



Co-funded by
the European Union



Priručnik Probirni test 6+ (proširena verzija)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Sadržaj

I. Uvod	2
II. Što znači “ključne matematičke vještine”	3
III. Struktura probirnih testova 6+ i 8+	4
IV. Implementacija DiToM testa.....	5
V. Prikaz zadataka	6
Zadatak 1.1: Množenje i dijeljenje	6
Zadatak 1.2: Brojevni obrasci i prepoznavanje pravila	8
Zadatak 1.3: Redoslijed izvođenja računskih operacija	10
Zadatak 1.4: Prijevod tekstualnog zadatka u matematički zapis.....	11
Zadatak 1.5: Uspoređivanje količina.....	13
Zadatak 2.1: Prikaz i interpretacija ekvivalentnih razlomaka	15
Zadatak 2.2: Sjenčanje zadanog dijela pravokutnika.....	17
Zadatak 2.3: Proporcionalno zaključivanje s količinama i cijenama.....	19
Zadatak 3.1: Prikaz racionalnih brojeva na brojevnom pravcu	21
Zadatak 3.2: Odabir razlomka koji odgovara osjenčanom dijelu kruga.....	23
Zadatak 3.3: Uspoređivanje vrijednosti nepravog razlomka s prirodnim brojevima	25
Zadatak 3.4: Očitavanje broja u decimalnom zapisu s toplomjera	27
Zadatak 3.5: Uspoređivanje racionalnih brojeva u decimalnom zapisu.....	29
Zadatak 3.6: Određivanje nedostajućeg pribrojnika u jednadžbama s brojevima u decimalnom zapisu.....	31
Zadatak 3.7: Oduzimanje i množenje brojeva u decimalnom zapisu	33
Zadaci 3.8 i 3.9.: Maksimiziranje vrijednosti razlomka odabirom odgovarajućeg brojnika ili nazivnika	35
VI. Znanstvena evaluacija	37
VII. List za procjenu.....	39
Literatura:	40

I. Uvod

Učenje matematike je kumulativno: novi sadržaj nadograđuje se na prethodno znanje. Ako nedostaju temeljne ideje i koncepti, učenicima postaje sve teže izgraditi smisleno razumijevanje tema koje se na njih nadovezuju. Rezultati međunarodnih i nacionalnih istraživanja pokazuju da značajan udio učenika ne zadovoljava minimalne standarde iz matematike. Za svakodnevno podučavanje to znači sljedeće: potrebne su rane, praktične procedure kako bi se učenički status učinio vidljivim i organizirala pravovremena podrška. U tu je svrhu osmišljen EU projekt "Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM)". U partnerstvu timova iz Italije, Francuske, Švedske, Hrvatske, Grčke, Španjolske i Njemačke, razvijeno je pet međusobno povezanih probirnih testova, kako bi se nastavnicima omogućio kompaktan pregled znanja njihovog razrednog odjela u točkama odgojno-obrazovnih prijelaza. Probirni testovi slijede dvogodišnji ritam:

1. Prijelaz: predškola → početak osnovne škole
2. Završetak drugog razreda / početak trećeg razreda
3. Završetak četvrtog razreda/ početak petog razreda (prijelaz: razredna nastava → predmetna nastava)
4. Završetak šestog razreda / početak sedmog razreda
5. Prijelaz: : osnovna škola → srednja škola

Što je probirni test?

Probirni test je kratko grupno vrednovanje koje se može istovremeno provoditi s cijelim razrednim odjelom u okviru jednog nastavnog sata. On pruža inicijalni strukturirani pregled koji su temeljni pojmovi već usvojeni, a gdje pojedini učenici trebaju dodatnu podršku. Važno je napomenuti da probirni test ne zamjenjuje individualno, procesno orijentirano, kvalitativno vrednovanje učenikova trenutnog stupnja razvoja matematičkog mišljenja. On služi kao polazna točka: rezultati se mogu pratiti ciljanim promatranjima, intervjuima i mjerama podrške.

Zašto je ovo korisno?

- Daje brz pregled: koje su temeljne vještine usvojene, a gdje je korisno provesti dodatna ispitivanja.
- Omogućuje vođenu podršku: identificira učenike koji mogu imati problema s minimalnim standardima osnova matematike kako bi se organizirala rana podrška.
- Donošenje dijagnostičkih odluka: rezultati probirnog testa pružaju jasnu početnu orijentaciju koja ukazuje na to koji učenici mogu imati koristi od daljnjih dijagnostičkih koraka (npr. dublje analize postupaka rješavanja zadataka ili naknadni intervjui).
- Podrška u odgojno-obrazovnim prijelazima: pozornost je usmjerena na ključne vještine u kritičnim prijelazima u nastavi matematike.

Zadaci su orijentirani na primjenu u učionici, administracija zadataka je jasno opisana, a bodovanje je brzo. Nastavnici dobivaju sažeti pregled razine razrednog odjela, kao i pokazatelje kojim je učenicima potrebno posvetiti dodatnu pažnju u određenim dijelovima nastavnog sadržaja. Na temelju toga mogu planirati kratke vremenske intervale za ponavljanje, diferencijaciju u nastavi ili zadatke za povezivanje sadržaja.

Ovaj priručnik je kompaktan vodič o svrsi i uporabi probirnih testova, objašnjava dizajn testova, vrste zadataka i ciljeve procjene, daje jasne upute za provođenje u učionici, opisuje bodovanje i interpretaciju rezultata te nudi praktične ideje za naknadne postupke i ciljanu podršku.

Cilj je praktičan, pouzdan i jednostavan alat za probirno testiranje koji nastavnicima pruža brzu orijentaciju, rano skreće pažnju na moguće poteškoće i konkretno podržava učinkovitu pomoć kako bi što veći broj učenika usvajao matematičke sadržaje sigurno, s razumijevanjem i samopouzdanjem.

II. Što znači “ključne matematičke vještine”

Razvoj dijagnostičkih testova zahtijeva teorijsku osnovu. Za kratke testove probira za cijeli razredni odjel, to znači fokusirati se na one vještine bez kojih se kasniji sadržaj ne može usvojiti na smislen način. Slijedeći klasični stav Gagnéa i Briggsa, svaki novi zahtjev u učenju nadovezuje se na minimalnu količinu potrebnih preduvjeta koje nazivamo ključnim matematičkim vještinama. Ako ti preduvjeti nisu ostvareni, uspješno usvajanje novog sadržaja je malo vjerojatno pa je potrebno prikladnim zadacima uspostaviti most sa znanjem koje je već uspostavljeno. U matematici, učenje je prema tome hijerarhijsko i kumulativno.

Konceptualno razumijevanje: kompetencije, koncepti, vještine i ključne vještine

U okviru projekta razlikujemo kompetencije i vještine, koje su međusobno ovisne u učioničkoj praksi. Kompetencije se odnose na promišljenu spremnost za prikladno djelovanje u matematičkim situacijama. Koncepti pritom obuhvaćaju sadržajno razumijevanje matematičkih odnosa. Smisljena aktivacija kompetencija očituje se kroz vještinu, kao uvježbani postupak od strane učenika. Ključne vještine su one vještine čiji izostanak znatno ometa ili sprječava daljnje učenje. One predstavljaju nužni preduvjet za usvajanje sljedećeg sadržaja. Fokus probirnih testova je na aritmetici i algebri, zbog njihove hijerarhijske strukture i značaja za druga područja matematike (npr. geometriju), što je kompatibilno i na nacionalnoj razini i među zemljama. Navedeno je prikazano kroz dva primjera kako bi se olakšalo razumijevanje ključnih vještina.

Razredna nastava: izvođenje zbrajanja na strukturirani način

Zadatak $25 + 7$ zahtijeva više od brojanja korak po korak. Snažan osjećaj za operacije pokazuje se kada učenici prepoznaju odnose dio–dio–cjelina (npr. 25 i 7 kao dijelove cjeline), fleksibilno razlažu brojeve (npr. $7 = 5 + 2$) i nadograđuju na sljedeću deseticu (npr. $25 + 5 = 30$; zatim $+2 = 32$). Ovdje koncepti (mjesna vrijednost, jednakost), kompetencije (fleksibilno računanje, opravdana procedura) i rezultirajuća vještina (strukturirano zbrajanje) djeluju zajedno. Ako ova ključna vještina izostaje, sljedeća "razina", primje na veći raspon brojeva ili učinkovitije strategije, ostaje teško dostupna.

Predmetna nastava: proširivanje skupova brojeva

Razvijen osjećaj za računske operacije s prirodnim brojevima (dekompozicija, inverzne operacije, mjesna vrijednost i veza s brojevnim pravcem) pretpostavka je za prijenos postupaka na brojeve zapisane u decimalnom obliku i razlomke (npr. zbrajanje/oduzimanje, zaokruživanje, procjena) kako bi se prevladale epistemološke prepreke u učenju matematičkih pojmova (Brousseau, 1997). Praznine u ovim ključnim vještinama često vode do izvođenja postupaka bez razumijevanja, što otežava pristup algebarskim izrazima, jednačbama i funkcijskim odnosima. Ovo ilustrira prediktivnu ulogu ključnih vještina iz aritmetike za područje algebre.

Razumijevanje ključnih vještina uključeno je u probirne testove tako da:

- se prikazu neophodni preduvjeti za sljedeći korak u učenju, i
- bude blisko sadržaju te stoga uočljivo kroz kratke zadatke, i
- omogućiti nastavnicima prvu strukturiranu orijentaciju koji bi učenici mogli zahtijevati daljnje dijagnostičke korake i kamo se podrška može usmjeriti. Cilj nije označavanje učenika, već rano otkrivanje nedostajućih ključnih preduvjeta, kako bi se daljnje učenje moglo nastaviti na stabilnoj osnovi

Po našem shvaćanju, svako područje matematike sadrži ključne vještine koje mogu postati kritične u različitim trenucima tijekom obrazovnog napretka, uključujući kraj pojedine teme kada je potrebna sposobnost omogućavanja daljnjeg učenja. Razvijanje ključnih vještina stoga se nastavlja kroz sve razrede; rano prepoznavanje nedostajućih preduvjeta ostaje ključno kako bi učenici mogli nastaviti usvajati nove sadržaje s razumijevanjem.

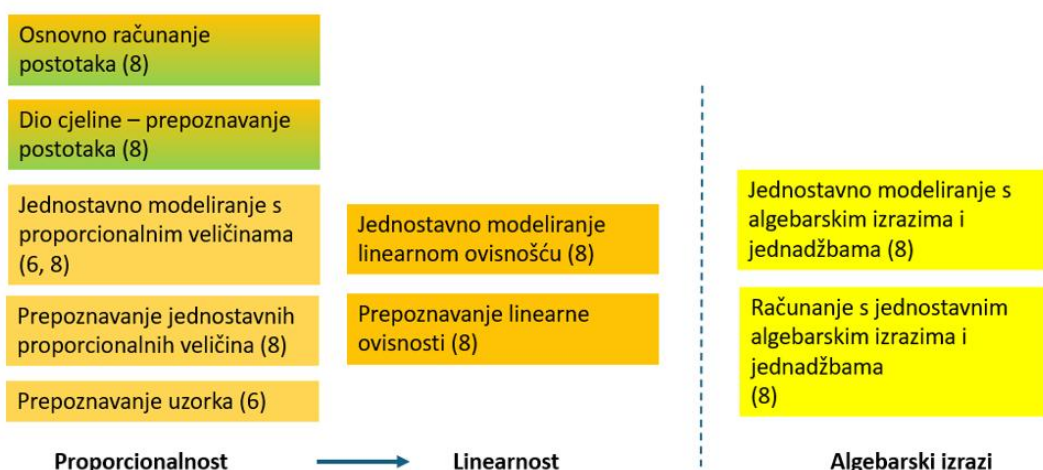
III. Struktura probirnih testova 6+ i 8+

Struktura testa u DiToM-u temelji se na područjima aritmetike i algebre. Uzeta je u obzir hijerarhijska struktura ovih sadržajnih područja. Izrada testa bila je usmjerena na područje usvajanja i proširenja skupova brojeva u smislu računanja, u onoj mjeri u kojoj se računske procedure provode nealgoritamski i algoritamski na temelju osnovnog razumijevanja. Dijagram prikazuje strukturu testa u ovom sadržajnom području za 6. i više razrede (6+) te za 8. i više razrede (8+).

Probirni test 6+ temelji se na osnovama iz testa 4+, koje se fokusiraju na prirodne brojeve te je ovo područje sada više diferencirano. Ako učenici imaju značajne poteškoće u području prirodnih brojeva u 6+, preporučuje se koristiti test za 4+.



U području algebre ili predalgebre, strukturirano razumijevanje jednostavnih matematičkih struktura u primjenama u matematici i izvan nje vrednuje se uz koncepte proporcionalnosti i linearnosti. Isto tako, vrednuje se u području algebraskih izraza, u različitim smjerovima osnovne primjene u raznim situacijama, kao i za razumijevanje izraza, u onoj mjeri u kojoj je to dio osnovnog razumijevanja.



IV. Implementacija DiToM testa

- Objasnite svrhu testa učenicima i umirite ih

- Test se ne ocjenjuje.
- Test im omogućava da uoče što znaju, a što ne znaju, kako bismo im zatim mogli predložiti odgovarajuće zadatke za vježbanje. Stoga je posebno važno da test rješavaju samostalno.
- Naglasite značaj dovršavanja zadataka. Na što više pitanja odgovore, bit će lakše utvrditi njihovo znanje, vještine i eventualne poteškoće, te im pomoći da ih prevladaju.
- Također im možete reći da je ovo prvi puta da se test koristi i da bi ljudi koji su ga osmislili željeli znati je li prikladan.

- Struktura testa

- Test je podijeljen u tri dijela, od kojih se svaki sastoji od nekoliko zadataka.
- Svi zadaci se neovisni jedan o drugome.

- Trajanje: Maksimalno trajanje određeno je za svaki dio testa.

- Test 6+, maksimalno 45 minuta: 15 za predalgebru (I. dio), 10 za proporcionalnost (II. dio), 20 za aritmetiku (III. dio)
- Test 8+, maksimalno 40 minuta: 15 za predalgebru, 10 za proporcionalnost, 15 za aritmetiku.
- Bitno je učenicima prije testa naznačiti trajanje svakog dijela, te da će nastavnik prekinuti učenike koji nisu završili zbog poštenog odnosa prema ostalim učenicima.

- Oblik zadataka

- Zadaci otvorenog tipa: postoji prostor za odgovor (u obliku rečenice ili brojkom).
- Zadaci zatvorenog tipa (zadaci višestrukog izbora): ponuđeno je nekoliko odgovora i učenik mora odabrati samo jedan, osim ako zadatkom nije drukčije naznačeno. Recite učenicima da, ako odluče promijeniti svoj odgovor u zadatku višestrukog izbora, trebaju napisati "Ne" pored prvog odgovora i "Da" pored novog.

- Kako rješavati

- Kalkulatori nisu dozvoljeni.
- Učenici mogu koristiti bilo koji dio papira koji je ostao prazan za skicu ili računanje.
- Učenici, redom u svakom od tri dijela testa, mogu raditi svojim tempom. Učenici koji su završili pojedini dio testa trebaju pričekati nastavnikove upute prije nego nastave sa sljedećim dijelom.

- Traženje nastavnikove pomoći tijekom testa

- Ako je zatražena pomoć nastavnika, on ne daje nikakve naznake koje usmjeravaju prema odgovoru na pitanja. Cilj testa je identificirati poteškoće kod pojedinih učenika.

V. Prikaz zadataka

Zadatak 1.1: Množenje i dijeljenje

Odredi brojeve koji nedostaju.

a) $3 \cdot \underline{42} = 126$

c) $54 : \underline{9} = 6$

b) $172 = 4 \cdot \underline{43}$

d) $\underline{81} : 3 = 27$

Rješenje

- a) Prvo rješenje: Broj koji nedostaje može se interpretirati kao rezultat dijeljenja broja 126 brojem 3. Izračunavanjem količnika $126/3$ dobiva se odgovor 42.
Drugo rješenje: Uočimo da je $120 = 3 \cdot 40$ i $126 = 120 + 6$. Preostaje $6 = 3 \cdot 2$. Rezultat 126 je dobiven kao $40 + 2 = 42$.
- b) Prvo rješenje: Broj koji nedostaje može se interpretirati kao rezultat dijeljenja broja 172 brojem 4. Izračunavanjem količnika $172/4$ dobiva se odgovor 43.
Drugo rješenje: Uočimo da je $160 = 4 \cdot 40$ i $172 = 160 + 12$. Preostaje $12 = 4 \cdot 3$. Rezultat 172 je dobiven kao $40 + 3 = 43$.
- c) Broj koji nedostaje može se interpretirati ili kao rezultat dijeljenja broja 54 brojem 6, ili kao broj koji upotpunjuje jednakost $6 \cdot \underline{\quad} = 54$. U oba slučaja dobiva se odgovor 9.
- d) Prvo rješenje: Broj koji nedostaje je 3 puta veći od broja 27, odnosno, $3 \cdot 27 = 81$.
Drugo rješenje: Uvrštavanje broja 90 daje količnik 30, što je za 3 više od 27. Količnik 3 se dobiva uvrštavanjem broja 9. Rješenje 27 se dobiva kao $90 - 9 = 81$.

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Cilj zadatka je ispitati razumijevanje odnosa između množenja i dijeljenja. Kroz četiri podzadatka od učenika se traži da odrede nedostajući broj u zadatku koji uključuje ili množenje ili dijeljenje, kao što je nadopunjavanje izraza " $3 \cdot \underline{\quad} = 126$ " ili " $172 = 4 \cdot \underline{\quad}$ ". Za ispravno rješavanje ovih zadataka učenici moraju prepoznati ulogu poznatih i nepoznatih brojeva te se fleksibilno kretati među operacijama. Trebaju interpretirati jednadžbe ne samo kao poticaj za računanje, već i kao relacije između dijela i cijelog u kojima je jedna vrijednost dobivena kao rezultat množenja ili dijeljenja drugih dviju i prepoznati znak jednakosti kao relaciju ekvivalencije. Ova operativna fleksibilnost obilježje je dubljeg razumijevanja aritmetike i ključna je za pristup naprednijem matematičkom sadržaju.

Zašto je ova vještina ključna?

Prepoznavanje i tečno rukovanje odnosom između množenja i dijeljenja ključna je vještina za buduće usvajanje matematičkih sadržaja. Razumijevanje tog odnosa čini temelj za rad s omjerima, proporcijama, algebarskim izrazima i funkcijama. Prema DiToM teorijskom okviru, takve se vještine klasificiraju kao ključne matematičke vještine jer njihov izostanak može otežati ili čak u potpunosti onemogućiti daljnji napredak u učenju. Učenici koji mogu interpretirati jednadžbu na razini strukture – razumijevajući, na primjer, da " $3 \cdot \underline{\quad} = 126$ " povlači " $126 : 3$ " – pokazuju više od proceduralnog pamćenja: oni rasuđuju matematički. Rano razvijanje ove sposobnosti

osigurava da će učenici biti spremniji za baratanje simboličkim prikazima i rješavanje problema u više koraka u kasnijim razredima.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

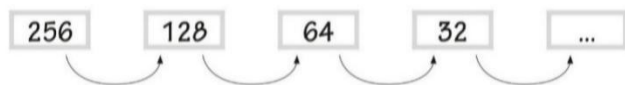
Učenici koji još nisu usvojili odnos između množenja i dijeljenja često pokazuju uobičajene miskoncepcije. Uobičajena pogreška je tumačenje svih jednakosti kao da je za njihovo rješavanje potrebno množenje, čak i kad je potrebna obrnuta operacija. Na primjer, kada naiđu na „ $172 = 4 \cdot \underline{\quad}$ “, učenici mogu pogrešno izračunati „ $172 \cdot 4$ “ umjesto da podijele. Drugi mogu nagađati na temelju mehaničkog prisjećanja činjenica, bez razmatranja strukture jednakosti. Pogrešno razumijevanje znaka jednakosti – kao poticaja za računanje, a ne kao simbola ekvivalencije – također može dovesti do proceduralno ispravnih, ali netočnih odgovora. U nekim slučajevima, učenici pokušavaju koristiti složene pisane metode (poput dugog dijeljenja, npr. $126 = 120 + 6 = 3 \cdot 40 + 3 \cdot 2$ ili $126 : 3 = 40 + 2 = 42$), tamo gdje bi strateško razumijevanje odnosa brojeva bilo primjerenije. Ova ponašanja mogu ukazivati na nedostatak svjesnosti o strukturi, kao i ograničenu konceptualnu fluentnost.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Važno je direktno povezati međusobno ovisne numeričke činjenice (npr. „ $6 \cdot 4 = 24$ “, „ $24 : 4 = 6$ “ i „ $24 : 6 = 4$ “) kako bi se istaknula reverzibilnost operacija. Poticanje učenika da verbaliziraju svoje razmišljanje, na primjer postavljanjem pitanja „Koji broj kada se pomnoži s 4 daje 172?“, pomaže u usvajanju sadržaja. Na kraju, trebalo bi prilikom uvježbavanja mijenjati položaj nepoznanice (na početku, u sredini ili na kraju jednakosti) kako bi se produbilo fleksibilno razumijevanje strukture jednakosti. Kako bi se podržali učenici koji se muče s ovim pojmom, korisno je raditi s vizualnim prikazima poput nizova, pravokutnih modela ili dijagrama grupiranja koji čine vidljivima strukture pri množenju (Polotskaia & Savard, 2021). Ovi modeli omogućuju učenicima da vide kako se količina može sastojati od jednakih dijelova ili rastavljati na njih – što odgovara množenju i dijeljenju.

Zadatak 1.2: Brojevni obrasci i prepoznavanje pravila

Kojim se pravilom može nastaviti navedeni niz brojeva?



- ☐ Oduzmi 32
- ☐ Oduzmi 128
- ☐ Podijeli sa 4
- ☒ Podijeli sa 2

Rješenje

Učenici mogu započeti provjerom koje opcije su moguće točne tako da testiraju predložene operacije s bilo kojim od prva tri broja, na primjer s 256:

$$256 - 32 = 224 \text{ (nije jednako 128 pa ova opcija ne može biti točna)}$$

$$256 - 128 = 128 \text{ (odgovara danom nizu)}$$

$$\frac{256}{4} = 64 \text{ (nije jednako 128 pa ova opcija ne može biti točna)}$$

$$\frac{256}{2} = 128 \text{ (odgovara danom nizu)}$$

Provjera (do sada točnih) druge i četvrte opcije sa 128:

$128 - 128 = 0$ i $\frac{128}{2} = 64$. Jedino posljednji izračun daje rezultat koji odgovara danom nizu. Time je preostala samo jedna mogućnost (dijeljenje sa 2), koja je potvrđena trećim brojem u nizu 64, izračunavanjem $\frac{64}{2} = 32$.

Alternativno, učenici mogu početi oduzimanjem i dijeljenjem susjednih brojeva u nizu:

$$256 - 128 = 128, \quad 128 - 64 = 64, \quad 64 - 32 = 32$$

$$\frac{256}{128} = 2, \quad \frac{128}{64} = 2, \quad \frac{64}{32} = 2$$

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da prepoznaju i opišu temeljno pravilo u numeričkom nizu. Konkretni primjer (256, 128, 64, 32, ...) zahtijeva prepoznavanje geometrijskog niza u kojem je svaki broj rezultat dijeljenja prethodnog s dva. Zadatak nudi višestruki izbor, potičući učenike da odluče koje pravilo (npr. "oduuzmi 32" ili "podijeli sa 2") ispravno objašnjava uzorak. Dakle, glavna vještina koja se testira je sposobnost učenika da prepoznaju multiplikativne strukture. To uključuje više od proceduralnog znanja — zahtijeva prepoznavanje uzoraka, strukturno rezoniranje i rani algebarski način razmišljanja.

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost prepoznavanja pravilnosti u brojevnim obrascima ključna je matematička vještina jer predstavlja temelj za naprednije koncepte poput funkcija, algebre i proporcionalnog rezoniranja. Učenici koji mogu uočiti pravila u nizovima bolje su pripremljeni za kasnije generalizacije i simboličke prikaze. Prema istraživanjima u područja matematičke edukacije (npr. Kieran, 2018; Radford, 2013), prepoznavanje obrazaca podržava razvoj relacijskog razumijevanja brojeva i operacija. Unutar DiToM teorijskog okvira, identifikacija numeričke strukture smatra se ključnom za snalaženje u sve većoj apstrakciji matematičkih sadržaja u sljedećim razinama. Štoviše,

razumijevanje geometrijskih nizova – poput polovljenja – također postavlja važnu osnovu za interpretaciju eksponencijalnih odnosa, koncept s kojim se učenici susreću u kasnijem školovanju.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Česta miskoncepcija u ovom zadatku je tumačenje niza kao aditivnog, a ne multiplikativnog. Učenici mogu pretpostaviti da se brojevi smanjuju za određeni iznos i odabrati "oduzmi 32" jer razlika između 64 i 32 odgovara ovom obrascu, iako se on ne primjenjuje dosljedno na ranije korake. Takve pogreške otkrivaju linearni pomak, što je uobičajeno kada učenici nisu upoznati s geometrijskom promjenom. Drugi učenici mogu nagađati bez provjere obrasca kroz više članova, pokazujući nesistematično razmišljanje. Osim toga, ako učenici još ne vide dijeljenje kao inverz množenju, možda neće prepoznati "podijeli sa 2" kao ponavljajući obrazac. Ovi obrasci pogrešaka sugeriraju krhki ili nedovoljno razvijen koncept strukture operacija i niza.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učenici koji imaju poteškoća u prepoznavanju numeričkih obrazaca imaju koristi od strukturiranih zadataka koji jasno suprotstavljaju aditivne i multiplikativne odnose. Korištenje vizualnih pomagala, poput lanaca brojeva ili dijagrama stabla, može pomoći učenicima da prepoznaju kako se vrijednosti mijenjaju od koraka do koraka. Aktivnosti koje zahtijevaju od učenika da sami generiraju svoje nizove prema zadanim pravilima (npr. „Napravi niz u kojem je svaki broj pola prethodnog“) mogu razviti svijest o obrascima i produbiti razumijevanje operacija. Nastavnici bi trebali poticati razmišljanje naglas – na primjer, „Kako se broj promijenio s 256 na 128?“ – kako bi promicali metakogniciju i učinili strategije vidljivima. S vremenom, povezivanje ovih obrazaca s kontekstima iz stvarnog svijeta (npr. savijanje papira, udvostručivanje bakterija) može ojačati koncept geometrijskog niza i učiniti apstraktne obrasce opipljivijima.

Zadatak 1.3: Redoslijed izvođenja računskih operacija

Izračunaj:

$$14 + 2 \cdot 3 = \underline{20}$$

Rješenje

Uočimo da množenje ima prednost nad zbrajanjem.

Prvo treba izračunati umnožak $2 \cdot 3 = 6$, zatim dodati $14 + 6 = 20$. U jednom izračunu:

$$14 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$$

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom provjerava se razumije li učenik redoslijed izvođenja računskih operacija, posebno prioritet množenja nad zbrajanjem. Učenici moraju ispravno tumačiti i izračunati izraz " $14 + 2 \cdot 3$ ", primjenjujući pravilo da se množenje izvodi prije zbrajanja. To zahtijeva ne samo proceduralnu vještinu, već i svijest o hijerarhijskoj strukturi aritmetičkih operacija. Zadatak stoga nadilazi puko faktografsko znanje i procjenjuje sposobnost učenika da ispravno analiziraju i strukturiraju numeričke izraze – ključni korak prema algebarskoj pismenosti.

Zašto je ova vještina ključna?

Razumijevanje redoslijeda izvođenja računskih operacija temeljni je preduvjet za rad sa složenijim aritmetičkim izrazima, a kasnije i s algebarskim izrazima i jednadžbama. Unutar DiToM teorijskog okvira, sposobnost obrade višestupanskih izraza prema matematičkim konvencijama smatra se ključnom vještinom jer je osnova simboličkog razmišljanja i opće sposobnosti rješavanja problema. Učenici koji usvoje ova pravila mogu pouzdano tumačiti izraze, samouvjereno manipulirati njihovim članovima i izbjeći uobičajene zamke u izračunima. Ova kompetencija nije samo bitna u kontekstu računskih operacija s brojevima, već se izravno može primijeniti i na rad s izrazima i formulama, rješavanje jednadžbi i analiziranje funkcija u kasnijem matematičkom obrazovanju.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Tipična pogreška pri rješavanju ovog zadatka je izračunavanje izraza s lijeva na desno bez poštivanja hijerarhije operacija — tj. prvo zbrajanje $14 + 2$ kako bi se dobilo 16, a zatim množenje s 3 da bi se dobilo 48. Ova pogreška otkriva pristranost prema linearnom računanju i nedostatak konceptualnog razumijevanja prioriteta računskih operacija. Još jedan znak upozorenja je oklijevanje ili pretjerano oslanjanje na neformalne strategije zaključivanja ("samo prvo napravite ono što je napisano"), što sugerira da učenici možda primjenjuju svakodnevni redoslijed čitanja umjesto matematičku strukturu. Neki učenici također bi mogli pokušati neprikladno ubaciti zagrade, pokazujući nesigurnost u načinu organizacije izraza. Čak i ako učenici dođu do točnog odgovora, korištenje "pokušaja i pogreške" ili pogađanja umjesto strukturiranog zaključivanja može biti znak praznina u razumijevanju koncepta.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Ciljana podrška trebala bi početi osvjetljavanjem strukture izraza, primjerice korištenjem kodiranja bojama, zagrada ili vizualnih modela koji pokazuju grupiranje. Nastavnici mogu prikazati izračunavanje izraza korak po korak i poticati učenike da izgovaraju svoje razmišljanje: „Prvo radim 2 puta 3 jer množenje ima prednost nad zbrajanjem. Zatim dodajem 14.“ Slično tome, vizualni prikazi dvaju metoda izračuna mogu pomoći razlikovanju i razumijevanju prioriteta tijekom izračuna. Vježbanje s različitim izrazima – uključujući one s i bez zagrada - može pomoći razjasniti kada i zašto redoslijed izvođenja računskih operacija ima važnost. Učenici također imaju koristi od istraživanja pogrešnih strategija i rasprave o tome zašto one vode do pogrešnih rezultata. S vremenom, redovita izloženost i strukturirana refleksija pomažu usvojiti pravila i jačati povjerenje učenika u provođenju višestupanskih izračuna.

Zadatak 1.4: Prijevod tekstualnog zadatka u matematički zapis

Tom slijedi upute:

Broj 4 dodaj broju 5.

Rezultat pomnoži sa 8.

Kojim izrazom može Tom odrediti rezultat?

- ☐ $5 + 4 \cdot 8$
- ☒ $(5 + 4) \cdot 8$
- ☐ $5 + (4 \cdot 8)$
- ☐ $5 \cdot 8 + 4$

Rješenje

Rezultat prve upute *Broju 4 dodaj broj 5* može se izraziti kao $5 + 4$.

Druga uputa *Rezultat pomnoži sa 8* zahtijeva da se cijeli izraz $5 + 4$ pomnoži sa 8. Nije dovoljno napisati $5 + 4 \cdot 8$, jer se u tom izrazu množi samo 4 sa 8. Zgrade oko $5 + 4$ jamče da se oba člana (odnosno njihov zbroj) pomnože sa 8. Rješenje je $(5 + 4) \cdot 8$.

Budući da su zbrajanje i množenje prirodnih brojeva komutativne operacije, sljedeći odgovori su također točni:

$$(4 + 5) \cdot 8, \quad 8 \cdot (5 + 4), \quad 8 \cdot (4 + 5)$$

Ako učenik da jedan od navedenih odgovora, mora označiti drugu opciju $(5 + 4) \cdot 8$ kao ekvivalentan odgovor.

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da interpretiraju kratku verbalnu sekvencu koja opisuje dvije uzastopne operacije — prvo zbrajanje, zatim množenje — i da tu sekvencu prevedu u simbolički zapis. Od učenika se ne očekuje da izračunaju rezultat, već da identificiraju ispravan matematički prikaz uputa jer verbalne upute i odgovarajući numerički izraz nisu semantički ekvivalentni (Vergnaud, 1983). To zahtijeva prepoznavanje redoslijeda izvođenja računskih operacija ugrađenog u jezik i konstruiranje izraza u skladu s tim (npr. $(4 + 5) \cdot 8$). Osnovna sposobnost koja se testira je prijevod iz govornog jezika u formalni zapis, uključujući uporabu zagrada kako bi se očuvala ispravna računaska struktura i prioriteta operacija.

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost simboličkog prikazivanja verbalnih ili kontekstualnih informacija ključna je za matematičku pismenost. Unutar DiToM teorijskog okvira, ova vještina smatra se ključnom jer omogućava učenicima da prelaze između različitih načina prikaza – verbalnog, simboličkog, ikonografskog i operativnog te da se bave značenjem strukture (Kieran & Martínez-Hernández, 2022) numeričkih izraza. Ova kompetencija u prevođenju bitna je ne samo u aritmetici, već i u algebri, gdje se učenici redovito susreću sa situacijama koje zahtijevaju izgradnju ili tumačenje izraza na temelju tekstualnih zadataka, dijagrama ili svakodnevnih scenarija. Rana ovladanost ovom vještinom podržava razvoj funkcijskog razmišljanja, fleksibilnosti u rješavanju problema i tečnost u radu s matematičkim modelima.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Uobičajena pogreška pri rješavanju ovog zadatka je izgradnja izraza u pogrešnom redoslijedu, kao na primjer tumačenje "broju 4 dodaj broj 5" kao " $4 + 5$ " (što je matematički ispravno), ali zatim nepravilno primjenjivanje

množenja: ili $4 + (5 \cdot 8)$ ili $4 \cdot 5 + 8$. To odražava poteškoće u prepoznavanju sekvence operacija ugrađenih u jezik. Pojedini učenici mogu zanemariti potrebu za zagradama i napisati $4 + 5 \cdot 8$, što dovodi do pogrešnog redoslijeda izvođenja računskih operacija tijekom izračuna. Drugi se mogu usredotočiti samo na završnu operaciju i napisati $9 \cdot 8 = 72$ kao odgovor, zaobilazeći stvarni zadatak simboličkog prevođenja. Ovi obrasci ukazuju na praznine u proceduralnom razumijevanju i poteškoće u koordinaciji jezika s matematičkom strukturom.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

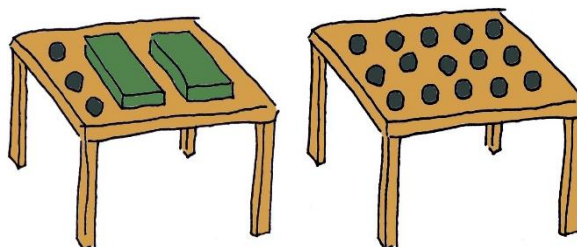
Kako bi se podržali učenici u ovom području, važno je poticati ih da razviju sveobuhvatno razumijevanje redoslijeda izračuna kako bi uzeli u obzir strukturu izračuna i redoslijed izvođenja računskih operacija. Nastavnici mogu pokazati kako „izgraditi član“ iz izgovorene rečenice i koristiti vizualne organizatore (poput stabala računskih operacija ili dijagrama) kako bi pomogli učenicima pravilno poredati operacije. Naglašavanje uloge zagrada u grupiranju operacija može spriječiti pogrešno tumačenje. Rutine u učionici koje uključuju „prijelaz naprijed-natrag“ između jezika i simbola također mogu ojačati reprezentacijsku fleksibilnost učenika. S vremenom, poticanje učenika da kažu što izraz znači (npr. „prvo zbrajam, zatim množim“) pomaže u konsolidaciji njihovog razumijevanja simboličke strukture.

Zadatak 1.5: Uspoređivanje količina

Na slici su prikazane pikule i kutije smještene na dva stola.

Svaka kutija sadrži jednak broj pikula.
Na svakom stolu nalazi se jednak broj pikula.
Koliko pikula ima u svakoj kutiji?

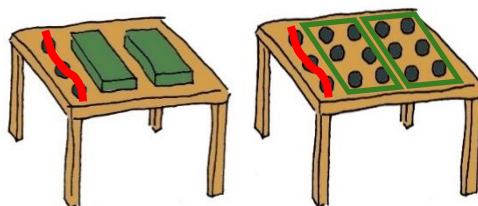
Odgovor: 6



Rješenje

Ovaj zadatak može biti riješen formalnim ili neformalnim metodama.

Jedno rješenje je prvo ukloniti tri pikule sa svakog stola i grupirati preostalih 12 pikula na Stolu 2 u dvije grupe, svaka s istim brojem pikula (ovdje, 6 pikula).



Ovaj smjer zaključivanja može se podržati izračunima $15 - 3 = 12$ i $12 : 2 = 6$.

Uočimo da se proces uklanjanja i grupiranja može izvršiti bilo na slici, mentalno ili računajući na papiru.

Drugo rješenje može se temeljiti na ispitivanju vrijednosti dok na oba stola ne bude isti broj pikula. Takvo isprobavanje može se provesti u vidu mentalnog računanja, ali se može i sažeti pomoću tablice:

Broj pikula u jednoj kutiji	3	4	5	6
Ukupno na Stolu 1	9	11	13	15
Ukupno na Stolu 2	15	15	15	15

Treće, formalno rješenje može se temeljiti na uvođenju varijable x za broj pikula u jednoj kutiji i simboličkom prikazu problema jednačinom $2x + 3 = 15$, koju je moguće riješiti algebarskim metodama. Međutim, ovo rješenje vjerojatno neće koristiti učenici razine 6+.

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da tumače vizualni prikaz odnosa dio–cjelina koji uključuje jednakost. Učenicima se prikazuju dva stola, od kojih se na svakom nalaze vidljive pikule i kutije koje sve sadrže isti nepoznat broj pikula. Ključni zahtjev je odrediti broj pikula u jednoj kutiji na temelju informacije da se na oba stola nalazi isti ukupni broj pikula. To znači da učenici moraju mentalno izjednačiti količine s obje strane i odrediti nepoznanicu – oblik neformalnog rješavanja jednačbi temeljen na vizualnoj ravnoteži. Zadatak stoga cilja na strukturno razmišljanje, rani algebarski način razmišljanja i sposobnost tumačenja ekvivalencije u nesimboličkom kontekstu.

Zašto je ova vještina ključna?

Tumačenje jednakosti ključni je pretkorak za algebarsko zaključivanje. Unutar DiToM teorijskog okvira, ovo se identificira kao ključna vještina jer se oslanja na razumijevanje ekvivalencije i supstitucije – temeljnih ideja i u aritmetici i u ranoj algebri. Razmišljanjem da dvije različite konfiguracije zapravo moraju biti jednake ukupno, učenici vježbaju relacijsko mišljenje umjesto da se oslanjaju samo na izravno računanje (Radford, 2014). Ova vještina podržava kasniju kompetenciju u rješavanju jednadžbi, balansiranju transformacija i radu s nepoznatim veličinama u simboličkom prikazu. Osim toga, takvi nesimbolički zadaci pružaju bitnu poveznicu za učenike koji još razvijaju povjerenje u formalne prikaze, omogućujući konceptualni pristup kroz vizualnu strukturu.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

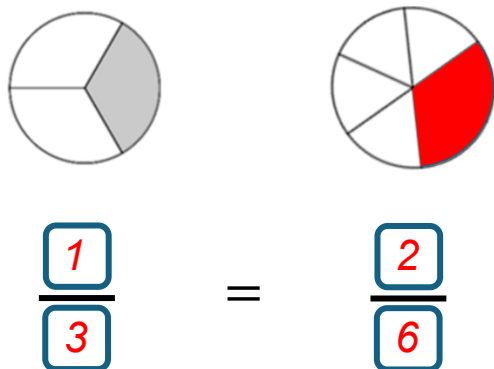
Učenici koji se muče s ovim zadatkom mogu ne uspjeti prepoznati ekvivalenciju između dvije strane. Tipična greška je pokušaj brojanja samo vidljivih pikula, ignorirajući skrivenu količinu u kutijama ili pretpostavljanje fiksne vrijednosti (npr. „svaka kutija mora imati 10 pikula“). Drugi mogu prepoznati potrebu za ravnotežom, ali pogrešno izračunati ili neodgovarajuće razmišljati, možda pogađajući broj pikula u kutiji bez provjere vodi li to do jednakih ukupnih vrijednosti. Također, skupina učenika može tretirati vizualnu sliku opisno umjesto analitički – navodeći što je vidljivo bez pokušaja da se zaključi nepoznato. Ova ponašanja sugeriraju praznine u strukturnom razumijevanju, posebno u tumačenju nepoznatih veličina kao količina koje treba odrediti na temelju zaključivanja počevši od poznatih količina.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učenici imaju koristi od rada s praktičnim materijalima koji čine koncept jednakosti konkretnim. Nastavnici mogu koristiti kontekste pripovijedanja („Oba djeteta dobila su isti broj pikula – koliko ih je u kutiji?“) kako bi podržali aktivnost i utemeljili problem u prepoznatljivom okruženju. Crtanje i označavanje dijagrama gdje učenici pišu jednadžbe poput „ $3 + x = 7$ “ može pomoći u povezivanju vizualnog rezoniranja i simboličkog prikaza. Osim toga, ponavljana praksa u prepoznavanju jednakih, ali različito sastavljenih skupova ojačava pojam jednakosti i podržava prijelaz s aditivnog razmišljanja na rani funkcijski način razmišljanja. Kao i uvijek, učenici bi trebali biti potaknuti da objasne svoje razmišljanje i provjere odražavaju li predložene vrijednosti ravnotežu.

Zadatak 2.1: Prikaz i interpretacija ekvivalentnih razlomaka

Osjenčaj dio drugog kruga tako da prikazuje razlomak koji je ekvivalentan razlomku koji je prikazan osjenčanim dijelom prvog kruga i zapiši te ekvivalentne razlomke pomoću brojki.



Rješenje

Osjenčani dio kruga s desne strane trebao bi imati isti omjer osjenčanog dijela i cjeline kao i krug s lijeve strane. Budući da je omjer dijela i cjeline u krugu s lijeve strane 1:3, omjer u krugu s desne strane mora biti 2:6. (Ovaj se zaključak može intuitivno objasniti: Ako okrugli kolač podijelimo na šest dijelova umjesto na tri dijela, potrebno je dvostruko više dijelova da bismo dobili istu količinu kolača.)

Također, možemo formalno postupiti proširivanjem razlomka kako slijedi:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak usredotočuje se na sposobnost prepoznavanja i konstruiranja ekvivalentnih razlomaka kroz dva aspekta prikaza: prvo u vizualnom obliku (sjenčanjem dijelova kruga), a zatim u simboličkoj notaciji (zapisivanjem jednakosti razlomaka). U prvom dijelu zadatka, od učenika se traži da dovrše vizualni prikaz sjenčanjem istog udjela kruga kao što je prikazano u danom modelu. U drugom dijelu, očekuje se da taj odnos izraze kao matematički identitet koristeći razlomke. Glavna vještina koja se testira je koordinacija između vizualnog razumijevanja dijela i cjeline i njegove formalne reprezentacije kao ekvivalentnih običnih pravih razlomaka.

Zašto je ova vještina ključna?

Razumijevanje ekvivalentnih razlomaka temelj je razumijevanja racionalnih brojeva i stoga predstavlja ključnu matematičku vještinu. Ono čini konceptualnu osnovu za operacije s razlomcima, proporcionalno razmišljanje, koncepte omjera i algebarsku ekvivalenciju. Unutar DiToM teorijskog okvira, prepoznavanje da razlomci različitog izgleda mogu predstavljati istu količinu smatra se presudnim za razvoj fleksibilnosti u razmišljanju o brojevima. Učenici moraju shvatiti da obični pravi razlomak ne predstavlja samo broj, već i odnos između dijela i cjeline — i da taj odnos ostaje konstantan čak i kada se i brojnik i nazivnik proporcionalno povećaju ili smanje. Zadaci koji kombiniraju vizualnu i simboličku razinu potiču dublje razumijevanje i podržavaju prijelaz na apstraktno razmišljanje u kasnijoj matematici.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

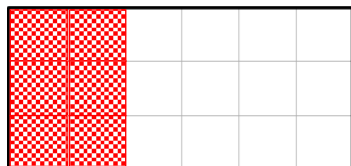
Učenici mogu obojiti pogrešan broj dijelova u drugom krugu—npr., uparujući broj obojanih dijelova umjesto proporcionalne veličine. To otkriva strategiju brojanja umjesto relacijskog razmišljanja, što ukazuje na to da nazivnik vide kao statični broj, a ne kao dio cjeline. U drugom dijelu zadatka, učenici bi mogli prepisati zadani razlomak bez transformacije, napisati neekvivalentne, ali sličnog izgleda razlomke (npr. udvostručiti samo brojnik), ili zamijeniti redoslijed brojnik i nazivnik. Neki mogu potpuno izostaviti znak jednakosti, što sugerira nesigurnost u vezi s konvencijama bilježenja razlomaka. To su upozoravajući znakovi krhkog konceptualnog razumijevanja i ograničenog iskustva u povezivanju vizualnih i simboličkih prikaza.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Kako bi izgradili čvrsto razumijevanje ekvivalentnih razlomaka, učenici bi redovito trebali raditi s pomagalima i vizualnim modelima - poput dijelova krugova, traka ili pločica – kako bi uočili i izgradili jednake dijelove kroz različite podjele. Naglasak bi trebao biti na prepoznavanju koliko dijelova od koliko čini isti omjer i kako se istovremeno mijenja broj obojanih dijelova i ukupni broj dijelova. Nastavnici mogu voditi učenike u verbaliziranju procesa skaliranja, npr. „Povećao sam broj dijelova dva puta i obojio dva puta više dijelova.“ To podržava usvajanje multiplicativne strukture u pozadini ekvivalencije. Aktivnosti povezivanja – npr. bojanje, zatim pisanje, a potom verbalno objašnjavanje – posebno su učinkovite u stabilizaciji veze između vizualnih prikaza i formalnih razlomaka.

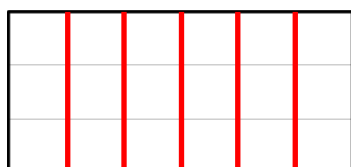
Zadatak 2.2: Sjenčanje zadanog dijela pravokutnika

Oboji $\frac{2}{6}$ pravokutnika:

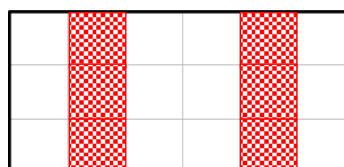


Rješenje

Rješenje prikazano iznad temelji se na podjeli pravokutnika na šest jednako velikih dijelova (stupaca) i odabiru dva od tih dijelova.

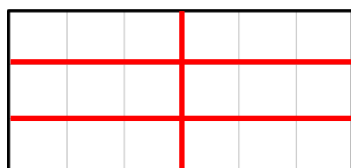


Drugi točan odgovor:

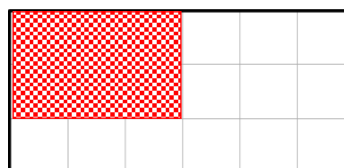


Naravno, bilo koja dva od ovih šest dijelova mogu biti osjenčana kako bi se dobilo ispravno rješenje.

Postoje i drugi načini da se pravokutnik podijeli na šest jednakih dijelova, na primjer:

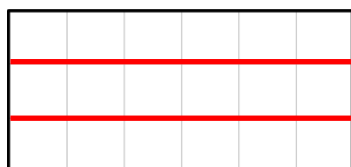


Još jedan točan odgovor:

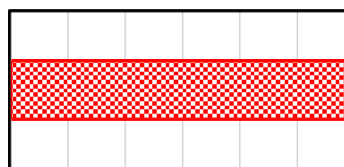


Bilo koji odgovor u kojem je osjenčano 6 kvadratića od ukupno 18 kvadratića je točan.

Također, ispravno je interpretirati $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ i osjenčati jedan dio od tri.



Još jedan točan odgovor:



Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da izgrade vizualni prikaz zadanog razlomka tako da osjenčaju određeni dio pravokutnika. Od učenika se očekuje da prepoznaju točan broj jednakih dijelova i osjenčaju onoliko dijelova koliko odgovara brojniku, pri čemu prepoznaju da ukupan broj dijelova odgovara nazivniku. To zahtijeva tumačenje razlomaka kao operatora na područjima – tj. korištenje razlomka za određivanje koliko se cijelog područja uzima u obzir. Zadatak zahtijeva precizno podijeljeno područje, prostornu procjenu i proporcionalno razmišljanje.

Zašto je ova vještina ključna?

Vizualno prikazivanje razlomka ključan je korak u razvoju relacijskog i proporcionalnog mišljenja, kao i povezivanja neformalnog i formalnog znanja o razlomcima. Unutar DiToM teorijskog okvira, ova vještina se smatra osnovnom jer podržava kasnije razumijevanje ekvivalencije, zbrajanja i oduzimanja razlomaka te baratanja s površinama u geometriji. Predstavljanje razlomaka u vizualnom modelu kao što je pravokutnik također jača razumijevanje da razlomci nisu samo povezani s diskretnim dijelovima (poput kuglica ili žetona), nego i s kontinuiranim količinama i površinama. Učenici koji fleksibilno prelaze između zapisa u obliku razlomaka i vizualnih modela obično razvijaju dublje, povezanije koncepte o brojevima i bolje su pripremljeni za apstraktni rad u algebri i šire.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Uobičajene pogreške uključuju sjenčanje pogrešnog broja dijelova, često zbog pogrešnog brojanja ili pogrešnog identificiranja ukupnog broja podjela. Učenici mogu sjenčati dijelove koji nisu jednaki po veličini, čime se krši zahtjev da pojedini dijelovi moraju imati jednaku površinu. Drugi mogu sjenčati nasumično bez uspostavljanja ikakve veze s danim razlomkom, što upućuje na nedostatak razumijevanja odnosa dijela prema cjelini. U nekim slučajevima, učenici ignoriraju nazivnik i jednostavno broje jedinice (npr. sjenčaju dva dijela bez obzira na to koliko ih ukupno ima). Ovi obrasci ukazuju na poteškoće u koordinaciji simboličkog zapisa u obliku razlomka s vizualnim modelom i u razumijevanju strukturnog ograničenja koje određuje valjani prikaz razlomka.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Ciljana podrška trebala bi uključivati praktične aktivnosti s trakama za razlomke, savijanjem papira ili modelima područja temeljenim na mreži. Učenike treba poticati da prvo podijele oblike na jednake dijelove prije nego što primijene operator (npr. „Obojite 3 od 4 jednaka dijela“). Pomaže prikazivati dobre primjere i one koji to nisu – npr. pravokutnike u kojima istaknuti dijelovi nisu jednaki – kako bi se razjasnilo što se smatra valjanim prikazom razlomka. Povezivanje zadataka sjenčanja sa simboličkim zapisom i verbalnim objašnjenjem („Podijelio sam na 6 jednakih dijelova i obojao 4 od njih, dakle to je četiri šestine“) podržava integraciju različitih prikaza. Kroz vrijeme, učenici bi trebali vježbati s različitim oblicima i orijentacijama kako bi generalizirali svoje razumijevanje na situacije izvan specifičnih formata.

Zadatak 2.3: Proporcionalno zaključivanje s količinama i cijenama

Cijena 2 kilograma krumpira iznosi 5 €. Odredi cijenu za 6 kilograma krumpira.

15 €

Rješenje

Učenici koji prepoznaju da 6 kg iznosi 3 puta više nego 2 kg mogu zaključiti da 6 kg treba imati cijenu 3 puta veću od one za 2 kg. Dakle, cijena za 6 kg je $3 \cdot 5 = 15$ €.

Takvo proporcionalno zaključivanje može se podržati semi-formalnim prikazima kao što su

$$\begin{array}{l} 2 \text{ kg} \rightarrow 5 \text{ €} \\ 6 \text{ kg} \rightarrow ? \text{ €} \end{array} \quad \cdot 3 \quad \begin{array}{l} 2 \text{ kg} \rightarrow 5 \text{ €} \\ 6 \text{ kg} \rightarrow ? \text{ €} \end{array} \quad \cdot 3$$

Ili, više formalno:

$$\frac{5}{2} = \frac{?}{6} \quad \left(\text{or } \frac{?}{6} = \frac{5}{2} \quad \text{or } \frac{6}{2} = \frac{?}{5} \quad \text{or } \frac{?}{5} = \frac{6}{2} \right)$$

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da primijene multiplikativno razmišljanje kako bi riješili problem proporcionalnosti koji uključuje cijene i količine. Kontekst — određivanje cijene za 6 kilograma krumpira ako 2 kilograma stoji 5€ — zahtijeva od učenika da prepoznaju i održe konstantan omjer između količine i cijene. Da bi riješili zadatak ispravno, učenici moraju ili proporcionalno povećati par količina-cijena za faktor 3 ili izračunati jediničnu cijenu (cijenu po kilogramu) i potom pomnožiti sa šest. Vještina koja se testira je razumijevanje i primjena multiplikativnih struktura u funkcijskim odnosima, što je ključna osnova za zadatke s omjerom, proporcijom i postotcima u kasnijoj matematici.

Zašto je ova vještina ključna?

Proporcionalno razmišljanje je važna matematička ključna vještina u kasnijim razredima. Prema DiToM teorijskom okviru, sposobnost identificiranja i rada s konstantnim odnosima — kao što je “2 kg → 5 €” povećano na “6 kg → ? €” — kritična je ne samo u aritmetici, već i u algebri, razumijevanju funkcija, geometriji, znanosti i svakodnevnom rješavanju problema. Učenici koji svladaju ove multiplikativne odnose mogu generalizirati kroz različite kontekste i fleksibilno birati učinkovite strategije (npr. udvostručenje, prepolovljavanje, računanje cijene po jedinici). Štoviše, prijelaz iz aditivnog u multiplikativno uspoređivanje odražava razvojni skok u matematičkom razumijevanju koji podupire buduće učenje o linearnim funkcijama i modelima proporcionalnosti.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Uobičajene pogreške uključuju aditivno razmišljanje, kao što je pretpostavka da ako 2 kg krumpira stoji 5 €, tada cijena za 6 kg mora biti $5 + 4 = 9$ €. To odražava neuspjeh u shvaćanju multiplikativne prirode odnosa. Neki učenici mogu izravno pomnožiti 5 sa 6 (što rezultira s 30 €), pogrešno tumačeći značenje uključenih brojeva. Drugi se mogu mučiti s koordinacijom jedinica — miješajući kilograme i eure — ili jednostavno nagađati na temelju procjene. Ove pogreške ukazuju na praznine u strukturnom razumijevanju i moguće ograničeno iskustvo s razmišljanjem

temeljenim na omjerima. Učenici koji ne izražavaju svoju strategiju ili koji se oslanjaju na pokušaj i pogrešku često nemaju pouzdan konceptijski model za proporcionalnost.

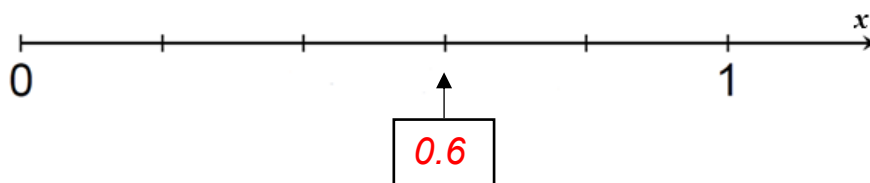
Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učenici imaju koristi od rješavanja problema bogatih kontekstom koji uključuju novac, recepte ili mjerenja, u kojima se proporcionalne strukture prirodno pojavljuju. Nastavnici bi trebali jasno modelirati strategije poput razmišljanja o jedinicama cijene ("Ako 2 kg stoji 5 €, onda 1 kg stoji 2,50 €...") ili skaliranja temeljeno na faktorima ("6 kg je 3 puta 2 kg, pa je cijena $3 \cdot 5$ €"). Vizualna pomagala poput dvostrukih brojevni pravaca, tablica omjera i grafičkih modela mogu olakšati razumijevanje multiplikativnog odnosa. Također je korisno uspoređivati aditivne i multiplikativne strategije tijekom rasprava u razredu kako bi se istaknule njihove različite implikacije. Poticanje učenika da objasne i opravdaju svoje razmišljanje podržava metakognitivni razvoj i pomaže produbiti razumijevanje proporcionalnih struktura.

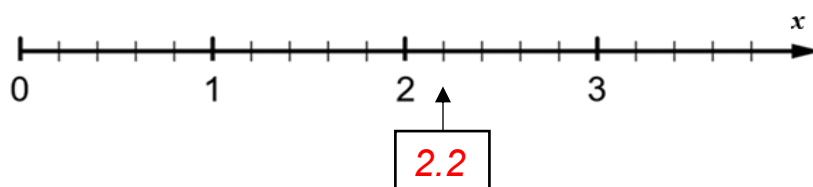
Zadatak 3.1: Prikaz racionalnih brojeva na brojevnom pravcu

U pravokutnik upiši broj pridružen točki brojevnog pravca

a)



b)



Rješenje

Dvije moguće strategije su:

- 1) Brojanje broja podjela (ili podintervala) od 0 to 1;
- 2) Testiranje nizova racionalnih brojeva u decimalnom zapisu (ili razlomaka) od 0 do 1.

Prvo rješenje za a): Prva strategija može se provesti brojanjem 5 koraka od 0 do 1. Naime, za rješenje je potrebno odrediti broj sukladnih dijelova na koje je podijeljena jedinična dužina. U ovom slučaju je jedinična dužina podijeljena na 5 sukladnih dijelova.

	0					1
# koraka:	1	2	3	4	5	
razlomak:	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	
dec. zapis:	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	

Drugo rješenje: Jedna mogućnost je isprobati 0.1 za prvu podjelu desno od 0. Ovaj izbor, nakon 5 koraka, rezultira sa 0.5, što ne odgovara pridruženom broju 1 na brojevnom pravcu. Promjena na 0.2, nakon 5 koraka, daje 1.0, što odgovara pridruženom broju 1 na brojevnom pravcu.

	0					1
1. proba:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
2. proba:	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak usmjeren je na sposobnost učenika da interpretiraju brojevni pravac i da na odgovarajući način postave razlomak ili decimalni broj na temelju njegove relativne pozicije između 0 i 1 (ili izvan toga). Učenici moraju analizirati na koliko je sukladnih dijelova podijeljena jedinična dužina i upisati odgovarajući racionalan broj (razlomak ili decimalni zapis) koji je pridružen određenoj točki. To zahtijeva razumijevanje razlomaka kao zapisa racionalnih brojeva, a ne samo kao odnosa dijela i cjeline. Zadatak također provjerava sposobnost koordinacije simboličkih i prostorno-vizualnih prikaza racionalnih brojeva.

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost određivanja pozicije racionalnog broja na brojevnom pravcu ključna je matematička vještina jer odražava pomak u razumijevanju s razlomaka kao dijelova objekata na razlomke kao zapis brojeva na kontinuiranoj skali. Ova prostorna interpretacija razlomaka postavlja temelje za uspoređivanje, rangiranje i računanje s racionalnim brojevima zapisanim u obliku razlomka. Unutar DiToM teorijskog okvira, procjena i pozicioniranje na brojevnom pravcu smatraju se snažnim pokazateljima konceptualne jasnoće. Istraživanja (npr. Siegler & Booth, 2004; Treppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014) pokazuju da učenici koji razumiju metričku strukturu brojevnog pravca imaju veće šanse za uspjeh u kasnijoj aritmetici, algebri i geometriji. Štoviše, brojevni pravac nudi objedinjeni model koji podržava prijelaze između prirodnih brojeva, pozitivnih racionalnih brojeva (zapisanih u obliku razlomaka ili decimalnih brojeva) i negativnih brojeva.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

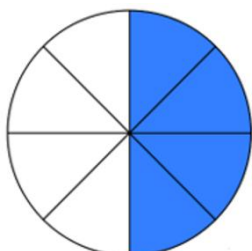
Učenici se često oslanjaju na brojanje oznaka na brojevnom pravcu pretpostavljajući decimalnu podjelu jedinice (tj. podjelu jedinične dužine na 10 sukladnih dijelova), umjesto da razmišljaju o veličini vrijednosti razlomka. Na primjer, mogu pogrešno protumačiti četiri podjele kao „četvrtine“ bez obzira na to je li cjelina podijeljena na jednake dijelove ili ne. Još jedna česta pogreška je postavljanje razlomka na pogrešno mjesto – npr. pogrešno postavljanje $\frac{3}{4}$ na mjesto $\frac{2}{3}$ zbog nedostatka proporcionalnog razmišljanja. Neki učenici mogu nagađati na temelju vizualne intuicije umjesto da odrede nazivnik koji proizlazi iz broja sukladnih dijelova. U naprednijim varijantama, učenici mogu imati poteškoća kada prikazani dio brojevnog pravca ne počinje od 0 ili kada su uključeni nepravilni razlomci ili mješoviti brojevi. Ove pogreške upućuju na nedovoljno razumijevanje povezanosti veličine, zapisa i strukture. Postoje i učenici koji daju netočan decimalni zapis broja kao rješenje. Molimo pogledajte zadatak 3.4 koji se bavi ovim problemom.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Kako bi se podržali učenici, ključno je uložiti vrijeme u izgradnju stabilnog mentalnog modela brojevnog pravca koji uključuje zapise racionalnih brojeva u obliku razlomaka i decimalnih brojeva. Nastavnici mogu koristiti interaktivne alate poput preklopnih traka, ravnala za razlomke i digitalnih brojevnih pravaca za razvoj proporcionalnog rasuđivanja. Nastavu bi trebalo usredotočiti na to kako odrediti veličinu jednog intervala, kako brojati podjele i kako povezati te korake sa zapisom broja. Usporedba različitih racionalnih brojeva zapisanih u obliku razlomaka na istom brojevnom pravcu pomaže u jačanju razumijevanja odnosa veličina i ekvivalencije. Aktivnosti povezivanja—poput isticanja vizualnih prikaza razlomaka na brojevnom pravcu, zatim njihovog zapisivanja u simboličkom obliku i obrnuto ili uspostavljanja odnosa s već poznatim ikoničkim prikazima koje učenici već poznaju (npr. kružni dijagrami)—ojačavaju veze među različitim prikazima. Česta verbalizacija („Ovo je treći segment od četiri, dakle to je tri četvrtine“) potiče usvajanje strukture.

Zadatak 3.2: Odabir razlomka koji odgovara osjenčanom dijelu kruga

Koliki dio kruga je obojan?



☒ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{1}{8}$

☐ $\frac{8}{4}$

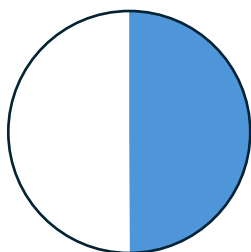
☐ $\frac{1}{4}$

Rješenje

Na polaznoj slici nalaze se 4 osjenčana dijela i ukupno 8 dijelova. Odgovarajući razlomak je

$$\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2} \quad (\text{ili} \quad \frac{4}{8} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2})$$

Drua mogućnost je zanemariti linije i tumačiti osjenčani dio kao *polovinu* kruga.



Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovaj zadatak cilja sposobnost učenika da prepoznaju razlomak na temelju vizualnog prikaza dijela i cjeline te da odaberu ispravan simbolički prikaz tog razlomka među višestrukim opcijama. Na slici je krug podijeljen na osam jednakih dijelova, od kojih su četiri osjenčana. Ispravan razlomak je stoga $\frac{4}{8}$, što se može pojednostaviti na $\frac{1}{2}$. Međutim, učenici ne smiju samo prepoznati ovaj odnos, već ga moraju razlikovati od naizgled točnih, ali pogrešnih opcija, poput $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ili čak $\frac{8}{4}$. Ključna vještina koja se provjerava je koordinacija vizualnog, numeričkog i strukturnog razumijevanja razlomaka.

Zašto je ova vještina ključna?

Sposobnost interpretiranja razlomaka na temelju vizualnih modela i ispravnog povezivanja s njihovim simboličkim prikazom temeljna je vještina u razumijevanju racionalnih brojeva. Unutar DiToM teorijskog okvira, ovaj zadatak se oslanja na koncept razlomka kao omjera dijela i cjeline, što je ključno za naprednije koncepte poput ekvivalencije, računskih operacija s racionalnim brojevima zapisanim u obliku razlomaka i proporcionalnosti. Važno je napomenuti da zadatak sadrži konceptualnu zamku – distraktor $\frac{8}{4}$ numerički je veći od cjeline, unatoč

tome što odgovara točnim brojkama (samo su zamijenjene njihove pozicije). Prepoznavanje ove situacije zahtijeva više od vizualnog brojanja; zahtijeva razumijevanje strukture, veličine vrijednosti razlomaka i njihova značenja.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Distraktor $\frac{8}{4}$ posebno je zanimljiv jer uključuje dva broja prisutna na slici – ukupno je 8 dijelova i od čega 4 osjenčana – ali im mijenja značenje. Odabir $\frac{1}{8}$ ili $\frac{1}{4}$ mogao bi ukazivati na pogrešno tumačenje proporcije, bilo da se broji samo osjenčani dio ili se on ne uzima u obzir uopće. Neki učenici mogu se automatski odlučiti za poznate „referentne razlomke“ poput $\frac{1}{4}$ ili $\frac{1}{2}$ bez analize. Sve su to upozoravajući znakovi krhkog ili nepotpunog razumijevanja razlomaka, osobito u pogledu odnosa dijela i cjeline te njihove simboličke interpretacije.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učenici imaju koristi od praktičnih aktivnosti u kojima mogu fizički podijeliti i obojati dijelove cjeline koristeći, na primjer, krugove ili presavijanje papirnatih oblika za prikaz razlomaka. Nastavnici bi trebali naglasiti uloge brojnika i nazivnika kroz stalno verbaliziranje („4 dijela obojana od 8 jednakih dijelova – to su 4 osmine ... i zapisujem to ovako: $\frac{4}{8}$ “). Vježbanje povezivanja vizualnih modela s različitim prikazima razlomaka, uključujući i one čija je vrijednost veća od 1, može pomoći učenicima da razlikuju prave, neprave i ekvivalentne razlomke. Poticanje učenika da objasne zašto razlomak poput $\frac{8}{4}$ ne može predstavljati manje od cjeline razvija kritičko mišljenje i podržava svijest o strukturi. Isticanje uobičajenih pogrešaka kroz vođenu raspravu (npr. „Zašto bi netko mogao pomisliti da je $\frac{8}{4}$ ispravno?“) može pomoći u iznošenju miskoncepcija i njihovom izravnom uklanjanju.

Zadatak 3.3: Uspoređivanje vrijednosti nepravog razlomka s prirodnim brojevima

Označi križićem sve prirodne brojeve koji su veći od $\frac{10}{3}$.

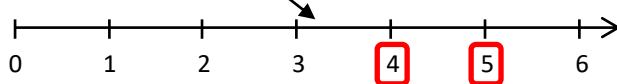
☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5

Rješenje

Prvo rješenje: Najprije se izračuna $\frac{10}{3} = 3.33\dots$ ili razloži $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Među brojevima 2, 3, 4, 5, samo su 4 i 5 veći od 3.33.

Drugo rješenje: Smjestimo $\frac{10}{3}$ na brojevni pravac (kao razlomak, kao mješoviti broj $3\frac{1}{3}$, ili kao 3.33...) i usporedimo poziciju sa 2, 3, 4, 5.



Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da usporede nejedinični razlomak vrijednosti veće od 1 ($10/3$) s nekoliko prirodnih brojeva. Učenici moraju identificirati sve brojeve u skupu {2, 3, 4, 5} koji su veći od $10/3$. Budući da je $10/3$ jednako $3 + 1/3$ ili približno 3.33, ispravno rješenje je odabir oba broja 4 i 5. Važno je napomenuti da se zadatak ocjenjuje kao točan samo ako su obje vrijednosti odabrane i nijedna od krivih opcija nije označena.

Zašto je ova vještina ključna?

Uspoređivanje racionalnih brojeva zapisanih u obliku razlomka s cijelim brojevima je ključna matematička vještina jer povezuje skupove racionalnih i cijelih brojeva, podržavajući razvoj koherentnog modela brojevnog pravca. Unutar DiToM teorijskog okvira, ova usporedba potiče razumijevanje veličine vrijednosti razlomaka, procjene i prijelaza između razlomaka i decimalnog zapisa ili mješovitih prikaza. Sposobnost određivanja je li vrijednost razlomka veća ili manja od cijelog broja ključna je za razvoj fleksibilnosti u tumačenju numeričkih informacija. Štoviše, ova vještina podržava uspjeh u zadacima koji uključuju mjerenje, skaliranje i interpretaciju funkcija — područjima u kojima se uspoređivanje racionalnih i prirodnih brojeva redovito pojavljuje.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

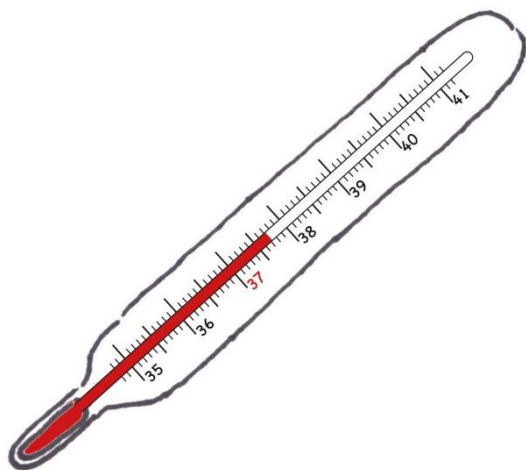
Učenici bi mogli pogrešno pretvoriti $10/3$, npr., procijenivši ga kao 2 ili 5, što može dovesti do pogrešnih odluka prilikom odabira ponuđenih rješenja. Česta miskoncepcija proizlazi iz fokusiranja samo na brojnik ili nazivnik zasebno – npr. pretpostavljajući da je $10/3$ manje od 4 jer je „3 veći od 1“. Neki učenici mogu označiti samo jednu točnu opciju (npr. 4), krivo shvaćajući upute zadatka ili ne prepoznajući da postoji više od jedne točne vrijednosti. Drugi mogu označiti sve brojeve veće od 3, nagađajući na temelju djelomičnog prisjećanja. Ove pogreške otkrivaju manjak vještine u radu s nepravim razlomcima i poteškoće u fleksibilnom prijelazu između različitih prikaza (npr. pretvaranjem $10/3$ u $3\frac{1}{3}$).

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učenici bi trebali redovito vježbati uspoređivanje vrijednosti nepravih razlomaka s prirodnim brojevima i mješovitim brojevima. Vizualna pomagala poput brojevnog pravca ili traka s razlomcima mogu pomoći u razjašnjavanju gdje se vrijednost određenog razlomka nalazi u odnosu na referentne brojeve. Nastavnici mogu usmjeriti učenike da nepravu razlomke izraze u obliku mješovitih brojeva (npr. $10/3 = 3\frac{2}{3}$) kako bi podržali procjenjivanje i uspoređivanje. Vježbe koje uključuju verbalno rasuđivanje („Je li $10/3$ više ili manje od 4?“) i zadaci s objašnjenjem (npr. argumentiranje zašto 3 nije točno) pomažu u povećanju konceptualne jasnoće. U zadacima s više točnih odgovora također je korisno naglasiti jezičnu komponentu zadatka – kako točno i potpuno interpretirati jezične strukture poput "označi sve na koje se primjenjuju".

Zadatak 3.4: Očitavanje broja u decimalnom zapisu s toplomjera

Izmjerenu temperaturu zapiši u °C.



Answer: 37.7 °C

Rješenje

Skala na toplomjeru je podijeljena na desetinke (jednog stupnja Celzijusa). Prema usporedbi s brojevnim pravcem:



Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom se ispituje sposobnost učenika da tumače i čitaju racionalne brojeve u decimalnom zapisu na skali podijeljenoj na dijelove jednake veličine, prikazanoj u stvarnom kontekstu (toplomjer). Učenicima se prikazuje analogni toplomjer s oznakama u Celzijusima i stupcem crvene tekućine koji se penje do određene razine – konkretno, do 37.7 °C. Da bi ispravno riješili zadatak, učenici moraju očitati temperaturu s danog vizualnog prikaza i izraziti je u decimalnom zapisu. Osnovna vještina koja se ovdje testira je sposobnost točnog čitanja i tumačenja decimalnih količina na kontinuiranoj metričkoj skali u poznatom okruženju.

Zašto je ova vještina ključna?

U okviru DiToM teorijskog okvira, tumačenje mjerenja na linearnim skalama temeljna je matematička ključna vještina jer integrira razumijevanje mjesne vrijednosti, procjenu veličine i metričko rezoniranje. Tumačenje brojeva u decimalnom zapisu ključno je za svakodnevne situacije – temperaturu, novac, duljinu, težinu – i predstavlja temelj za daljnji rad s postotcima, razlomcima i funkcijama. Štoviše, očitavanje skala u autentičnim kontekstima podržava matematičku pismenost, budući da učenici moraju razumjeti stupnjevane mjerne instrumente u zdravstvu, znanosti ili svakodnevnom životu. Povezanost između vizualnih informacija i numeričkog prikaza jača sposobnost učenika da povežu kontinuirane količine sa simboličkom preciznošću.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Neki učenici mogu imati poteškoća u tumačenju sitnih podjela na ljestvici, posebno ako se radi o desetinkama (koraci od 0.1) umjesto cijelih brojeva. Uobičajene pogreške uključuju zaokruživanje na najbliži cijeli broj (npr. 38 umjesto 37.7), izostavljanje decimalnog mjesta (pisanje 377) ili pogrešno brojanje oznaka zbog nepoznavanja decimalne strukture. Drugi mogu pobrkati vrijednosti pojedinog intervala – npr. pretpostavljajući da je udaljenost između 37 i 38 podijeljena na 5 umjesto na 10 jednakih dijelova. Ove pogreške često proizlaze iz nedovoljnog razumijevanja mjesne vrijednosti, ograničene vještine rada s brojevima u decimalnom zapisu ili nedostatka iskustva u tumačenju mjernih ljestvica.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učenici imaju koristi od ponovljenog izlaganja mjernim instrumentima s razmjernom skalom, poput toplomjera, ravnala i kutomjera. Nastavnici bi trebali pokazati kako analizirati intervale, odrediti veličinu prirasta i brojati unaprijed koristeći desetinke. Korištenje prozirnih folija ili obojenih markera za praćenje razine tekućine može poboljšati vizualno poravnavanje. Učenici bi također trebali vježbati čitanje i pisanje brojeva u decimalnom zapisu u kontekstualnim situacijama, uz podršku modela brojevnog pravca koji povezuje simboličko i vizualno razmišljanje. Naglašavanje jezične preciznosti („tri desetinke više od trideset i sedam“) može pomoći u jačanju konceptualne jasnoće vezane uz decimalnu mjesnu vrijednost. Na kraju, ciljani zadaci uspoređivanja vrijednosti poput 37.7, 37.8 i 38.0 mogu poboljšati fino razlikovanje decimalnih brojeva.

Zadatak 3.5: Uspoređivanje racionalnih brojeva u decimalnom zapisu

Označi križićem najveći broj:

☒ 3.33

☐ 3.303

☐ 3.03

☐ 3.3

Rješenje

Četiri zadana broja mogu se prikazati kao

$$3.33 = 3 + 0.3 + 0.03$$

$$3.303 = 3 + 0.3 + 0.003$$

$$3.03 = 3 + 0.03$$

$$3.3 = 3 + 0.3$$

Uspoređujući međusobno parove brojeva, trebalo bi biti očito da je najveći broj 3.33.

Glavna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da uspoređuju i poredaju racionalne brojeve u decimalnom zapisu, osobito one koji su slični po vrijednostima i razlikuju se po broju decimalnih mjesta. Učenici moraju odrediti koji od četiri dana broja (3.33, 3.303, 3.03, 3.3) je najveći. Da bi uspjeli, moraju razumjeti da mjesna vrijednost određuje veličinu, a ne broj znamenaka ili prividna „duljina“ decimalnog zapisa. Zadatak posebno testira preciznost u prikazu na brojevnom pravcu do stotinki i tisućinki te sposobnost prepoznavanja da je 3.33 veći od 3.303, unatoč tome što zapis drugog broja ima više znamenaka.

Zašto je ova vještina ključna?

Uspoređivanje racionalnih brojeva u decimalnom zapisu ključna je matematička vještina jer odražava razumijevanje mjesne vrijednosti u dekadskom brojevnom sustavu izvan skupa cijelih brojeva. Unutar DiToM teorijskog okvira, ovo je presudno za razvoj kompetencija u procjeni, mjerenju i primjeni u stvarnom svijetu (npr. cijene, interpretacija podataka). Usporedba decimalnih brojeva također podržava kasniji rad s postotcima, algebram i znanstvenim kontekstima. Zadatak odražava kako učenici razmišljaju o relativnoj veličini te usmjeravaju li se na vrijednost umjesto na površinsku strukturu, kao što je broj znamenki ili vizualna duljina zapisa. Ova vještina temelj je za mentalno računanje i tumačenje podataka danih putem tablica ili grafikona.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Česta miskoncepcija je da su brojevi s duljim decimalnim zapisom veći – npr. učenici mogu pogrešno odabrati 3.303 jer ima tri decimalna mjesta. Drugi mogu uspoređivati samo prvu znamenku nakon decimalne točke i zanemariti strukturu iza (npr. pretpostavljajući da je $3.3 > 3.33$ jer 3.3 ima samo jedno decimalno mjesto). Neki učenici možda nisu sigurni kako poravnati decimalna mjesta i mentalno usporediti vrijednosti, osobito kada zapisi imaju različite duljine. Ovi odgovori ukazuju na krhko razumijevanje vrijednosti decimalnih mjesta, posebno u razlikovanju desetinki, stotinki i tisućinki. Pogreške također mogu odražavati nedostatak iskustva u uspoređivanju racionalnih brojeva u decimalnom zapisu bliskih vrijednosti, gdje intuitivne strategije ne funkcioniraju.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učenike treba poticati da koriste tablice mjesnih vrijednosti kako bi uspoređivali i poravnali decimale, znamenku po znamenku. Nastavnici mogu pokazati strategije poput dopisivanja nula na kraju kako bi se izjednačio broj decimala (npr. uspoređivanje 3.300, 3.330, 3.303). Vizualna pomagala poput brojevnog pravca s oznakama decimala, modela za dekadski sustav za decimale ili prikaza u mreži mogu pomoći učvršćivanju razumijevanja veličine. Isticanje vrijednosti nad izgledom („Više znamenki ne znači veća vrijednost“) je ključno. Vježbanje kroz zadatke s razmišljanjem („Koji je veći i zašto?“) i igre procjenjivanja koje uključuju novac, duljinu ili volumen mogu pomoći u učvršćivanju usporedbe brojeva u decimalnom zapisu u smislenim kontekstima.

Zadatak 3.6: Određivanje nedostajućeg pribrojnika u jednažbama s brojevima u decimalnom zapisu

Odredi broj koji nedostaje:

a) $1.8 + \underline{3.5} = 5.3$

b) $\underline{1.49} + 0.51 = 2$

Rješenje

Jedno rješenje a) dijela: Broj koji nedostaje može se interpretirati pomoću oduzimanja.

$$\underline{\quad} = 5.3 - 1.8 = [\text{odaberite omiljenu metodu oduzimanja}] = 3.5$$

Drugo rješenje dijela a): Korištenje strategije djelomičnog nadopunjavanja (dovršavanja), korak po korak.

Korak 1: $1.8 + 3 = 4.8$

Korak 2: $4.8 + 0.2 + 0.3 = 5.3$

Odgovor, na temelju koraka 1 i 2: $3 + 0.2 + 0.3 = 3.5$.

(Druga strategija se često koristi u mentalnom računanju, rjeđe pri radu s formalnim zapisom.)

Jedno rješenje b) dijela: Broj koji nedostaje može se interpretirati pomoću oduzimanja.

$$\underline{\quad} = 2 - 0.51 = 1 + 1 - 0.51 = 1 + 0.49 = 1.49 \quad (\text{uporaba činjenice } 0.49 + 0.51 = 1.00)$$

Drugo rješenje, također temeljeno na oduzimanju, ali bez uporabe činjenice da je $0.49 + 0.51 = 1.00$:

$$\underline{\quad} = 2 - 0.51 = 1 + 1 - 0.5 - 0.01 = 1 + 0.5 - 0.01 = 1 + 0.4 + 0.10 - 0.01 = 1.4 + 0.09 = 1.49$$

(Drugo rješenje može se izvesti standardnim formalnim algoritmom za oduzimanje, tako da se drugi broj zapiše ispod prvog i koristi „posuđivanje“/„prenošenje“.)

Treće rješenje dijela b): Korištenje strategije djelomičnog nadopunjavanja (dovršavanja), korak po korak.

Korak 1: $0.49 + 0.51 = 1.00$ (numerička činjenica)

Korak 2: $1 + 1.00 = 2$

Odgovor, na temelju koraka 1 i 2: $0.49 + 1 = 1.49$.

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da odrede nepoznati broj pri zbrajanju brojeva u decimalnom zapisu, primjenjujući razumijevanje mjesnih vrijednosti, strukture jednažbi i inverznih računskih operacija. U oba dijela, učenicima je prikazan zbroj u kojem nedostaje jedan član:

- U a.), moraju odrediti koji broj treba dodati broju 1.8 da bi se dobio broj 5.3.
- U b.), moraju odrediti koji broj treba dodati broju 0.51 da bi se dobio broj 2.

Ovo zahtijeva ili zaključivanje oduzimanjem (npr., $5.3 - 1.8$) ili konceptualno razumijevanje aditivnog odnosa.

Ključna vještina ovdje je sposobnost fleksibilne primjene osnovne algebarske strukture i računanja s brojevima u decimalnom zapisu.

Zašto je ova vještina ključna?

Određivanje nepoznanica u numeričkim izrazima temeljna je ključna vještina za povezivanje aritmetike i algebre. Unutar DiToM teorijskog okvira, takvi se zadaci promatraju kao rano algebarsko zaključivanje – učenici moraju tretirati jednadžbu kao cjelinu i razumjeti strukturnu ulogu nepoznanice. Nadalje, rad s decimalnim vrijednostima jača tečnost učenika u radu s bazom deset i podržava kasniji uspjeh u temama kao što su mjerenje, financije i proporcionalno zaključivanje. Sposobnost prijelaza između poznatih i nepoznatih veličina pomoću inverznih računskih operacija odražava dublje razumijevanje računskih operacija, prepoznajući znak jednakosti kao relaciju ekvivalencije i doprinosi razvoju osjećaja za jednadžbu.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Neki učenici mogu pokušati pogoditi umjesto da primijene oduzimanje, posebno ako nisu sigurni kako rukovati s decimalnim mjestima. Tipična pogreška je nepravilno poravnavanje decimalnih znamenki (npr. tretiranje 1.8 kao 18 ili zaboravljanje poravnanja desetinki). U dijelu b) učenici mogu pobrkati položaj nepoznanice i oduzeti 0.51 od 0 umjesto od 2. Drugi mogu riješiti jednadžbu zbrajanjem umjesto oduzimanjem ili napisati logički netočan rezultat koji numerički "odgovara", ali ne poštuje decimalnu strukturu. Ove pogreške ukazuju na proceduralne praznine, nesigurnost u radu s decimalnim brojevima ili nedostatak vještina interpretacije jednadžbi.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Učinkovita podrška uključuje vježbanje rješavanja otvorenih numeričkih izraza koristeći brojevni pravac s decimalnom podjelom, pravokutne modele ili modele balansiranja jednadžbi kako bi se vizualizirali odnosi, kao i primjena inteligentnih strategija računanja. Učenici bi trebali biti poticani da zapisuju jednadžbe na drugi način, koristeći oduzimanje kako bi izolirali nepoznanicu te da prvo procijene svoj rezultat kako bi razvili osjećaj za smislenost rješenja. Vježbe koje se fokusiraju na poravnavanje decimala i na razlaganje brojeva mogu pomoći u postizanju tečnosti u računanju s racionalnim brojevima u decimalnom zapisu. Poticanje verbalnih objašnjenja („Koji broj biste dodali broju 1.8 da biste dobili 5.3?“) jača razmišljanje i povezuje aritmetiku s algebarskom strukturom.

Zadatak 3.7: Oduzimanje i množenje brojeva u decimalnom zapisu

Izračunaj:

a) $23.5 - 1.12 = \underline{22.38}$

b) $6 \cdot 2.5 = \underline{15}$

Rješenje

a) $23.5 - 1.12 = 22 + 0.50 - 0.12 = 22 + 0.38 = 22.38$ (uporaba činjenice $50 - 12 = 38$)

Oduzimanje $50 - 12$ može se izvršiti "nadopunjavanjem" 12 do 20 do 50: $50 - 12 = 8 + 30 = 38$. (Proces nadopunjavanja može se ilustrirati na brojevnom pravcu.)

b) $6 \cdot 2.5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0.5 = 12 + 3 = 15$

Primjena distributivnosti množenja prema zbrajanju u skupu racionalnih brojeva:

$$6 \cdot 2.5 = 6 \cdot (2 + 0.5) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0.5 = 12 + 3 = 15$$

Komentar: Izračun $6 \cdot 0.5$ može se interpretirati kao "6 polovina = 3 cijela" ili, simbolički, kao

$$6 \cdot 0.5 = 3 \cdot 2 \cdot 0.5 = 3 \cdot 1 = 3 \quad (\text{činjenica } 2 \cdot 0.5 = 1 \text{ "dva puta jedna polovina jednako je jedan (cijelo)"})$$

Drugo rješenje, također temeljeno na faktORIZACIJI $6 = 3 \cdot 2$:

$$6 \cdot 2.5 = 3 \cdot 2 \cdot 2.5 = 3 \cdot 5 = 15 \quad (\text{činjenica } 2 \cdot 2.5 = 5)$$

Primjena svojstva asocijativnosti množenja u skupu racionalnih brojeva:

$$6 \cdot 2.5 = (3 \cdot 2) \cdot 2.5 = 3 \cdot (2 \cdot 2.5) = 3 \cdot 5 = 15$$

Još jedno rješenje, temeljeno na dekompoziciji $6 = 4 + 2$:

$$6 \cdot 2.5 = 4 \cdot 2.5 + 2 \cdot 2.5 = 10 + 5 = 15$$

Primjena distributivnosti množenja prema zbrajanju u skupu racionalnih brojeva:

$$6 \cdot 2.5 = (4 + 2) \cdot 2.5 = 4 \cdot 2.5 + 2 \cdot 2.5 = 10 + 5 = 15$$

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadatkom procjenjuje se sposobnost učenika da točno izvršavaju računske operacije s racionalnim brojevima u decimalnom zapisu. U dijelu a) od njih se traži da izračunaju razliku brojeva 23.5 i 1.12. U dijelu b) moraju odrediti umnožak brojeva 6 i 2.5. Oba zadatka provjeravaju razumijevanje mjesnih vrijednosti, operativnu fluentnost i preciznost u radu s brojevima u decimalnom zapisu – i pri poravnavanju i pri izračunu. Zadatak odražava rutinske, ali bitne vještine u kontekstu decimalnog zapisa.

Zašto je ova vještina ključna?

Izvođenje osnovnih računskih operacija s brojevima u decimalnom zapisu temeljna je matematička vještina, kako je definirano u teorijskom okviru DiToM. To nije važno samo za svakodnevnu numeričku pismenost (npr. rukovanje novcem, mjerenjima ili podacima), već također podržava algebarske generalizacije i proporcionalno zaključivanje.

Precizno računanje s decimalnim brojevima temelj je mnogih matematičkih područja, uključujući geometriju, statistiku i rješavanje problema u znanstvenim kontekstima. Sposobnost računanja s decimalnim brojevima odražava duboku integraciju znanja o mjesnim vrijednostima, algoritamsku kontrolu i strategije procjene.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovog zadatka?

Uobičajene pogreške u dijelu a) uključuju nepravilno poravnavanje decimalnih mjesta (npr. tretiranje broja 23.5 kao 23.50, ali nepravilno poravnanje s 1.12), što dovodi do netočnog oduzimanja. Učenici također mogu oduzimati brojeve koji odgovaraju znamenkama s pogrešnih mjesta ili potpuno zanemariti decimalnu točku. Neki mogu koristiti i neprimjerene strategije poput ponovljenog zbrajanja bez strukturne kontrole. Ove pogreške često ukazuju na slabo razumijevanje mjesnih vrijednosti, svojstava računskih operacija ili pozicioniranja decimala.

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovog zadatka?

Podrška bi trebala uključivati strukturirano vježbanje poravnanja mjesnih vrijednosti, posebno kod oduzimanja s prijelazom. Nastavnici mogu koristiti papir s mrežom ili dijagrame mjesnih vrijednosti kako bi pomogli učenicima pravilno poravnati znamenke. Strategije procjene („Hoće li rezultat biti oko 22 ili 10?“) pomažu razviti osjećaj za brojeve i osjećaj za vjerodostojnost. Za množenje, korištenje modela površine ili prikaza pomoću blokova jedinica može podržati konceptualno razumijevanje množenja brojeva zapisanih u decimalnom obliku. Također je korisno modelirati i standardne algoritme i strategije mentalnog računanja (npr., $6 \cdot 2.5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 0.5 = 15$ or $6 \cdot 2.5 = (3 \cdot 2) \cdot 2.5 = 3 \cdot (2 \cdot 2.5) = 3 \cdot 5 = 15$ (asocijativnost množenja u skupu racionalnih brojeva)). Često verbalno rasuđivanje jača razumijevanje kako se brojevi u decimalnom zapisu ponašaju pri izvođenju računskih operacija.

Zadaci 3.8 i 3.9.: Maksimiziranje vrijednosti razlomka odabirom odgovarajućeg brojnika ili nazivnika

Zadatak 3.8

Prikazano je 5 karata, a na svakoj je napisan broj.



Odaberi odgovarajuću kartu kako bi vrijednost razlomka bila najveća.

$$\frac{7}{13}$$

Zadatak 3.9

Prikazano je 5 karata, a na svakoj je napisan broj.



Odaberi odgovarajuću kartu kako bi vrijednost razlomka bila najveća.

$$\frac{12}{2}$$

Rješenja

Zadatak 3.8 može biti riješen korištenjem sljedeće činjenice

Stavimo li **veći broj*** u **brojnik** (gore), zadržavajući isti nazivnik, vrijednost razlomka postat će veća.

Jedan od brojeva 5, 3, 7, 4, 2 treba biti stavljen u **brojnik**. S obzirom da je 7 **najveći** među tim brojevima, razlomak s najvećom mogućom vrijednošću je 7/13.

Zadatak 3.9 može biti riješen korištenjem sljedeće činjenice

Stavimo li **manji broj*** u **nazivnik** (dolje), zadržavajući isti brojnik, vrijednost razlomka postat će veća.

Jedan od brojeva 5, 3, 7, 4, 2 treba biti stavljen u **nazivnik**. S obzirom da je 2 **najmanji** među tim brojevima, razlomak s najvećom mogućom vrijednošću je 12/2.

* Promatramo samo razlomke u kojima su brojnik i nazivnik pozitivni cijeli brojevi.

Ključna vještina koja se provjerava ovim zadatkom

Ovim zadacima procjenjuje se sposobnost učenika da razmišljaju o strukturi razlomaka i da primijene svoje razumijevanje kako bi maksimizirali vrijednost razlomka odabirom najprikladnijeg broja iz skupa opcija. Učenicima se prikazuje nekoliko karata, od kojih svaka prikazuje različiti broj, i traži se da ubace jedan od njih u zadanu strukturu razlomka na način da vrijednost dobivenog razlomka bude što veća. Razlomaku obično nedostaje ili brojnik ili nazivnik, a učenici moraju odabrati broj koji će učiniti vrijednost razlomka najvećom. Ovakav zadatak testira fleksibilno razmišljanje učenika o omjerima i relativnoj veličini.

Zašto je ova vještina ključna?

Razumijevanje kako brojnik i nazivnik utječu na vrijednost razlomka temeljna je ideja u učenju razlomaka. Unutar DiToM teorijskog okvira, ova sposobnost odražava dublje konceptualno razumijevanje vrijednosti razlomka i

njezine veličine – kako povećanje brojnika ili smanjenje nazivnika utječe na ukupnu vrijednost. Također podržava razvoj relacijskog razmišljanja, u kojem učenici razmišljaju izvan površinskih značajki i umjesto toga strukturno razmatraju odnose između brojeva. Ova saznanja ključna su za kasniji rad s omjerima, proporcijama, skaliranjem i algebarskim razmišljanjem.

Koje vrste pogrešaka i drugih upozoravajućih znakova se mogu očekivati u rješenjima ovih zadataka?

Uobičajena pogreška je odabrati najveći dostupni broj, bez obzira nalazi li se u brojniku ili nazivniku, zbog pogrešne pretpostavke da je „veće bolje“. To ukazuje na proceduralnu ili površinsku strategiju bez strukturnog razumijevanja. Drugi učenici mogu jednostavno birati nasumično ili brkati uloge brojnika i nazivnika, primjerice, maksimizirajući sam broj umjesto vrijednosti dobivenog razlomka. Ove pogreške ukazuju na krhko razumijevanje ponašanja razlomaka i ograničeno iskustvo u uspoređivanju razlomaka. Učenici također mogu pogrešno shvatiti cilj (npr. pokušati se približiti broju 1 umjesto maksimizirati vrijednost).

Koja vrsta podrške se može pružiti učenicima koja imaju teškoće pri rješavanju ovih zadataka?

Učinkovita podrška uključuje praktične aktivnosti s trakama za razlomke ili brojevnim pravcem, gdje učenici manipuliraju brojnicima i nazivnicima kako bi zamijetili kako se mijenja veličina vrijednosti razlomka. Nastavnici mogu prikazati usporedbe poput „ $\frac{3}{4}$ naspram $\frac{3}{5}$ “ ili „ $\frac{4}{7}$ naspram $\frac{5}{7}$ “ kako bi učenici istražili kako brojnici ili nazivnici utječu na veličinu vrijednosti razlomka. Zadaci zasnovani na razgovoru – „Koji ima veću vrijednost i zašto?“ – potiču dublje razmišljanje. Vizualiziranje razlomaka na zajedničkom brojevnom pravcu ili korištenje softvera koji dinamički prikazuje veličinu vrijednosti razlomka također može pomoći učenicima da shvate ove odnose. S vremenom, vođenje učenika prema generalizacijama („Manji nazivnik čini vrijednost razlomka većom ako je brojnik fiksiran“) podržava prijenos znanja i apstrakciju.

VI. Znanstvena evaluacija

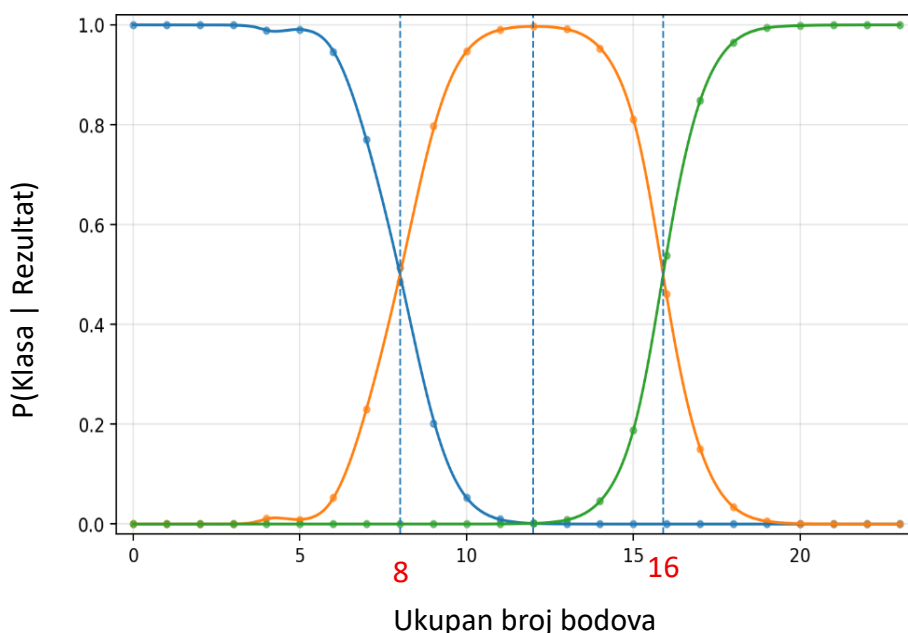
DiToM Probirni test 6+ razvijen je na teorijskoj osnovi i testiran kao dio nereprezentativne validacijske studije. Rezultati navedeni u nastavku služe za identifikaciju učenika koji su potencijalno u riziku zbog nedostatka ključnih matematičkih vještina potrebnih za daljnje učenje matematike u školi. Test omogućuje nastavnicima da na kraju 6. razreda i na početku 7. razreda provedu empirijski utemeljenu procjenu uspješnosti učenika i identificiraju one učenike čiji rezultati ukazuju na potrebu odgovarajuće rane podrške.

Opis uzorka i glavni rezultati

Test je proveden od lipnja do srpnja 2025. godine tijekom posljednja 3 tjedna 2024./2025. školske godine na uzorku od 1841 učenika iz škola u Grčkoj, Njemačkoj, Francuskoj, Španjolskoj, Italiji, Hrvatskoj i Švedskoj.

Test se sastoji od sljedećih dijelova: Osnovne aritmetičke vještine s 8 zadataka, Proporcionalnost s 3 zadatka, Tehničko računanje s 12 zadataka. Ako je zadatak bio točno riješen, dodjeljivao se 1 bod; ako je rješenje bilo netočno, nepotpuno ili nedostajalo, dodjeljivalo se 0 bodova. Test je proveden prema standardiziranim kriterijima (vidi IV. Implementacija DiToM testa) i evaluiran. Budući da je test dizajniran kao probirni test koji identificira učenike koji su potencijalno u riziku, očekivalo se i željelo da efekt plafona bude jako izražen (tj. nije se očekivala normalna distribucija, već negativna asimetrija, tj. asimetrija ulijevo). To je potvrđeno probnim testiranjem.

Za primjenu testa u praksi, određena su dva praga koja razlikuju učenike potencijalno u riziku, učenike koje bi trebalo i dalje promatrati i učenike koji potencijalno nisu u riziku. Određivanje pragova temeljeno je na podacima dobivenim pomoću analize latentnih klasa s tri jasno razgraničene klase. Klase se ne preklapaju i monotone su. Posteriorne vjerojatnosti (vjerojatnosti „a posteriori“) dodjele klasa prikazane su u odnosu na bodovni rezultat, zaglađene i korištene za određivanje kritičnih pragova za donošenje odluka na osnovu točaka njihova presjeka (vidi Slika 1). Za određivanje pragova korištene su točke presjeka dobivenih krivulja (posteriorna vjerojatnost $p = 0,5$).



Analiza klasa pokazuje tri jasno razgraničene klase, koje se tumače na sljedeći način:

K1→ učenici s lošim postignućem na probirnom testu,

K2→ učenici s prilično slabim postignućem na probirnom testu,

K3→ učenici s neupadljivim postignućem na probirnom testu.

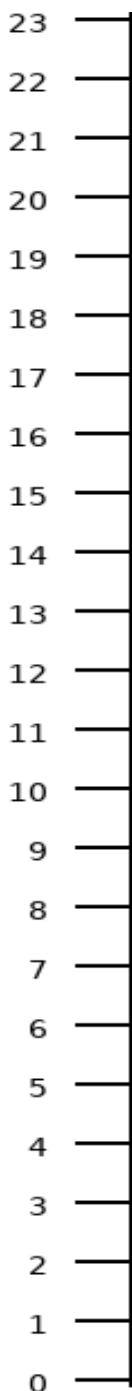
Za određivanje kritičnog broja bodova odabran je prag za koji je vjerojatnost pripadnosti klasi s lošim rezultatima na testu 50%. Prvi prag je stoga 8 bodova. Učenici koji su postigli **8 bodova** ili manje trebaju podršku u savladavanju osnova kako bi mogli pratiti sadržaj iz matematike koji slijedi u nadolazećim nastavnim satima. Drugi prag je **16 bodova**. Učenike koji su postigli rezultat između 9 i 16 bodova treba pratiti na nastavi matematike tijekom nekoliko sljedećih tjedana kako bi se utvrdilo razumiju li obrađeni sadržaj i mogu li ga samostalno primijeniti.

VII. List za procjenu

Sljedeća ljestvica daje inicijalne pokazatelje očekivanih vještina s kojima učenici stječu bodove u navedenim rasponima: 0-8 bodova, 9-16 bodova i 17-23 bodova.

Bodovi

Ova skupina ne odskaje od očekivanih ostvarenih preduvjeta za daljnje učenje matematike u školi.



C: Uz A i B, učenici često mogu...

... odabrati razlomak koji odgovara osjenčanom dijelu kruga, množiti prirodne brojeve, prikazati broj zapisan u decimalnom obliku ili u obliku razlomka na brojevnom pravcu, usporediti brojeve dane u decimalnom zapisu, maksimizirati vrijednosti razlomka odabirom odgovarajućeg brojnika ili nazivnika, oduzimati brojeve u decimalnom zapisu.

Učenici rijetko mogu...

...dijeliti s prirodnim brojevima i brojevima zapisanima u decimalnom zapisu ili u obliku razlomka i prikazati racionalne brojeve na brojevnom pravcu pri složenijim prikazima.

Ovu skupinu treba pomnije pratiti u nadolazećim tjednima kako bi se vidjelo mogu li samostalno razumjeti i primijeniti nadolazeće sadržaje.

B: Uz A, učenici često mogu...

...dijeliti prirodne brojeve, uočiti pravilo u brojevnim obrascima i nastaviti ih, odrediti nedostajući pribrojnik u jednadžbama s brojevima u decimalnom zapisu, osjenčati zadani dio pravokutnika i množiti prirodne brojeve.

Učenici rijetko mogu...

...množiti brojeve u decimalnom zapisu i izjednačiti količine.

Ova je skupina rizična u pogledu ostvarenih preduvjeta za daljnje učenje matematike u školi i trebala bi što prije dobiti posebnu podršku.

A: Učenici često mogu...

...prikazati ekvivalentne razlomke, maksimizirati vrijednosti razlomka odabirom odgovarajućeg brojnika, očitati broj u decimalnom zapisu s toplomjera, primijeniti redoslijed izvođenja računskih operacija, usporediti vrijednost nepravog razlomka s prirodnim brojem i interpretirati ekvivalentne razlomke.

Učenici rijetko mogu...

...primijeniti proporcionalno zaključivanje s količinama i cijenama i prevesti tekstualni zadatak u matematičkog zapis

Literatura:

- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: Macmillan.
- Brings, L., & Kleine, M. (2025). Diagnostic Tool in Mathematics (DiToM): Development and evaluation of a screening instrument for early identification of at-risk students in lower secondary mathematics education. In *Proceedings of EDULEARN25 Conference*. Palma, Spain. [Facebook+7DiToM - Diagnostic Tool in Mathematics+7iated.org+7](#)
- Ehlert, A., & Fritz, A. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(2), 237–263.
- Gaidoschik, M. (2025). *Das dezimale Stellenwertsystem: Verstehen, verinnerlichen und flexibel anwenden*. Hannover: Klett Kallmeyer.
- Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: a view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 447–469.
- Prediger, S. (2008). Zahlaspekte verstehen und flexibel nutzen. In E. Cohors-Fresenborg et al. (Eds.), *Mathematiklernen ermöglichen* (pp. 85–100). Münster: Waxmann. [ph-gmuend.de+3Edoc LMU München+3Wikipedia+3](#)
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257–277. doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 76(2), 428–444.
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.
- Treppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM*, 46, 45–58.
- Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back: The development of students additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Charlotte, NC: Information Age.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2004). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Seelze: Friedrich Verlag.