odgovorima učenika jest zabuna između vrijednosti i postotaka. Neki učenici određuju zbroj brojeva 50 i 30 umjesto da izračunaju 50% od 30, što dovodi do netočnog odgovora 80. To ukazuje na nerazumijevanje osnovne prirode postotka kao relativne mjere. Druga skupina učenika može odabrati 15 kao odgovor, pogrešno shvaćajući zadatak kao da traži samo 50% od 30, a ne izračunavanje ukupne uvećane vrijednosti. Neki mogu odabrati odgovor 35 zbog manjih računskih pogrešaka ili netočnih procjena pri mentalnom računanju. Moguće je i da učenici krivo pročitaju ili interpretiraju formulaciju zadatka, pretpostavljajući da se radi o oduzimanju, ili se oslanjaju na intuiciju umjesto na strukturirani izračun. Navedeni odgovori otkrivaju nedostatke u konceptualnom razumijevanju, pouzdanosti procedura i razumijevanju pročitaneog teksta. Također mogu ukazivati na nedovoljno shvaćanje postotnog računa kao multiplikativnog procesa, te na potrebu za više vođenih vježbi u razlikovanju dijela, cjeline i stope povećanja.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

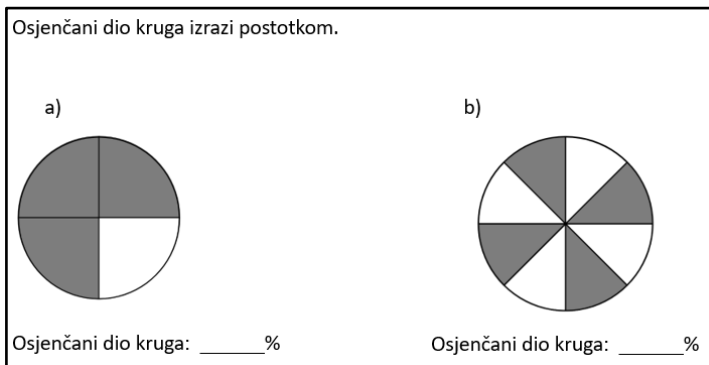
Nastavnici mogu pružiti podršku učenicima modeliranjem situacija iz svakodnevnog života u kojima se postotni račun prirodno primjenjuje — poput povećanja cijena, povišica ili rasta populacije — čime apstraktne pojmove povezuju s opipljivim primjerima. Vizualna pomagala poput stupaca postotaka ili brojevnog pravca mogu pomoći učenicima vizualizirati kako povećanje od 50% utječe na početnu vrijednost. Izričite upute o razlikovanju osnovne vrijednosti, postotka i postotnog iznosa mogu spriječiti zabunu i potaknuti dublje razumijevanje. Dodatno, korištenje i aditivnih (npr. „izračunaj 50 % i zatim pribroji”) i multiplikativnih (npr. „pomnoži s 1.5”) strategija te poticanje učenika da rezultate provjeravaju procjenom, pomaže razviti strategiju rješavanja takvih zadataka.

Zadatak 3.3: Analiza kružnih dijagrama i postotni zapis

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak ispituje sposobnost učenika za tumačenje dijelova cjeline iz slikovnog prikaza, u ovom slučaju kruga podijeljenog na sukladne kružne isječke, i pridruživanje postotka osjenčanom dijelu. Zadatak se pojavljuje u dva dijela:

- U a) dijelu zadatka je prikazan krug podijeljen na četiri sukladna kružna isječka, od kojih su tri osjenčana.
- U b) dijelu zadatka je prikazan krug podijeljen na osam sukladnih kružnih isječaka, pri čemu je svaki drugi kružni isječak osjenčan, što rezultira s četiri osjenčana kružna isječka, od sveukupno osam.



U oba slučaja točan odgovor zahtijeva pridruživanje razlomka osjenčanom dijelu kruga i njegovo zapisivanje u postotnom zapisu. Zadatak uključuje prevođenje slikovnih prikaza u racionalne brojeve zapisane kao razlomke, a zatim u postotni zapis, pokazujući praktičnost različitih prikaza.

Zašto je ova vještina ključna?

Prijelaz između slikovnih prikaza, razlomaka i postotaka ključna je vještina u matematičkom obrazovanju. Potiče dublje razumijevanje odnosa dio–cjelina, proporcionalnog zaključivanja i procjenjivanja. Prema okviru DiToM-a, zadaci poput ovog jačaju konceptualnu fleksibilnost i sposobnost povezivanja različitih matematičkih prikaza—što je ključna značajka matematičke pismenosti. Ova vještina također je vrlo važna u stvarnim kontekstima, poput tumačenja dijagrama, statistike i vizualizacije podataka, gdje su odnosi dio–cjelina često prikazani vizualno i izraženi u postotcima.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

Česta pogreška koja se uočava u oba dijela zadatka je da učenici prepoznaju koliko je dijelova osjenčano, ali taj broj pogrešno navode kao postotak. Na primjer, u a) dijelu zadatka učenici mogu napisati „3” jer su tri od četiri dijela osjenčana—ne razlikujući broj dijelova s postotnim zapisom. Slično, u b) dijelu učenici često napišu „4” jer su četiri od osam kružna isječka osjenčana, zanemarujući potrebu da se razlomak $\frac{4}{8}$ zapiše kao postotak. Ove pogreške ukazuju na površinsku obradu vizualnih podataka, gdje učenici broje osjenčane dijelove, ali nije postignut konceptualni prijelaz u postotni zapis. Još jedan čest problem je to što učenici možda ne uoče pravilnost u b) dijelu, jer naizmjenično osjenčani kružni isječki narušavaju vizualni dojam „polovice”. Kao rezultat toga, neki mogu pogrešno procijeniti da je rezultat manji od 50 % zbog nepravilnog uzorka. Navedene pogreške ukazuju na potrebu razvijanja vještina povezivanja konkretnih i apstraktnih prikaza, osobito pri prijelazu između razlomaka i postotaka.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Kako bi učenici razvili ovu vještinu, nastavnici mogu koristiti strukturirana vizualna pomagala, poput mreže od 100 kvadratića, kružnih dijagrama ili traka koje prikazuju razlomke, kako bi jasno pokazali vezu razlomaka i postotaka. Poticanje učenika da prvo navedu značenje razlomka (npr. „3 od 4”) prije nego što ga zapišu kao postotak pomaže razjasniti međukorak. Također je korisno vježbati s poznatim učestalim razlomcima (npr. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$) i odgovarajućim postotcima. Nastavnici mogu na glas modelirati proces: „Postoje 4 sukladna dijela i 3 su osjenčana. Dakle, to možemo predstaviti s tri četvrtine. Kako tri četvrtine možemo zapisati kao postotak?” Aktivnosti koje uključuju povezivanje slikovnih prikaza, razlomaka, brojeva u decimalnom i postotnom zapisu mogu dodatno ojačati razumijevanje kroz različite prikaze. S vremenom učenici mogu internalizirati ove prijelaze i postati sigurniji u tumačenju zadataka s postocima zadanih slikovnim prikazom.

Zadatak 3.4: Izvođenje računskih operacija s cijelim brojevima

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak usmjeren je na sposobnost učenika da razmišljaju o rezultatima zbrajanja, oduzimanja i množenja s cijelim brojevima. Zahtijeva od njih određivanje nepoznatih brojeva uz pravilno tumačenje znakova (+ i -).

Zašto je ova vještina ključna?

Razumijevanje svojstava osnovnih računskih operacija cijelih brojeva ključno je za algebarsku fluentnost. Ovaj zadatak zahtijeva od učenika primjenu pravila o predznacima, razvijajući sposobnost mentalnog manipuliranja s predznacima, temeljenu na strukturnom razumijevanju, a ne samo na procedurama. Unutar okvira DiToM-a, zadatak razvija osjećaj za simbole, strukturnu fleksibilnost i konceptualno razmišljanje o računskim operacijama—temeljne elemente za rješavanje jednadžbi, razumijevanje svojstava funkcija i određivanje vrijednosti algebarskih izraza.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

U a) dijelu zadatka mnogi učenici pogrešno oduzimaju 5 od 12, krivo tumačeći znakove oduzimanja. U b) dijelu zadatka, neki učenici mogu upisati pozitivan broj bez da uzmu u obzir predznak. Alternativno, neki povezuju oduzimanje samo s „manjim” rezultatima i ne razmišljaju strukturno. Takve pogreške ukazuju na nedovoljno čvrsto razumijevanje pravila računskih operacija s cijelim brojevima, osobito u slučajevima koji uključuju ugniježdene predznake ili zagrade. Također pogreške pokazuju jesu li učenici sposobni razmišljati unatrag—vještina ključna za algebru.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Učenici stječu znanje kroz zadatke koji uključuju kombinacije znakova (npr. $(+)(+)$, $(+)(-)$, $(-)(+)$, $(-)(-)$) koristeći slikovne modele, poput brojevnog pravca. Nastavnici mogu voditi učenike strukturiranim rečenicama kao „Oduzimanje negativnog broja je isto kao...”, te pomoći učenicima da verbaliziraju operacije. Poticanje učenika da sami navedu primjere u kojima mijenjaju predznake i promatraju rezultat može pomoći u internalizaciji pravila. U b) dijelu, uvođenje trokuta množenja (faktor $\times$ faktor = produkt) i određivanje vrijednosti nepoznatoga člana u jednakosti pomaže učenicima da logički zaključuju koji predznaci nedostaju. Na kraju, redovita vježba zadataka u kojima se određuje vrijednost nepoznatoga člana u jednakosti može razviti čvršće algebarsko razmišljanje.

Upiši broj koji nedostaje.

a) $12 - (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $11 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = -44$

Zadatak 3.5: Prikaz racionalnih brojeva na brojevnom pravcu

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak ispituje sposobnost učenika da odrede racionalne brojeve pridružene točkama brojevnog pravca. Oba dijela zadatka uključuju uočavanje sukladnih dijelova na koje je jedinična dužina podijeljena i pridruživanje odgovarajućeg broja označenoj točki.

Zadatak zahtijeva od učenika interpretaciju brojevnog pravca, razumijevanje racionalnih brojeva i proporcionalno zaključivanje.

Zašto je ova vještina ključna?

Brojevni pravac pruža prikaz racionalnih brojeva, jača razumijevanje odnosa brojeva i njihova položaja na brojevnom pravcu. Sposobnost tumačenja položaja brojeva zapisanih u obliku razlomaka ili u decimalnom zapisu na brojevnom pravcu temeljna je za razumijevanje ekvivalencije, gustoće skupa racionalnih brojeva i računskih operacija s racionalnim brojevima. Prema Treppo & van den Heuvel-Panhuizen (2014), ovaj zadatak potiče razvoj mentalnog osjećaja za broj, reprezentaciju racionalnih brojeva i sposobnost određivanja njihova položaja na brojevnom pravcu, te zaključivanje o brojevima koji se nalaze između dva cijela broja. Te su vještine ključne ne samo u teoriji brojeva, već i u mjerenju, tumačenju podataka i algebarskom modeliranju.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati pri rješavanju ovog zadatka?

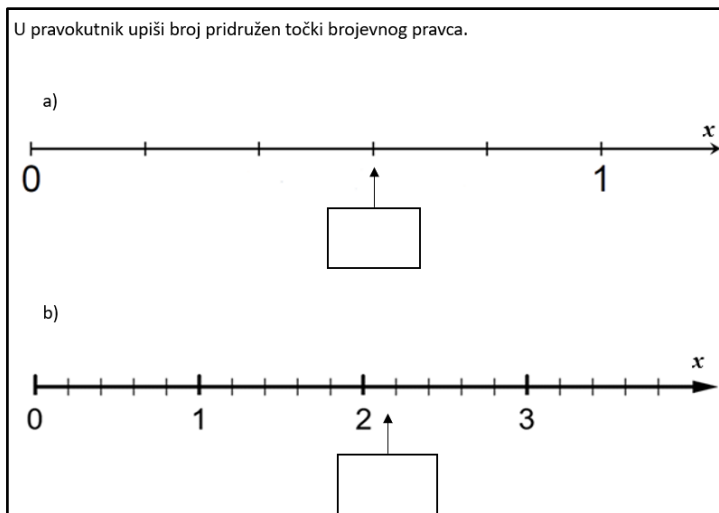
Učenici koji imaju teškoća s ovim zadatkom često:

- Pogrešno broje oznake na brojevnom pravcu. Primjerice pogrešno pridružuju broj 0.3 označenoj točki, umjesto 0.6, pretpostavljajući da prvoj oznaci odgovara broj 0.1, bez provjere na koliko je dijelova podijeljena jedinična dužina.
- U b) dijelu zadatka, neki učenici mogu napisati 2.25 umjesto 2.2, približno određujući ili se oslanjajući na poznatije decimalne zapise.
- Drugi možda ne prepoznaju „veličinu koraka“, osobito kada segmenti ne odgovaraju desetinkama, te koriste pogrešne vrijednosti.
- Nedostatak preciznosti pri očitavanju vrijednosti s brojevnog pravca također je znak da učenici još nisu potpuno sigurni u očitavanje brojeva pridruženim točkama brojevnog pravca s nestandardnim podjelama.

Takve pogreške ukazuju na slabosti u proporcionalnom dijeljenju, razumijevanju decimalnih mjesta ili pažljivom čitanju vizualnih podataka.

Koja vrsta podrške se može pružiti djeci koja imaju teškoće s rješavanjem ovog zadatka?

Za razvijanje ove vještine, učenici napreduju uz praktični rad s nacrtanim i interaktivnim brojevnim pravcem, gdje sami označavaju vrijednosti i obrazlažu odabrane položaje. Nastavnici mogu strukturirati proces postavljanjem pitanja poput: „Kolika je udaljenost između dviju oznaka?“ i „Na koliko dijelova je podijeljena dužina?“ Korištenje



boja za svaku dužinu ili korištenje brojevnih traka koja ističe sukladne dijelove može pomoći u preciznijem procjenjivanju i brojanju. Ponavljanje veze između razlomaka i decimalnog zapisa (npr. $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$) također pomaže učenicima da točno odrede tražene brojeve. Na kraju, česta praksa s brojevnim pravcem uvježbava učenike na proporcionalno razmišljanje i na izbjegavanje generalizacije o cijelim brojevima.

VI. Znanstvena evaluacija

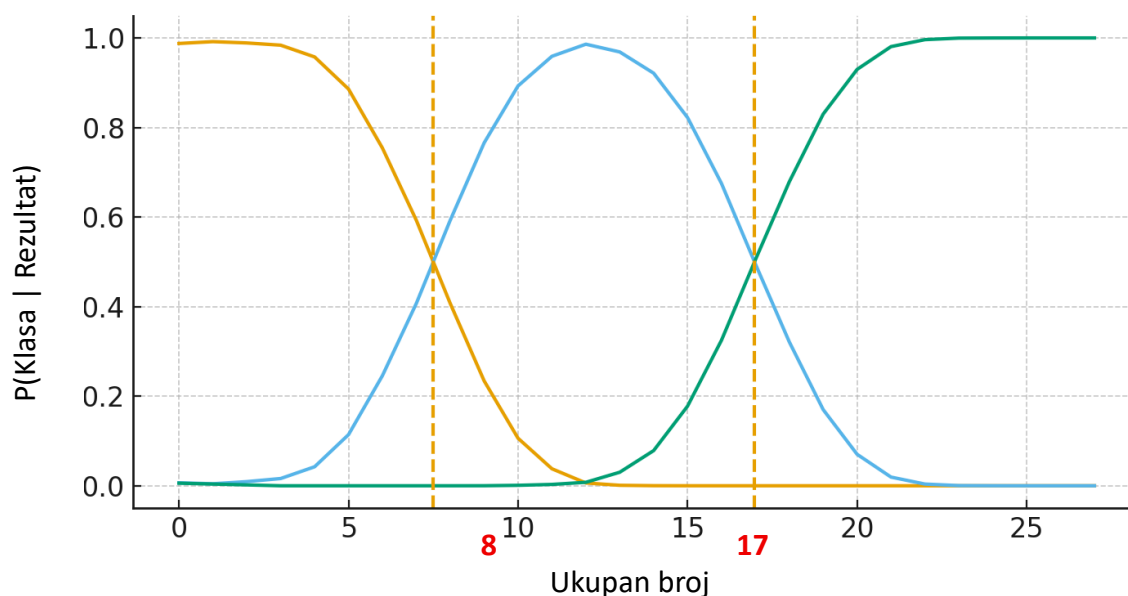
DiToM Probirni test 8+ razvijen je na teorijskoj osnovi i testiran kao dio nereprezentativne validacijske studije. Rezultati navedeni u nastavku služe za identifikaciju učenika koji su potencijalno u riziku zbog nedostatka ključnih matematičkih vještina potrebnih za daljnje učenje matematike u školi. Test omogućuje nastavnicima da na kraju 8. razreda osnovne škole i početku 1. razreda srednje škole provedu empirijski utemeljenu procjenu uspješnosti učenika i identificiraju one učenike čiji rezultati ukazuju na potrebu odgovarajuće rane podrške.

Opis uzorka i ključni rezultati

Test je isprobavan od lipnja do srpnja 2025. u posljednja 3 tjedna školske godine 2024./2025. na uzorku od 1238 učenika iz škola u Grčkoj, Njemačkoj, Francuskoj, Španjolskoj, Italiji, Hrvatskoj i Švedskoj.

Test se sastoji od sljedećih dijelova ispita: Osnovne aritmetičke vještine s 9 zadataka, Proporcionalnost s 7 zadataka, Tehničko računanje s 8 zadataka. Ako je zadatak bio točno riješen, dodjeljivao se 1 bod; ako je rješenje bilo netočno, nepotpuno ili nedostajalo, dodjeljivalo se 0 bodova. Test je proveden prema standardiziranim kriterijima (vidi [IV. Implementacija DiToM testa](#)) i evaluiran. Budući da je test dizajniran kao probirni test koji identificira učenike koji su potencijalno u riziku, očekivalo se i željelo da efekt plafona bude jako izražen (tj. nije se očekivala normalna distribucija, već negativna asimetrija, tj. asimetrija ulijevo). To je potvrđeno probnim testiranjem.

Za primjenu testa u praksi, određena su dva praga koja razlikuju učenike koji su potencijalno u riziku, učenike koje bi trebalo i dalje promatrati i učenike koji potencijalno nisu u riziku. Određivanje pragova za odluku temeljeno je na podacima dobivenim pomoću analize latentnih klasa s tri jasno razlikujuće klase. Klase se ne preklapaju i monotone su. Posteriorne vjerojatnosti (vjerojatnosti a posteriori) dodjele klasa prikazane su u odnosu na bodovni, zaglađene i korištene za određivanje kritičnih pragova za donošenje odluka na osnovu točaka njihova presjeka (vidi Slika 1). Za određivanje pragova korištene su točke presjeka dobivenih krivulja (posteriorna vjerojatnost $p = 0.5$).



Analiza klasa pokazuje tri jasno razgraničene klase, koje se tumače na sljedeći način:

- K1 → učenici s lošim postignućem na probirnom testu,
- K2 → učenici s prilično slabim postignućem na probirnom testu,
- K3 → učenici s neupadljivim postignućem na probirnom testu.

Za određivanje kritičnog broja bodova odabran je prag za koji je vjerojatnost pripadnosti klasi s lošim rezultatima na testu 50%. Prvi prag je stoga **8 bodova**. Učenici koji su postigli **8 bodova** ili manje trebaju podršku u savladavanju osnova kako bi mogli pratiti sadržaj iz matematike koji slijedi u nadolazećim nastavnim satima. Drugi prag je **17 bodova**. Učenike koji su postigli rezultat između 9 i 17 bodova treba pratiti na nastavi matematike tijekom nekoliko sljedećih tjedana kako bi se utvrdilo razumiju li obrađeni sadržaj i mogu li ga samostalno primijeniti.

VII. List za procjenu

Sljedeća ljestvica daje inicijalne pokazatelje očekivanih vještina s kojima učenici stječu bodove u navedenim rasponima: 0–8 bodova, 9–17 bodova.

SCORE

Ova skupina ne odskaje od očekivanih ostvarenih preduvjeta za daljnje učenje matematike u školi.

24	C: Uz A i B, učenici često mogu... ... izvoditi računske operacije s cijelim brojevima, zapisati dobro strukturiran algebarski izraz iz tekstualnog zadatka, rješavati zadatke s dijeljenjem u situacijama iz svakodnevnog života, tumačiti i računati koristeći grafičke prikaze proporcionalnih veličina, zapisivati algebarske izraze iz tekstualnih zadataka, rješavati zadatke koji uključuju obrnuto proporcionalne veličine, te koristiti izraz za opseg pravokutnika. Učenici rijetko mogu... ... primijeniti navedene vještine fleksibilno u složenim, problemskim zadacima s više koraka u nepoznatim kontekstima.
23	
22	
21	
20	
19	Ovu skupinu treba pomnije pratiti u nadolazećim tjednima kako bi se vidjelo mogu li samostalno razumjeti i primijeniti nadolazeće sadržaje. B: Uz A, učenici često mogu... ... izračunati vrijednost izraza uvrštavanjem vrijednosti umjesto varijable, zapisivati razlomak u postotnom zapisu, zapisati algebarski izraz iz tekstualnog zadatka s više koraka, strukturirati matematički izraz prema tekstualnom zadatku s više koraka, odrediti rješenje jednostavne linearne jednadžbe, razlikovati proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine, te prikazivati brojeve u decimalnom zapisu na brojevnom pravcu. Učenici rijetko mogu... ... izvoditi računske operacije s cijelim brojevima, rješavati zadatke s dijeljenjem u složenijim situacijama iz svakodnevnog života, zapisivati algebarske izraze iz složenijih verbalnih opisa.
18	
17	
16	
15	
14	Ova je skupina rizična u pogledu ostvarenih preduvjeta za daljnje učenje matematike u školi i trebala bi što prije dobiti posebnu podršku. A: Učenici često mogu... ... iščitati informacije iz koordinatnog sustava, prepoznati jednostavne proporcionalne veličine, tumačiti kružne dijagrame i zapisivati ih koristeći postotke, rješavati jednostavne zadatke s proporcionalnim veličinama u situacijama iz svakodnevnog života, prikazivati brojeve u decimalnom zapisu na brojevnom pravcu, te koristiti postotni račun. Učenici rijetko mogu... ... izračunati vrijednost algebarskih izraza uvrštavanjem vrijednosti umjesto varijabli, zapisati razlomke u postotnom zapisu u zahtjevnijim situacijama, izgraditi strukturirane matematičke izraze na temelju tekstualnog zadatka s više koraka.
13	
12	
11	
10	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

Literatura:

Brings, L., & Kleine, M. (2025). *Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education*. In Proceedings of EDULEARN25 Conference. Palma, Spain.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York: Macmillan.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Arithmetik: Grundschule* (8. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fraction development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001>

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and Instruction*, 14(5), 469–484. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012>